Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Mišík

Über f-durchschnittliche Eigenschaften

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 3, 380–389

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100910`

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

ÜBER f-DURCHSCHNITTLICHE EIGENSCHAFTEN

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingegangen am 5. April 1968)

Es sei P eine Mengeneigenschaft. Man sagt, daß P f-durchschnittlich ist, wenn für jede Funktion f, für welche die Mengen $f_a = \{x : f(x) > a\}$ und $f^a = \{x : f(x) < a\}$ für jedes a die Eigenschaft P besitzen, diese Eigenschaft auch $f_a^b = f_a \cap f^b$ für alle a und b besitzt. Es ist evident, daß die Eigenschaft P f-durchschnittlich ist, wenn P durchschnittlich ist. Wir sagen, daß P durchschnittlich ist, wenn für je zwei Mengen A und B mit der Eigenschaft P auch $A \cap B$ die Eigenschaft P hat. Es existieren aber f-durchschnittliche Eigenschaften, die nicht durchschnittlich sind.

Es sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von Funktionen und P eine Mengeneigenschaft. Die Eigenschaft P heißt nicht $(\mathscr{C})$ f-durchschnittlich, wenn ein f aus der Klasse $\mathscr{C}$ so existiert, daß die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft P besitzen, aber f_b^c für geeignete b und c die Eigenschaft P nicht besitzt.

Z. ZAHORSKI hat im Artikel [11] acht Klassen von reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen definiert. Es hat sie mit $\mathscr{J}$, $\mathscr{M}_0$, $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_3$, $\mathscr{M}_4$, $\mathscr{M}_5$ und $\mathscr{A}$ bezeichnet. Sechs von ihnen hat er durch Mengeneigenschaften definiert. Wir werden uns mit diesen Eigenschaften und mit einer anderen Eigenschaft beschäftigen.

In dieser Arbeit werden wir nur Funktionen, die auf $(-\infty, \infty)$ definiert sind, betrachten. Es sei $E \subset (-\infty, \infty)$. $|E|$ wird das äußere Lebesguemaß von E bedeuten. Wir werden sagen, daß E die Eigenschaft a) M_0, b) M_1, c) M_2, d) M_3, e) M_4 und f) M_5 besitzt, wenn 1. E eine F_σ-Menge ist und wenn 2. a) jeder Punkt x aus E ein zweiseitiger Häufungspunkt von E ist, d. h. jedes Intervall von Typus (ξ, x) oder (x, η), $\xi < x < \eta$, mindestens abzählbar viele Punkte aus E enthält; b) jeder Punkt x aus E ein zweiseitiger Kondensationspunkt von E ist, d. h. jedes Intervall von Typus (ξ, x) oder (x, η), $\xi < x < \eta$, eine Teilmenge von E von der Mächtigkeit von Kontinuum enthält; c) für jedes $x \in E$ jedes Intervall von Typus $(\xi, x\rangle$ oder $\langle x, \eta)$, $\xi < x < \eta$, eine Teilmenge von E von positivem Lebesguemaß enthält; d) bzw. e) eine Folge $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Mengen und eine Folge $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften existiert: $0 \leqq \eta_n < 1$, bzw. $0 < \eta_n < 1$; $E = \bigcap\{F_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$; für jedes $x \in F_n$ und jedes $c > 0$ gibt es eine Zahl $\varepsilon(x, c) > 0$ so, daß für alle h und h_1, für welche $hh_1 > 0$, $h/h_1 < c$ und $|h + h_1| < \varepsilon(x, c)$ gilt, die

Ungleichung $|E \cap (x + h, x + h + h_1)| > \eta_n|h_1|$ erfüllt ist und f) jeder Punkt x aus E ein Dichtepunkt von E ist. Wir werden sagen, daß E die Eigenschaft M_{2*} besitzt, wenn 1. E eine F_σ-Menge ist und wenn 2. für jedes $x \in E$ jedes Intervall von Typus $(\xi, x\rangle$ oder $\langle x, \eta)$, $\xi < x < \eta$, ein Teilintervall enthält, das ganz in E liegt.

Die Klassen von ZAHORSKI sind in folgender Weise definiert: $\mathscr{J}$ ist die Klasse aller Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux (eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen hat die Eigenschaft von Darboux, wenn sie jede zusammenhängende Menge auf eine zusammenhängende Menge abbildet); a) $\mathscr{M}_0$, b) $\mathscr{M}_1$, c) $\mathscr{M}_2$, d) $\mathscr{M}_3$, e) $\mathscr{M}_4$ und f) $\mathscr{M}_5$ ist die Klasse aller Funktionen f, für welche die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft a) M_0, b) M_1, c) M_2, d) M_3, e) M_4 und f) M_5 besitzen, und $\mathscr{A}$ ist die Klasse aller approximativ stetigen Funktionen. Es gilt: $\mathscr{J} = \mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_1$ und $\mathscr{M}_5 = \mathscr{A}$ ([11]). $\mathscr{M}_{2*}$ definieren wir als die Klasse aller Funktionen f, für welche die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft M_{2*} besitzen. Es ist bekannt (Theorem 3 [1], S. 18), daß jede Funktion aus der ersten Baireschen Klasse, welche die Eigenschaft T_2 von Banach ([10], S. 277) besitzt, aus der Klasse $\mathscr{M}_{2*}$ ist.

Aus dem Satz 1 [8] geht hervor, daß die Eigenschaft M_2 *f-durchschnittlich ist.* Wenn man in der Definition der Eigenschaft von M_2 die erste Bedingung 1.: E ist eine F_σ-Menge durch die Bedingung 1'.: E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ersetzt, bekommt man eine neue Eigenschaft M_2^*. In dem Artikel [8] ist eine Funktion f einer reellen Veränderlichen so konstruiert, daß die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft M_2^* besitzen, aber f_0^1 die Eigenschaft M_2^* nicht hat[1]). Daraus sieht man, daß M_2^* *nicht f-durchschnittlich ist.* J. S. LIPIŃSKI hat in dem Artikel [6] andere solche Funktionen gegeben, d. h. Funktionen g, für welche die Mengen g_a und g^a für jedes a die Eigenschaft M_2^* besitzen und g_b^c für geeignete b und c die Eigenschaft M_2^* nicht hat. In diesem Artikel ist noch eine Funktion g mit der Eigenschaft von Darboux gegeben, für welche die Mengen g_a und g^a für jedes a die Eigenschaft M_2^* besitzen, aber g_b^c für geeignete b und c die Eigenschaft M_2^* nicht hat. Es sei $\mathscr{D}$ die Klasse aller Funktionen mit der Eigenschaft von Darboux. Aus dem Beispiel von J. S. LIPIŃSKI geht hervor, daß M_2^* *nicht* ($\mathscr{D}$) *f-durchschnittlich ist.* Eine solche Funktion mit der Eigenschaft von Darboux bekommt man auch folgendermaßen: Es sei f die schon zitierte Funktion aus dem Artikel [8]. Es ist bekannt ([2], [4] und [7]), daß eine solche Funktion h mit der Eigenschaft von Darboux aus der zweiten Baireschen Klasse existiert, daß die Menge $\{x : f(x) \neq h(x)\}$ von Lebesguemaß Null und von der ersten Kategorie ist. Jetzt nehmen wir $g = \max(0, \min(h, 1))$. Es ist leicht zu sehen, daß g eine Funktion mit der Eigenschaft von Darboux ist, für welche jede Menge g_a und g^a für jedes a die Eigenschaft M_2^* hat und $g_0^1 \cap \langle 0,1\rangle \neq \emptyset$ und $|g_0^1 \cap \langle 0,1\rangle| = 0$ ist. Also g_0^1 hat nicht die Eigenschaft M_2^*.

---

[1]) In der Definition der Menge $K_{1,1}$ ist eine Fehler. Sie muß die Menge $(0,1) - \cup\{J_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ und nicht die Menge $\langle 0,1\rangle - \cup\{J_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ sein.

Satz. *Die Eigenschaften* $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_{2*}$ *und* M_3 *sind f-durchschnittlich und* M_5 *ist durchschnittlich. Die Eigenschaft* M_4 *ist nicht* $(\mathscr{D})$ *f-durchschnittlich, wobei* $\mathscr{D}$ *die Klasse aller Funktionen mit der Eigenschaft von Darboux bedeutet.*

Beweis. Da $\mathscr{J} = \mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_1$ ist und da die Menge f_a^b die Eigenschaft M_0 und M_1 für alle a und b für jede Funktion $f \in \mathscr{J}$ hat, sind die Eigenschaften M_0 und M_1 f-durchschnittlich.

Es sei jetzt f eine Funktion, für welche die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft M_{2*} besitzen und die Menge f_b^c, $b < c$, die Eigenschaft M_{2*} nicht besitzt. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall I, für das $R = I \cap f_b^c \neq \emptyset$ ist und in dem kein Teilintervall von f_b^c enthalten ist. Wir setzen jetzt $P = \bar{R}$. Zuerst beweisen wir folgenden Hilfsatz:

Hilfsatz. *P enthält kein Intervall.*

Beweis. Es sei J ein Intervall, das im P enthalten ist. Da $\emptyset \neq J \cap R \subset J \cap f_b$ ist, existiert nach der Voraussetzung ein Intervall J_1, das im $J \cap f_b$ eanthalten ist. Da $J \subset P$ ist, ist auch $\emptyset \neq J_1 \cap R \subset J_1 \cap f^c$. Es existiert also ein Intervall J_2, das im $J_1 \cap f^c$ enthalten ist. Dann ist aber $J_2 \subset I \cap f_b^c$, was ein Widerspruch ist.

Es sei J_0 ein solches offenes Intervall, daß $J_0 \cap P \neq \emptyset$ ist. Dann setzen wir $J = J_0 \cap I$. Wir werden voraussetzen, daß $J - P \subset f^c$ gilt. Da $\emptyset \neq J \cap R \subset J \cap f_b$ ist, existiert ein Intervall J_1, für das $J_1 \subset J \cap f_b$ gilt. Nach dem Hilfsatz muß $J_1 - P \neq \emptyset$ sein. Es ist evident, daß $J_1 - P \subset I \cap f_b^c = R$ ist. Das ist aber unmöglich, weil $J_1 - P \subset I - R$ ist.

So haben wir bewiesen, daß ein solches $v \in J - P$ existiert, für das $f(v) \geqq c$ ist. Es sei G diejenige Komponente der Menge $J - P$, welche den Punkt v enthält. Da $G \subset I - R$ ist und weil f die Eigenschaft von Darboux hat (f ist nämlich aus der Klasse $\mathscr{M}_2$, die in $\mathscr{J}$ enthalten ist), gilt $\bar{G} \subset I - f^c$. Man kann leicht feststellen, daß $\bar{G} \cap J \cap P \neq \emptyset$ ist. Es gilt also $\sup_{x \in P \cap J} f(x) \geqq c$. Ähnlich beweist man, daß $\inf_{x \in P \cap J} f(x) \leqq b$ ist. Daraus sehen, wir, daß die partielle Funktion $f \mid P$ in keinem Punkt von P stetig sein kann. Das ist aber ein Widerspruch, weil f eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse ist[2]).

Es sei f eine Funktion, für welche die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft M_3 besitzen. Es sei $b < c$ und $f_b^c \neq \emptyset$. Dann existieren zwei Folgen $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{F_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Mengen, zwei Folgen $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{\eta_n^*\}_{n-1}^{\infty}$ von Zahlen, $0 \leqq \eta_n < 1$, $0 \leqq \eta_n^* < 1$ so, daß folgendes gilt:

$$f_b = \bigcap\{F_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}, \quad f^c = \bigcap\{F_n^* : n = 1, 2, 3, \ldots\},$$

für jedes $x \in F_n$ und jedes $\alpha > 0$ existiert eine solche Zahl $\varepsilon_1(x, \alpha) > 0$, daß für alle h und h_1, für welche $hh_1 > 0$, $h/h_1 < \alpha$ und $|h + h_1| < \varepsilon_1(x, \alpha)$ gilt, die Ungleichung

[2]) Ich danke Herrn J. Mařík für die Vereinfachung des Beweises der Behauptung über die Eigenschaft M_{2*}.

$|f_b \cap (x + h,\ x + h + h_1)| > \eta_n |h_1|$ erfüllt ist, und für jedes $x \in F_n^*$ und jedes $\alpha > 0$ existiert eine solche Zahl $\varepsilon_2(x, \alpha) > 0$, daß für alle h und h_1, für welche $hh_1 > 0$, $h/h_1 < \alpha$ und $|h + h_1| < \varepsilon_2(x, \alpha)$ gilt, die Ungleichung $|f^c \cap (x + h,\ x + h + h_1)| > \eta_n^* |h_1|$ erfüllt ist.

Dann ist $f_b^c = \bigcap\{F_n \cap F_m^* : n,\ m = 1, 2, 3, \ldots\}$ und die Mengen $F_n \cap F_m^*$ sind abgeschlossen für alle n und m. Wir wählen $\eta_{n,m} = 0$. Es sei $x \in F_n \cap F_m^*$, $\alpha > 0$ und $\varepsilon(x, \alpha) = \min(\varepsilon_1(x, \alpha), \varepsilon_2(x, \alpha)) > 0$. Wir nehmen jetzt h und h_1 so, daß $hh_1 > 0$, $h/h_1 < \alpha$ und $|h + h_1| < \varepsilon(x, \alpha)$ ist. Da $|f_b \cap (x + h,\ x + h + h_1)| > \eta_n |h_1| \geqq 0$, $|f^c \cap (x + h,\ x + h + h_1)| > \eta_n^* |h_1| \geqq 0$ und $f \in \mathscr{M}_2$ ist, muß $|f^c \cap (x + h,\ x + h + h_1)| > 0 = \eta_{n,m}|h_1|$ sein (es ist $f_b^c \cap (x + h, x + h + h_1) \neq \emptyset$, weil $f_b \cap (x + h, x + h + h_1) \neq \emptyset$, $f^c \cap (x + h, x + h + h_1) \neq \emptyset$ und $f \in \mathscr{J}$).

Damit haben wir bewiesen, daß die Menge f_b^c für alle b und c die Eigenschaft M_3 hat. Die Eigenschaft M_3 ist also f-durchschnittlich.

Die Behauptung über die Eigenschaft M_5 ist leicht zu beweisen.

Wir werden jetzt eine Funktion aus der Klasse $\mathscr{M}_4$ so konstruieren, daß f_{-1}^1 die Eigenschaft M_4 nicht hat. Es sei $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge von solchen positiven Zahlen, daß $\varepsilon_n < 1/[2(n + 1)(n + 2)]$ ist. Es sei $a_n = 1/(n + 1) - \varepsilon_n$ und $b_n = 1/(n + 1) + \varepsilon_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dann gilt: $b_{n+1} = 1/(n + 2) + \varepsilon_{n+1} < 1/(n + 2) + 1/[2(n + 2)(n + 3)] < (2n + 3)/[2(n + 1)(n + 2)] = 1/(n + 1) - 1/[2(n + 1) \,.\, (n + 2)] < 1/(n + 1) - \varepsilon_n = a_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Die Funktion f definieren wir in folgender Weise:

$f(x) = 1$ für $x \geqq b_1$,
$f(x) = 0$ für $x \leqq 0$,
$f(x) = (-1)^n$ für $x \in \langle b_{n+1}, a_n \rangle$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,
f ist linear in jedem Intervall $\langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Die Funktion f hat offensichtlich die Eigenschaft von Darboux und ist in jedem Punkt $x \in (-\infty, \infty)$, $x \neq 0$, stetig. Es sei α eine Zahl. Wenn $\alpha \geqq 0$ ist, dann ist f_α eine offene Menge und hat die Eigenschaft M_4 (aus der Definition der Eigenschaft M_4 folgt, daß jede offene Menge die Eigenschaft M_4 hat). Wir werden uns mit dem Fall $\alpha < 0$ beschäftigen. Es ist ersichtlich, daß $f_\alpha - \{0\}$ eine offene Menge ist. Daraus folgt jetzt, daß die Menge f_α die Eigenschaft M_4 besitzt, wenn ein $\eta > 0$ so existiert, daß es zu jedem $c > 0$ eine Zahl $\varepsilon(c) > 0$ so gibt, daß für alle h und h_1, $h > 0$ und $h_1 > 0$, für welche $h < ch_1$ und $h + h_1 < \varepsilon(c)$ ist, die Ungleichung $|f_\alpha \cap (h, h + h_1)| > \eta h_1$ gilt. Da $\alpha < 0$ ist, gilt $\bigcup\{\langle 1/(n + 1), 1/n \rangle : n = 3, 5, 7, \ldots\} \subset f_\alpha$.

Es sei $c > 0$ und $\varepsilon(c) = 1/(n - 1)$, wobei n eine solche natürliche Zahl ist, für die $n > \max(7c + 1{,}5)$ gilt. Es seien h und h_1 solche positive Zahlen, für welche $h < ch_1$ und $h + h_1 < \varepsilon(c)$ ist. Es existieren solche natürliche Zahlen k und i, daß

$$\frac{1}{k + i + 1} < h \leqq \frac{1}{k + i} \leqq \frac{1}{k} \leqq h + h_1 < \frac{1}{k - 1}$$

gilt. Daraus folgt $k \geqq n$ und

$$c > \frac{h}{h_1} > \frac{(k+i+1)^{-1}}{(k-1)^{-1}-(k+i+1)^{-1}} = \frac{k-1}{i+2} \geqq \frac{n-1}{i+2} > \frac{7c}{i+2}.$$

Es muß also $i > 5$ sein. Da

$$\left|\left\langle \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right\rangle\right| > \left|\left\langle \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+1} \right\rangle\right|$$

für jedes $j = 1, 2, 3, \ldots$ gilt und da $\bigcup\{\langle 1/(n+1); 1/n\rangle : n = 3, 5, 7, \ldots\} \subset f_\alpha$ ist, muß

$$|f_\alpha \cap (h, h+h_1)| \geqq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{k+2j+1} - \frac{1}{k+2j+2}$$

gelten. Dabei ist $i \leqq 2j + 3 \leqq i + 1$. Daraus bekommen wir:

$$|f_\alpha \cap (h, h+h_1)| \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} +\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{k+i-1} - \frac{1}{k+i}\right) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{(k+1)(k+i)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(i-1)(k-1)(k+i+1)}{(i+2)(k+1)(k+i)} \frac{i+2}{(k-1)(k+i+1)} \geqq \frac{1}{2} \frac{4}{7} \frac{5}{7} h_1 = \frac{10}{49} h_1,$$

weil $(i-1)/(i+2) > \frac{4}{7}$ für $i > 5$, $(k-1)/(k+1) > \frac{5}{7}$ für $k > 5$ und

$$h_1 < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+i+1} = \frac{i+2}{(k-1)(k+i+1)}$$

ist. Damit haben wir bewiesen, daß f_α für jede reelle Zahl α die Eigenschaft M_4 hat. Ähnlich beweist man, daß auch f^α für jede reelle Zahl α die Eigenschaft M_4 hat. Es gilt also, daß f aus der Klasse $\mathscr{M}_4$ für jede Folge $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist.

Es gilt: $|f_{-1}^1 \cap (1/(n+i), 1/n)| = \varepsilon_{n+i-1} + 2\sum_{j=0}^{i-2} \varepsilon_{n+j} + \varepsilon_{n-1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wir wählen jetzt die Zahlen ε_n so, daß $\lim_{n\to\infty} ((n+1)(n+2)\varepsilon_n) = 0$ ist. Es sei $\eta > 0$. Dann können wir eine Zahl N so finden, daß $(n+1)(n+2)\varepsilon_n < \eta/2$ für jedes $n > N$ gilt. Für $n > N$ und $i = 1, 2, 3, \ldots$ gilt jetzt

$$\left|f_{-1}^1 \cap \left(\frac{1}{n+i}, \frac{1}{n}\right)\right| = \varepsilon_{n+i-1} + 2\sum_{j=0}^{i-2} \varepsilon_{n+j} + \varepsilon_{n-i} < \frac{1}{2} \frac{\eta}{(n+i)(n+i+1)} +$$

$$+ \eta \sum_{j=0}^{i-2} \frac{1}{(n+j+1)(n+j+2)} + \frac{\eta}{2n(n+1)} <$$

$$< \eta \left(\sum_{j=0}^{i-2} \left(\frac{1}{n+j+1} - \frac{1}{n+j+2} \right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \eta \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+i} \right).$$

Daraus folgt, daß es kein $\eta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: zu jedem $c > 0$ existiert ein $\varepsilon(c) > 0$ so, daß für alle $h > 0$ und $h_1 > 0$, für welche $h < ch_1$ und $h + h_1 < \varepsilon(c)$ ist, die Ungleichung $|f_{-1}^{1} \cap (h, h + h_1)| > \eta h_1$ gilt. Damit ist bewiesen, daß M_4 nicht $(\mathscr{D})$ f-durchschnittlich ist.

Wenn wir in der Definition der Eigenschaften $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_3$ und M_{2*} die erste Bedingung 1.: E ist eine F_σ-Menge durch 1'.: E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ersetzen, dann bekommen wir neue Eigenschaften, die wir mit M_0^*, M_1^*, M_3^* und M_{2*}^* bezeichnen. Wir werden jetzt zeigen, daß die Eigenschaften M_0^*, M_1^*, M_3^* und M_{2*}^* *nicht f-durchschnittlich sind.*

Am Ende des Artikels [8] ist die schon erwähnte Funktion f konstruiert. Sie ist folgendermaßen definiert: Zuerst sind zwei F_σ-Mengen K_1 und K_2, die Teilmengen von $\langle 0,1 \rangle$ sind, konstruiert. Für sie gilt $|K_1 \cap J| > 0$ und $|K_2 \cap J| > 0$ für jedes offene Intervall $J \subset \langle 0,1 \rangle$, $|K_1| + |K_2| = 1$, $\langle 0, 1 \rangle \in \overline{\langle 0, 1 \rangle - (K_1 \cup K_2)}$ und $K_1 \cap \cap K_2 = \emptyset$. Daraus folgt die Existenz zweier disjunkten F_σ-Mengen S_1 und S_2, für die $|S_1 \cap J| > 0$, $|S_2 \cap J| > 0$ und $|S_1 \cap J| + |S_2 \cap J| = |J|$ für jedes Intervall $J \subset \subset (-\infty, \infty)$ gilt und $(-\infty, \infty) \subset \overline{(-\infty, \infty) - (S_1 \cup S_2)}$ ist. Jetzt definieren wir f in folgender Weise: $f(x) = 1$ für $x \in S_1$, $f(x) = 0$ für $x \in S_2$ und $f(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in \in (-\infty, \infty) - (S_1 \cup S_2)$. Aus den Eigenschaften von S_1 und S_2 ist leicht zu sehen, daß die Mengen f_a und f^a für jedes a die Eigenschaft M_3^* besitzen, aber die Menge f_0^1 die Eigenschaft M_3^* nicht hat. Es sei $s \in S_2$. Wenn wir die Funktion g folgemdermaßen definieren: $g(x) = 1$ für $x \in (-\infty, \infty) - S_2$, $g(x) = 0$ für $x \in S_2 - \{s\}$ und $g(s) = \frac{1}{2}$, dann ist leicht zu sehen, daß die Mengen g_a und g^a für jedes a die Eigenschaft M_0^* und M_1^* besitzen, aber $g_0^1 = \{s\}$ hat nicht die Eigenschaften M_0^* und M_1^*. Damit haben wir bewiesen, daß die Eigenschaften M_0^*, M_1^* und M_3^* nicht f-durchschnittlich sind. Man kann leicht zeigen (ähnlich wie wir das bei M_2^* gemacht haben), daß M_3^* *nicht* $(\mathscr{D})$ *f-durchschnittlich ist.* Wir bemerken noch, daß die Eigenschaften M_0^* und M_1^* $(\mathscr{D})$ f-durchschnittlich sind.

Jetzt werden wir zeigen, daß auch *die Eigenschaft* M_{2*}^* *nicht* $(\mathscr{D})$ *f-durchschnittlich ist.* Dazu werden wir eine Funktion h konstruieren, welche die Eigenschaft von Darboux hat und für welche die Mengen h_a und h^a für jedes a die Eigenschaft M_{2*}^* besitzen, wobei die Menge h_0^1 die Eigenschaft M_{2*}^* nicht besitzt.

Es sei C die Cantorsche Menge. Es sei $J_{1,1} = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$, $J_{2,1} = \langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle$, $J_{2,2} = \langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$, $J_{3,1} = \langle \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \rangle$, $J_{3,2} = \langle \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \rangle$, $J_{3,3} = \langle \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \rangle$, $J_{3,4} = \langle \frac{25}{27}, \frac{26}{27} \rangle$, $J_{4,1} = \langle \frac{1}{81}, \frac{2}{81} \rangle$, $J_{4,2} = \langle \frac{7}{81}, \frac{8}{81} \rangle$, $J_{4,3} = \langle \frac{19}{81}, \frac{20}{81} \rangle$, $J_{4,4} = \langle \frac{25}{81}, \frac{26}{81} \rangle$, $J_{4,5} = \langle \frac{55}{81}, \frac{56}{81} \rangle$, $J_{4,6} = \langle \frac{61}{81}, \frac{62}{81} \rangle$, $J_{4,7} = \langle \frac{73}{81}, \frac{74}{81} \rangle$, $J_{4,8} = \langle \frac{79}{81}, \frac{80}{81} \rangle, \ldots, J_{n,k} = \langle a_k^{(n)}/3^n, (a_k^{(n)} + 1)/3^n \rangle$, $\ldots$, wobei $a_k^{(n)} = a_k^{(n-1)}$ für $1 \leqq k \leqq 2^{n-2}$ und $a_k^{(n)} = 3^n - (a_{2^{n-1}-k+1}^{(n-1)} + 1)$ für

$2^{n-2} + 1 \leqq k \leqq 2^{n-1}$ ist. Es sei φ die Funktion, die auf C folgendermaßen definiert ist: $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i/2^i)$, wenn $x = \sum_{i=1}^{\infty} (2c_i/3^i) \in C$ ist ([4], S. 236). Die Funktion φ ist auf C stetig, $\varphi(C) = \langle 0,1 \rangle$ und $\varphi(J \cap C)$ enthält für jedes offene Intervall J, für das $J \cap C \neq \emptyset$ ist, das Intervall $(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$, wenn $x_1, x_2 \in J \cap C$ und $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ ist. Es sei ψ_0 eine solche reelle Funktion aus der zweiten Baireschen Klasse, die auf $(-\infty, \infty)$ definiert ist und für welche die Mächtigkeit der Menge $\psi_0^{-1}(a) \cap J$ für jede reelle Zahl a und jedes offene Intervall J die Mächtigkeit von Kontinuum ist (eine solche Funktion existiert [9]). Daraus folgt, daß es eine solche reelle Funktion ψ aus der zweiten Baireschen Klasse so gibt, daß sie auf $(-\infty, \infty)$ definiert ist, $\psi((-\infty, \infty)) = (-1,1)$ ist und die Menge $\psi^{-1}(a) \cap J$ für jedes $a \in (-1,1)$ und jedes Intervall J die Mächtigkeit von Kontinuum hat. Dann ist die Funktion $\psi(\varphi(x))$ aus der zweiten Baireschen Klasse ([5], S. 283) und die Menge $J \cap \{x : \psi(\varphi(x)) = a\}$ hat für jedes $a \in (-1,1)$ und jedes offene Intervall J, für das $J \cap C \neq \emptyset$ ist, die Mächtigkeit von Kontinuum. Jetzt definieren wir die Funktion h folgendermaßen: $h(x) = (-1)^n$ für $x \in \bigcup\{J_{n,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, $h(x) = \psi(\varphi(x))$ für $x \in \langle 0,1 \rangle - \bigcup\{\bigcup\{J_{n,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ und $h(x) = h(0)$ für $x < 0$ und $h(x) = h(1)$ für $x > 1$.

Die Funktion h ist aus der zweiten Baireschen Klasse. Es ist nämlich: $\{x : h(x) > a\} = \emptyset$ für $a \geqq 1$, $\{x : h(x) > a\} = (\bigcup\{\bigcup\{J_{2n,i} : t = 1, 2, \ldots, 2^{2n-1}\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}) \cup \{x : x \in C - \bigcup\{\bigcup\{J_{2n-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2n-2}\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}, \psi(\varphi(x)) > a\} \cup E$ für $-1 \leqq a < 1$ und $\{x : h(x) > a\} = (-\infty, \infty)$ für $a < -1$. Dabei gilt folgendes für die Menge E: wenn $\max(h(0), h(1)) \leqq a$ gilt, ist $E = \emptyset$; wenn $h(0) > a$ und $h(1) \leqq a$ gilt, dann ist $E = (-\infty, 0)$; wenn $h(0) \leqq a$ und $h(1) > a$ gilt, dann ist $E = (1, \infty)$ und wenn $\min(h(0), h(1)) > a$ gilt, ist $E = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Die Menge $\{x : h(x) > a\}$ ist stets eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, weil $\bigcup\{\bigcup\{J_{2n,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2n-1}\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ eine F_σ-Menge ist, $\{x : x \in C - \bigcup\{\bigcup\{J_{2n-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2n-2}\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}, \psi(\varphi(x)) > a\}$ eine Differenz von einer $G_{\delta\sigma}$-Menge und einer abzählbaren Menge ist und E eine offene Menge ist. Ähnlich kann man beweisen, daß die Menge $\{x : h(x) < a\}$ für jedes a eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist.

Es sei $0 \leqq a < b \leqq 1$ und $\min(h(a), h(b)) < c < \max(h(a), h(b))$, wobei $\min(h(a), h(b)) < \max(h(a), h(b))$ ist. Dann muß $(a, b) \cap C \neq \emptyset$ sein. Da die Menge $\{x : x \in (a, b) \cap C, \psi(\varphi(x)) = \alpha\}$ die Mächtigkeit von Kontinuum für jedes $\alpha \in (-1,1)$ hat und da die Menge $\{x : x \in (a, b) \cap C, h(x) \neq \psi(\varphi(x))\}$ höchstens abzählbar ist, hat die Menge $\{x : x \in (a, b) \cap C, h(x) = c\}$ die Mächtigkeit von Kontinuum. Daraus sieht man, daß die Funktion h die Eigenschaft von Darboux hat.

Es sei jetzt u eine solche Zahl, daß $h(u) > a$ ist. Es muß $a < 1$ sein. Wenn $a < -1$ ist, dann ist $\{x : h(x) > a\} = (-\infty, \infty)$. Es sei $a \geqq -1$. Es sei $\eta > u$. Wenn $u > 1$ ist, dann ist $\langle u, \eta) \subset \{x : h(x) > a\}$. Wenn $0 \leqq u < 1$ ist, dann ist $u \in (\bigcup\{\bigcup\{J_{2k,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-1}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}) \cup (C - \bigcup\{\bigcup\{J_{2k-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-2}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\})$. Wenn $u \notin C - \bigcup\{\bigcup\{J_{2k-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-2}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ ist, dann ist $u \in \operatorname{int} J_{2j,i}$ für geeignete j und i. Dann existiert im $\langle u, \eta)$ ein Teilintervall, welches ganz in $\{x : h(x) > a\}$ enthalten ist. Wenn $u \in C - \bigcup\{\bigcup J_{2k-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-2}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ ist, dann ist entweder u ein linker Endpunkt eines Intervalls $J_{2k,i}$ oder ist ein Intervall $J_{2j,i}$ im $\langle u, \eta)$ enthalten. Also enthält $\langle u, \eta)$ ein Teilintervall von $\{x : h(x) > a\}$. Wenn $u < 0$ ist, dann ist $\langle u, 0) \cap \langle u, \eta) \subset \{x : h(x) > a\}$. Ähnlich beweist man, daß das Intervall $(\xi, u\rangle$, $\xi < u$, ein Teilintervall von $\{x : h(x) > a\}$ enthält. Damit haben wir bewiesen, daß die Menge $\{x : h(x) > a\}$ die Eigenschaft M^*_{2*} für jedes a besitzt. In änlicher Weise beweist man, daß die Menge $\{x : h(x) < a\}$ die Eigenschaft M^*_{2*} für jedes a hat. Da $h^1_{-1} \cap \langle 0,1\rangle \neq \emptyset$ und $|h^1_{-1} \cap \langle 0,1\rangle| = 0$ ist, hat die Menge h^1_{-1} nicht die Eigenschaft M^*_{2*}. Damit haben wir bewiesen, daß die Eigenschaft M^*_{2*} nicht $(\mathscr{D})$ f-durchschnittlich ist.

Jetzt zeigen wir noch, daß die Eigenschaften $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ und M_{2*} *nicht durchschnittlich sind.* Es sei S_1 und S_2 wie oben. Es sei $a \in (-\infty, \infty) - (S_1 \cup S_2)$. Dann haben die Mengen $S_1 \cup \{a\}$ und $S_2 \cup \{a\}$ die Eigenschaften $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ und M_3, aber die Menge $(S_1 \cup \{a\}) \cap (S_2 \cup \{a\}) = \{a\}$ hat keine von diesen Eigenschaften. Es sei $A_0 = \bigcup\{\bigcup\{J_{2k,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-1}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$, $B_0 = \bigcup\{\bigcup\{J_{2k-1,i} : i = 1, 2, \ldots, 2^{2k-2}\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ und $a \in C - (A_0 \cup B_0)$. Die Mengen $A = A_0 \cup \{a\}$ und $B = B_0 \cup \{a\}$ haben die Eigenschaft M_{2*}, aber die Menge $A \cap B = \{a\}$ hat nicht diese Eigenschaft.

Es ist bekannt [11], daß jede beschränkte Ableitung aus der Klasse $\mathscr{M}_4$ ist. Die in dem Beweis des Satzes 1 benützte Funktion f:

$f(x) = 1$ für $x \geqq b_1$,
$f(x) = 0$ für $x \leqq 0$,
$f(x)$ ist linear auf $\langle a_n, b_n\rangle$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$,
$f(x) = (-1)^n$ für $x \in \langle b_{n+1}, a_n\rangle$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$,

ist eine beschränkte Ableitung. Sie ist die Ableitung von der Funktion $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Es ist leicht zu sehen, daß $\varphi'(x) = f(x)$ für $x \neq 0$ und $\lim_{x\to 0-} [\varphi(x) - \varphi(0)]/x = f(0) = 0$ ist. Unsere Behauptung ist wirklich richtig, wenn $\lim_{x\to 0+} [\varphi(x) - \varphi(0)]/x = 0$ ist.

Es sei jetzt $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (1/k)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n+2} = \int_1^\infty \frac{1}{(n+2t)^2}\,\mathrm{d}t < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(n+2k)^2} < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(n+2k-1)(n+2k)} =$$

$$= |r_n| < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(n+2k-1)^2} < \int_0^\infty \frac{1}{(n+2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} \quad \text{für} \quad n > 1\,.$$

Für $n = 2, 3, \ldots$ gilt

$$\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi\left(\frac{1}{2n-1}\right) \quad \text{für} \quad x \in \left\langle\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right\rangle,$$

weil für $x \in \langle 1/2n, 1/(2n-1)\rangle$ $f(x) \geqq 0$ ist und

$$\varphi\left(\frac{1}{2n-2}\right) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi\left(\frac{1}{2n-1}\right) \quad \text{für} \quad x \in \left\langle\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2}\right\rangle,$$

weil für $x \in \langle 1/(2n-1), 1/(2n-2)\rangle$ $f(x) \leqq 0$ ist.

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} - 2r_{2n+2} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n}$$

und

$$\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n} - 2r_{2n+1} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-1}\,.$$

Aus der Ungleichung für $|r_n|$ bekommen wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgende Ungleichungen

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n}\right) \leqq (2n+1)\,\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\right) \leqq (2n+1)\left(\frac{3}{(2n+1)(2n+4)} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n}\right)$$

und

$$2n\left(-\frac{3}{2n(2n+3)} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-1}\right) \leqq 2n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) \leqq 2n\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-1}\,.$$

Jetzt können wir leicht folgendes ableiten:

$$k_1 \,.\, 2n\left(-\frac{3}{2n(2n+3)} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-1}\right) \leqq \frac{1}{2nx}\,2n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) \leqq \frac{\varphi(x)}{x} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(2n-1)\,x}\,(2n-1)\,\varphi\left(\frac{1}{2n-1}\right) \leqq k_2(2n-1)\left(\frac{3}{(2n-1)(2n+2)} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-2}\right)$$

für $x \in \langle 1/2n, 1/(2n-1)\rangle$ und

$$k_3(2n-2)\left(-\frac{3}{(2n-2)(2n+1)} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-3}\right) \leqq \frac{1}{(2n-2)\,x}\,(2n-2)\,\varphi\left(\frac{1}{2n-2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varphi(x)}{x} \leqq \frac{1}{(2n-1)\,x}\,(2n-1)\,\varphi\left(\frac{1}{2n-1}\right) \leqq k_4(2n-1)\left(\frac{3}{(2n-1)(2n+2)} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2n-2}\right)$$

für $x \in \langle 1/(2n-1), 1(2n-2)\rangle$, wobei k_1, k_2, k_3 und k_4 geeignete positive Zahlen sind. Daraus folgt jetzt, daß $\lim\limits_{x\to 0+} (\varphi(x) - \varphi(0))/x = 0 = f(0)$ ist. Dabei haben wir die Relation $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+1)(n+2)\,\varepsilon_n) = 0$ benützt. Damit haben wir bewiesen, daß *die Eigenschaft* M_4 *nicht* $(\mathscr{BA})$ *f-durchschnittlich ist*, wobei $\mathscr{BA}$ die Klasse aller beschränkter Ableitungen bedeutet.

Wir haben also bewiesen, daß es solche nicht f-durchschnittliche Mengeneigenschaften P_0 gibt, für welche die Eigenschaft P: 1. E ist eine F_σ-Menge, 2. E hat die Eigenschaft P_0, eine f-durchschnittliche Eigenschaft ist. Es ist eine Frage, ob es eine nicht f-durchschnittliche Mengeneigenschaft P_0 so gibt, daß die Eigenschaft P : 1. E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, 2. E hat die Eigenschaft P_0, eine f-durchschnittliche Eigenschaft ist.

Literatur

[1] *A. M. Bruckner:* An affirmative answer to a problem of Zahorski and some consequences, Mich. Math. Jour. *13* (1966), 15—26.

[2] *A. M. Bruckner, J. G. Ceder* and *R. Keston:* Representations and approximations by Darboux functions in the first class of Baire, Rev. Roum. Math. Pures Appl. *13* (1968), 1247—1254.

[3] *A. M. Bruckner, J. L. Leonard:* Derivatives, Amer. Math. Monthly *73* No *4* Part II (1966), 24—56.

[4] *A. B. Gurevich:* O D-непрерывных компонентах Сиерпинсково, ДАН БССР *10* (1966), 539—541.

[5] *C. Kuratowski:* Topologie I, Warszawa 1952.

[6] *J. S. Lipiński:* Sur la classe $\mathscr{M}'_2$, Čas. pěst. mat. *93* (1968), 222—226.

[7] *S. Marcus:* wird erschienen in Indian Journal of Mathematics.

[8] *L. Mišík:* Über die Klasse $\mathscr{M}_2$, Čas. pěst. mat. *91* (1966), 389—393.

[9] *L. Mišík:* Zu zwei Sätzen von W. Sierpinski, Rev. Roum. Math. Pures Appl. *12* (1967), 849—860.

[10] *S. Saks:* Theory of the integral, New York, 1937.

[11] *Z. Zahorski:* Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1—54.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Štefánikova ul. č. 41, ČSSR (Matematický ústav SAV).