Zbyněk Nádeník

Eine Kennzeichnung der Enveloppen von achsensymmetrischen konvexen Zylinderflächen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 356–362

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100902

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

EINE KENNZEICHNUNG DER ENVELOPPEN VON ACHSENSYMMETRISCHEN KONVEXEN ZYLINDERFLÄCHEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 4. Juni 1968)

Aus den Sätzen über die eindeutige Bestimmtheit einer Eifläche durch eine beliebige elementarsymmetrische Funktion ihrer Hauptkrümmungsradien (s. [1] und [2], § 9) folgt:

Die Eifläche hat dann — und trivialerweise nur dann — einen Mittelpunkt (d. h. die ihr umschriebenen Zylinderflächen sind dann und nur dann achsensymmetrisch), *wenn in je zwei Gegenpunkten eine ihrer elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungsradien denselben Wert hat.*

Indem wir sehr eng betreffs der Voraussetzungen und Bezeichnungen an [3] anknüpfen (s. besonders Abschn. A, C, D in [3]), geben wir mit der vorliegenden Note ein Analogon zum obigen Satz über die Eifläche, und zwar für die torusförmige Enveloppe S aus [3]:

Die Zylinderflächen $Z(\alpha)$ der einparametrigen Familie (4) *aus* [3], *deren Hüllfläche die Enveloppe S ist, sind dann und nur dann achsensymmetrisch, wenn man die Grundkurve C so wählen kann, dass für ein beliebiges $j = 2, \ldots, n-1$ in allen nichtparabolischen Gegenpunkten von S* (s. [3], Abschn. D und 11 oder Anfang von [4]) *folgende Beziehung besteht*

$$(1) \qquad \{R_1(\alpha, -u) \ldots R_j(\alpha, -u)\} - \{R_1(\alpha, u) \ldots R_j(\alpha, u)\} = \\ = 2\varrho\{\mathscr{R}_1(\alpha, u) \ldots \mathscr{R}_{j-1}(\alpha - u)\} : \cos \gamma(\alpha, u)\,.$$

Dabei ist $1/\varrho$ die Krümmung von C, weiter bedeutet γ den Winkel der ersten Normalen von C und der Flächennormalen von S (s. (5) in [3]) und $R_1, \ldots, R_{n-1}$ bzw. $\mathscr{R}_1, \ldots$ $\ldots, \mathscr{R}_{n-2}$ sind die Hauptkrümmungsradien von S bzw. des Normalschnittes $F(\alpha)$ von $Z(\alpha)$ (es bleibt übrig, den Fall des dreidimensionalen Raumes getrennt zu beschreiben); endlich bezeichnet $\{x_1 \ldots x_p\}$ die p-te elementarsymmetrische Funktion von $x_1, \ldots, x_q$; $p \leqq q$, $\{x_1 \ldots x_p\} = 1$ für $p = 0$.

Wie deuten den Gedankengang des Beweises an: Im Abschn. 1 ist die Parameterdarstellung von S in bezug auf das Frenetsche n-Bein von C gefunden. Abschn. 2

enthält diesen Satz: *Sind alle Zylinderflächen* $Z(\alpha)$ *achsensymmetrisch, so erzeugen ihre Achsen eine Torse mit singularitätenfreier Rückkehrkante.*

Dann werden wir uns der Formel (12) aus [3], Abschn. D zu

$$(2) \qquad \{R_1 - H, \ldots, R_j - H\} = \Delta_{j+1}(H) - \frac{\varrho}{\cos\gamma}\{\mathscr{R}_1 - H, \ldots, \mathscr{R}_{j-1} - H\}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n-1);$$

darin ist H die Stützfunktion von S bezüglich einer Grundkurve C und $\Delta_n, \ldots$ $\ldots, \Delta_2(\Delta_1 \equiv 1)$ sind die in [3], Abschn. D definierten Differentialoperatoren in bezug auf das sphärische Bild Ω von S. Im Abshn. 3 ist (2) in der Form eines Gleichungssystems für $\{R_1\}, \ldots, \{R_1 \ldots R_{n-1}\}$ geschrieben und im Abschn. 4 ist bewiesen, dass seine einzige Lösung durch

$$(3) \quad \{R_1 \ldots R_j\} = \sum_{v=0}^{j} \binom{n - j + v - 1}{v} H^v \,.\, \Delta_{j-v+1}(H) - \frac{\varrho}{\cos\gamma}\{\mathscr{R}_1 \ldots \mathscr{R}_{j-1}\}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gegeben ist. Indem wir im Abschn. 5 die Stützfunktion von S auf die obige Rückkehrkante beziehen und die Formel (3) auf die Gegenpunkte anwenden, erhalten wir die Bedingung (1)[1]. Die Umkehrung im Abschn. 6 beruht auf dem oben angeführten Satz über Eiflächen mit Mittelpunkt.[2][3]

1. Es sollen $\boldsymbol{n}_i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, n;\ \boldsymbol{n}_1 \equiv \mathbf{t},\ \boldsymbol{n}_2 \equiv \boldsymbol{n})$ die Einheitsvektoren des Frenetschen n-Beines und $\varkappa_i(\alpha)$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ die Quotienten der i-ten und ersten Krümmung der Kurve C bezeichnen, so dass die wohlbekannten Frenetschen Formeln für C mit den Ableitungen nach dem Bogen α des sphärischen Tangentenbildes von C leicht aufgeschrieben werden können. Weiter seien $u_2, \ldots, u_n$ die Koordinaten des Punktes $u \in \omega(\alpha) \subset \nu(\alpha)$; folglich $\mathbf{N}(\alpha, u) = \sum_{i=2}^{n} u_i \boldsymbol{n}_i$, also

$$(1,1) \qquad u_2 = \cos\gamma\,,$$

[1]) Sogar auch für $j = 1$; übrigens ist dann (1) eine unmittelbare Folge der Formel vom Weingartenschen Typ (13) aus [3], welche freilich auch in (3) für $j = 1$ enthalten ist.

[2]) Dagegen für $j = 1$ kann man nicht das Verfahren vom Abschn. 6 durchführen.

[3]) Bevor wir zu den Beweisen übergehen, möchten wir eine kurze Bemerkung zu (3) beifügen. Schrumpft die Kurve C auf einen Punkt zusammen, dann ist $\varrho \to 0$ und in (3) bleibt nur die erste Zeile, welche also die j-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungsradien der Fläche mit der auf Ω definierten Stützfunktion H zum Ausdruck bringt. Angenommen, sie sei eine Eifläche E. Dan liefert (3) eine Relation für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungsradien von S, von E und vom Normalschnitt der in derselben Richtung den Flächen S und E umschriebenen kongruenten Zylinderflächen. Ins Einzelne des so angedeuteten Zusammenhangs zwischen der Eifläche E und der Enveloppe S werden wir hier aber nicht näher eingehen.

und die Parameterdarstellung der $(n-1)$-dimensionalen Stützebene der Zylinderfläche $Z(\alpha)$ ist[4])

$$(1,2) \qquad [\mathbf{y} - \mathbf{x}(\alpha)] \sum_{i=2}^{n} u_i \, \mathbf{n}_i(\alpha) = H(\alpha, u)\,,$$

wo natürlich

$$(1,3) \qquad \sum_{i=2}^{n} u_i^2 = 1\,.$$

Die Differentiation von (1,2) und (1,3) ergibt

$$(1,4) \qquad [\mathbf{y} - \mathbf{x}] \,.\, \sum_{i=2}^{n} u_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}_i}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0\,,$$

$$(1,5) \qquad [\mathbf{y} - \mathbf{x}] \,.\, \mathbf{n}_i - \frac{\partial H}{\partial u_i} = \mu u_i \quad (i = 2, \ldots, n)$$

mit $\mu = \mu(\alpha, u)$. Wegen der Homogenität der Stützfunktion $H(\alpha, u)$ in bezug auf $u_2, \ldots, u_n$ erhalten wir aus (1,2), (1,3) und (1,5), dass

$$(1,6) \qquad \mu = 0\,.$$

Infolgedessen folgt aus (1,3) und (1,4), indem wir die Ableitungen von $\mathbf{n}_i$ in (1,4) nach den obenerwähnten Frenetschen Formeln berechnen, dass

$$(1,7) \qquad u_2[\mathbf{y} - \mathbf{x}] \,.\, \mathbf{t} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} - u_3 \varkappa_2 \frac{\partial H}{\partial u_2} + \sum_{i=3}^{n-1} (u_{i-1}\varkappa_{i-1} - u_{i+1}\varkappa_i) \frac{\partial H}{\partial u_i} + u_{n-1}\varkappa_{n-1} \frac{\partial H}{\partial u_n}\,.$$

Zufolge (1,1) existiert also der Grenzwert

$$(1,8) \qquad \lim_{\gamma \to \pm\pi/2} \frac{1}{\cos \gamma} \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \alpha} - u_3 \varkappa_2 \frac{\partial H}{\partial u_2} + \sum_{i=3}^{n-1} (u_{i-1}\varkappa_{i-1} - u_{i+1}\varkappa_i) \frac{\partial H}{\partial u_i} + u_{n-1}\varkappa_{n-1} \frac{\partial H}{\partial u_n} \right\}.$$

Da die Vektoren $\mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_n$ und die in [3], Abschn. 1 benutzten Vektoren $\mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$, $\mathbf{N}$ zum Tangentenvektor $\mathbf{t}$ von C orthogonal sind, zeigt der Vergleich von (1,7) mit (1,15) aus [3], dass die erste kovariante Ableitung $H_1(\alpha, u)$ für $\cos \gamma \neq 0$ der durch $\cos \gamma$ dividierten rechten Seite in (1,7) und für $\cos \gamma = 0$ dem Grenzwert

[4]) Betreffs $\omega(\alpha)$, $\nu(\alpha)$, $\mathbf{N}$-(α, u), $\cos \gamma(\alpha, u)$, $Z(\alpha)$ und $H(\alpha, u)$ siehe den Teil A der Einleitung in [3]; zu (1,2) vergleiche (1,14) in [3].

in (1,8) gleich ist. Benutzen wir noch (1,5) mit (1,6), so erhalten wir diese Parameterdarstellung der Enveloppe S

$$(1,9)\qquad \mathbf{y}(\alpha, u) = \mathbf{x}(\alpha) + H_1(\alpha, u)\, \mathbf{t}(\alpha) + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial H(\alpha, u)}{\partial u_i}\, \mathbf{n}_i(\alpha)\,.$$

2. Die Achsensymmetrie der Zylinderfläche $Z(\alpha)$ ist gleichbedeutend mit dem Vorhandensein des Mittelpunktes der Eifläche $F(\alpha) = Z(\alpha) \cap \nu(\alpha)$, was für alle $\alpha \in \in \langle 0, a)$ dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$(2,1)\qquad H(\alpha, -u) = H(\alpha, u) - \sum_{i=2}^{n} u_i\, g_i(\alpha)\,,$$

wo $g_i(\alpha)$ gewisse periodische Funktionen mit der Periode a sind.

Indem wir die im vorigen Abschnitt bestimmte kovariante Ableitung H_1 in den Gegenpunkten $\mathbf{y}(\alpha, u)$ und $\mathbf{y}(\alpha, -u)$ von S aufschreiben, dann addieren und zum Schluss (2,1) benutzen, so erhalten wir (mit $(\ )' = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\alpha$), dass

$$(2,2)\qquad u_2[H_1(\alpha, u) + H_1(\alpha, -u)] = (\varkappa_2 g_3 - g_2')\, u_2 + \\ + \sum_{i=3}^{n-1} (\varkappa_i g_{i+1} - \varkappa_{i-1} g_{i-1} - g_i')\, u_i - (\varkappa_{n-1} g_{n-1} + g_n')\, u_n\,.$$

Also ist notwendig

$$(2,3)\qquad g_i' = \varkappa_i g_{i+1} - \varkappa_{i-1} g_{i-1} \quad (i = 3, \ldots, n-1)\,, \quad g_n' = -\varkappa_{n-1} g_{n-1}\,.$$

Die Achse der Zylinderfläche $Z(\alpha)$ hat zufolge (2,1) die Parameterdarstellung $\mathbf{z} = \mathbf{x}(\alpha) + \mu\, \mathbf{t}(\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} g_i(\alpha)\, \mathbf{n}_i(\alpha)$ mit $\mu \in (-\infty, \infty)$. Für ihren Punkt

$$(2,4)\qquad \mathbf{z}(\alpha) = \mathbf{x} - \tfrac{1}{2}(g_2' - \varkappa_2 g_3)\, \mathbf{t} + \tfrac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} g_i \mathbf{n}_i$$

gilt nach (2,3)

$$(2,5)\qquad \mathbf{z}'(\alpha) = [\varrho - \tfrac{1}{2} g_2 - \tfrac{1}{2}(g_2' - \varkappa_2 g_3)']\, \mathbf{t}\,.$$

Nach (1,9) ist

$$\tfrac{1}{2}[\mathbf{y}(\alpha, u) + \mathbf{y}(\alpha, -u)] = \mathbf{x}(\alpha) + \tfrac{1}{2}[H_1(\alpha, u) + H_1(\alpha, -u)]\, \mathbf{t}(\alpha) + \\ + \tfrac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\partial H(\alpha, u)}{\partial u_i} + \frac{\partial H(\alpha, -u)}{\partial(-u_i)} \right] \mathbf{n}_i(\alpha)\,;$$

daraus und aus (2,1)–(2,4) folgt leicht, dass

$$(2,6)\qquad \mathbf{z}(\alpha) = \tfrac{1}{2}[\mathbf{y}(\alpha, u) + \mathbf{y}(\alpha, -u)]\,.$$

Folglich ergibt sich aus (1,1) in [3], aus (1,3) in [4] und aus (2,5), dass

$$\omega^\lambda(\alpha, -u) = \omega^\lambda(\alpha, u) \quad (\lambda = 2, \ldots, n-1)\,, \tag{2,7}$$

$$\mathrm{d}[\mathbf{y}(\alpha, u) + \mathbf{y}(\alpha, -u)] = [\omega^1(\alpha, u) + \omega^1(\alpha, -u)]\, \mathbf{t}(\alpha)\,. \tag{2,8}$$

Nach (1,7) in [3] ist in der Richtung $\omega^\lambda = 0$

$$\omega^1(\alpha, \pm u) = f(\alpha, \pm u)\, \mathrm{d}\alpha\,, \tag{2,9}$$

wo $f \pm 0$ auf der ganzen Enveloppe S ist (s. (1,8) in [3]). Deshalb folgt aus (2,6), (2,8) und (2,9), dass der Skalarkoeffizient rechts in (2,5) stets von Null verschieden ist. Das bedeutet, dass der Punkt (2,4) für $\alpha \in \langle 0, a)$ eine singularitätenfreie Kurve erzeugt, welche also offensichtlich alle Voraussetzungen über die Grundkurve C (s. Anfang des Abschn. A in [3]) erfüllt.

Diese Kurve kann man für eine neue Grundkurve von S wählen (vgl. Abschn. B in [3]) und dadurch das erreichen, dass die Stützfunktion von S in den Gegenpunkten denselben Wert besitzt. Auf anderen Worten, man kann annehmen, dass statt (2,1)

$$H(\alpha, -u) = H(\alpha, u)\,. \tag{2,10}$$

gilt.

3. Es seien $a_1, \ldots, a_m$ $(m > 1)$ beliebige Zahlen. Die Ableitung der Funktion $\{a_1 + x, \ldots, a_i + x\}$, $1 \leqq i \leqq m$, ist – bis auf einen numerischen Faktor – offensichtlich $\{a_1 + x, \ldots, a_{i-1} + x\}$. Daraus ergibt sich leicht, dass

$$\{a_1 + x, \ldots, a_i + x\} = \sum_{w=0}^{i} A_{iw} \,.\, x^w \,.\, \{a_1 \ldots a_{i-w}\}\,, \tag{3,1}$$

wo die numerischen Koeffizienten aus (3,1) für $a_1 = \ldots = a_m$ sofort folgen:

$$A_{iw} = \binom{m - i + w}{w}. \tag{3,2}$$

Nach (3,1) mit (3,2) kann man $\{R_1 - H, \ldots, R_j - H\}$ bzw. $\{\mathcal{R}_1 - H, \ldots, \mathcal{R}_{j-1} - H\}$ auf Grund von $\{R_1\}, \ldots, \{R_1 \ldots R_j\}$ bzw. $\{\mathcal{R}_1\}, \ldots, \{\mathcal{R}_1 \ldots \mathcal{R}_{j-1}\}$ ausdrücken und das nachfolgende Einsetzen in (2) liefert folgende Beziehungen

$$\begin{gathered} \sum_{v=0}^{j} (-1)^v \binom{n - j + v - 1}{v} H^v\{R_1 \ldots R_{j-v}\} = \Delta_{j+1}(H) - \\ - \frac{\varrho}{\cos\gamma} \sum_{v=0}^{j-1} (-1)^v \binom{n - j + v - 1}{v} H^v\{\mathcal{R}_1 \ldots \mathcal{R}_{j-v-1}\} \\ (j = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \end{gathered} \tag{3,3}$$

Dies ist ein System von $n-1$ linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannten $\{R_1\}, \ldots, \{R_1 \ldots R_{n-1}\}$. In der Systemmatrix stehen in der Hauptdiagonale nur die Einsen und ober dieser Diagonale sind Nullen. Folglich hat das System eine einzige Lösung. Ihr Auffinden ist eine technische Angelegenheit, welche zu (3) führt. Wir verzichten da auf die Herleitung von (3) und werden nur verifizieren, dass (3) in der Tat eine Lösung des betrachteten Systems ist.

4. Das Einsetzen aus (3) in (3,3) liefert sofort das System

(4,1)
$$\sum_{v=0}^{j} (-1)^v \binom{n-j+v-1}{v} H^v \sum_{s=0}^{j-v} \binom{n-j+v+s-1}{s} H^s \,.\, \Delta_{j-v-s+1}(H) =$$
$$= \Delta_{j+1}(H) \quad (j = 1, \ldots, n-1)\,,$$

dessen Gültigkeit also zu bestätigen ist.

Die linke Seite in (4,1) kann man durch die Zusammenfassung der Glieder mit demselben Differentialoperator folgendermassen umformen

(4,2)
$$\Delta_{j+1}(H) + \sum_{\lambda=1}^{j} \Delta_\lambda(H) \,.\, H^{j-\lambda+1} \,.$$
$$.\sum_{\mu=0}^{j-\lambda+1} (-1)^\mu \binom{n-j+\mu-1}{\mu} \binom{n-\lambda}{j-\lambda-\mu+1}.$$

Wir setzen $l = j - \lambda + 1$, $k = n - j - 1$; die Summe in der zweiten Zeile von (4,2) nimmt dann die Gestalt

(4,3)
$$\sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \binom{k+\mu}{\mu} \binom{k+l}{l-\mu}$$

an. Das Produkt der kombinatorischen Zahlen in (4,3) ist aber auch $\binom{k+l}{l}\binom{l}{\mu}$. Foglich ist (4,3) gleich der $\binom{k+l}{l}$-maligen Summe $\sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \binom{l}{\mu}$ welche aber offensichtlich zu Null wird.

Damit ist gezeigt, dass in (4,2) nur $\Delta_{j+1}(H)$ bleibt, was tatsächlich die Gültigkeit des Systems (4,1) und folglich auch die Richtigkeit der Lösung (3) von (3,3) bedeutet.

5. Angenommen, jede Zylinderfläche $Z(\alpha)$ sei achsensymmetrisch, d. h. für die Hauptkrümmungsradien des Normalschnittes $F(\alpha)$ von $Z(\alpha)$ gilt

(5,1)
$$\{\mathscr{R}_1(\alpha, -u) \ldots \mathscr{R}_{j-1}(\alpha, -u)\} = \{\mathscr{R}_1(\alpha, u) \ldots \mathscr{R}_{j-1}(\alpha, u)\}$$
$$(j = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Nach Abschn. 2 kann man die Kurve C so wählen, dass in den Gegenpunkten von S für die Stützfunktion $H(\alpha, u)$ von S die Beziehung (2,10) besteht. Nach der im Abschn. D von [3] angegebenen Definition der Operatoren $D_r(H)$ ist wegen (1,4) in [4] (Δ_r bezieht sich auf das sphärische Bild von S, siehe dazu auch (6,1) in [3]) und zufolge (2,10)

$$\Delta_r(H(\alpha, -u)) = \Delta_r(H(\alpha, u)) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{5,2}$$

und schon in [3], Abschn. 11 haben wir festgestellt, dass

$$\cos \gamma(\alpha, -u) = -\cos \gamma(\alpha, u)\,. \tag{5,3}$$

Schreibt man jetzt die Beziehung (3) in beiden Gegenpunkten und subtrahiert man von einer so erhaltenen Gleichung die andere, so bekommt man mit Rücksicht auf (5,1)–(5,3) sofort (1), und zwar für $j = 1, 2, \ldots, n - 1$.

6. Angenommen, es gelte (1) für $j = 2, \ldots, n - 1$. Vertauscht man die Gegenpunkte, d. h. schreibt man $-u$ stalt u, so erhält man aus (1) eine andere Gleichung und ihre Addition zu (1) liefert nach (5,3) sogleich

$$\{\mathcal{R}_1(\alpha, -u) \ldots \mathcal{R}_{j-1}(\alpha, -u)\} = \{\mathcal{R}_1(\alpha, u) \ldots \mathcal{R}_{j-1}(\alpha, u)\} \quad \text{für} \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

Daraus ergibt sich nach dem anfangs angeführten Satz über die Eiflächen, dass der Normalschnitt der Zylinderfläche $Z(\alpha)$ für jedes α eine Eifläche mit Mittelpunkt ist, w. z. b. w.

Literatur

[1] *А. Д. Александров:* К теории смешанных объемов выпуклых тел. Часть IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы. Матем. сборник *3* (*45*) (1938), 227—251.

[2] *H. Busemann:* Convex Surfaces. New York—London 1958. [Выпуклые поверхности. Москва 1964.]

[3] *Z. Nádeník:* Über Geometrie im Grossen der Enveloppen von konvexen Zylinderflächen. Czech. Math. J. *19* (*94*), 299—317.

[4] *Z. Nádeník:* Über die Enveloppe von Zylinderflächen konstanter Breite. Czech. Math. J. *19* (*94*), (1969), 349—355.

Anschrifts des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).