Jindřich Nečas

# Les équations elliptiques non linéaires

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 19 (1969), No. 2, 252–274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100893

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

# LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES[1])

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 13. novembre 1967)

**Introduction.** Le but de cette conférence est d'introduire le lecteur à la théorie des équations elliptiques non linéaires d'ordre arbitraire. Nous avons choisi le point de vue: les solutions faibles, la méthode variationnelle et la méthode des opérateurs monotons. C'est à la méthode variationnelle, à laquelle est consacré le livre de CH. B. MOOREY [12] et une partie du livre de S. G. MICHLIN [10], où on trouve une large liste avec la bibliographie. Citons encore quelques travaux, étroitement liés avec le procédé ci-dessous: F. E. BROWDER [1], [2], [3], M. M. VAJNBERG [22], M. M. VAJNBERG, R. I. KAČUROVSKIJ [23], A. LANGENBACH [7], J. NEČAS, Z. PORACKÁ [20].

La méthode des opérateurs monotons est traitée par G. J. MINTY dans [11], [11 bis] et dévelopée par F. E. Browder dans une série des travaux dont l'union se trouve dans [1]; un résultat analogue qui sera notre point de départ est dans le travail de J. LERAY, J. L. LIONS [8]. Cf. aussi le travail de P. HARTMAN, G. STAMPACCHIA [5].

Les questions sur la régularité de la solution faible seront aussi considérées. Il reste à résoudre encore des problèmes fondamentaux, cf. plus loin. Citons le livre de O. A. LADYŽENSKAJA, N. N. URALCEVA [6], le livre de CH. B. MORREY [12], le travail fondamental de E. DE GIORGI [4]; un aperçu sur la situation actuelle dans cette question est contenu dans la conférence de J. Nečas [14].

Qu'on suppose dans ce cours, c'est que le lecteur est familiarisé avec la théorie des espaces de Sobolev. Nous citons des résultats seulement.

On fait la pluspart des démonstration. Les démonstrations, laissées à coté sont triviales, sauf les lemmes 5.1 et 6.3. La théorie, dont le résultat est, entre outre, le lemme 5.1, est exposé aux livres déjà cités [6], [12] ou aux travaux de G. Stampacchia [21], [21 bis]. Le lemme 6.3 est démontré au travail de l'auteur [16], cf. aussi [15]. Pour simplifier l'exposé, on ne s'occuppe pas des énoncés découlant de la théorie des fonctions réelles. L'exemple typique: les opérateurs de Němyckij.

On désigne la pluspart des constantes positives par le même symbole $c$. Si nécéssaire, on utilise des indices ou autres symboles.

[1]) Cours d'été sur les équations aux dérivées partielles, Tchécoslovaquie 1967.

## 1. DEFINITION DU PROBLÈME AUX LIMITES

Soit $\Omega$ un domaine borné de l'espace euclidien $E_N$, à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. On désigne par $\mathscr{E}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, indéfiniment continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$ et par $\mathscr{D}(\Omega)$ le sousespace de $\mathscr{E}(\overline{\Omega})$ des fonctions à support compact. La notation usuelle $D^i = \partial^{|i|}/\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}$ est utilisée. On introduit comme d'habitude l'espace $W_m^{(k)}(\Omega)$, avec la norme

$$\|u\|_{W_m^{(k)}} \equiv \|u\|_{k,m} = \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |D^i u|^m \, dx\right)^{1/m}.$$

On désigne encore par $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. On désigne encore par $C^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions $k$-fois continûment différentiables dans $\Omega$ (par $C^{(k)}(\overline{\Omega}) \dots$ dans $\overline{\Omega}$).

On a, cf. par exemple J. Nečas [17]: $\mathscr{E}(\overline{\Omega}) = W_m^{(k)}(\Omega)$, $1 \leqq m < \infty$. Si $km < N$, $W_m^{(k)} \subset L_q$ algébriquement et topologiquement avec $1/q = 1/m - k/N$. Pour $1/q > 1/m - k/N$ la transformation identique de $W_m^{(k)}$ dans $L_q$ est compacte. Si $km = N$ l'assertion est vrai pour chaque $1/q > 0$ est la transformation identique est compacte. Si $km > N$, $W_m^{(k)} \subset C^{(0)}(\overline{\Omega})$ algébriquement et topologiquement et la transformation identique est compacte. Ce sont les théorèmes d'immersion de Sobolev.

On définit $a_i(x, \zeta_j)$ les fonctions réelles, pour $x \in \Omega$, $-\infty < \zeta_j < \infty$, $|j| \leqq k$, $j = (j_1, \dots, j_N)$ étant un multiindex, continues pour presque tous $x$ de $\Omega$ en $\zeta_j$, mesurables en $x$ pour $\zeta_j$ fixes. On suppose

$$(1.1) \qquad |a_i(x, \zeta_j)| \leqq c\big(1 + \sum_{|j| \leqq k} |\zeta_j|^{m-1}\big), \quad 1 < m < \infty,$$

ou on affaiblira la condition (1.1): on définit

$$1/q_{|i|} = 1/m - (k - |i|)/N$$

si $(k - |i|)\, m < N$, $1/q_{|i|} > 0$ si $(k - |i|)\, m = N$, $1/q_{|i|} = 0$ si $(k - |i|)\, m > N$. Pour $1 \leqq q \leqq \infty$, soit $q' = q/(q-1)$ et posons $\varkappa_{|i|,|j|} = q_{|j|}/q'_{|i|}$. Soit $c(s)$ une fonction continue dans $\langle 0, \infty)$, non-négative. Au lieu de (1.1) on peut supposer

$$(1.2) \qquad |a_i(x, \zeta_j)| \leqq c\big(\sum_{|j| < k - N/m} |\zeta_j|\big)\big(g_i(x) + \sum_{k - N/m \leqq |j| \leqq k} |\zeta_j|^{\varkappa_{|i|,|j|}}\big),$$

où $g_i \in L_{q'_{|i|}}(\Omega)$, $g_i(x) \geqq 0$.

Nous avons (pour un théorème et la démonstration analoque, cf. M. M. Vajnberg [22]):

**Lemme 1.1.** *L'opérateur $a_i(x, D^j u)$ résulte continue de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_{q'_{|i|}}(\Omega)$.*

On se donne $\mathfrak{V}$, un ensemble linéaire, tel que $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathfrak{V} \subset \mathscr{E}(\overline{\Omega})$ et désigonns par $V = \overline{\mathfrak{V}}$, la fermeture dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Soit encore $Q$ un espace de Banach, contenant

$\mathscr{D}(\Omega)$, avec $\mathscr{D}(\Omega)$ dense. Supposons que $V \subset Q$ algébriquement et topologiquement. On se donne encore $u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$ et une fonctionnelle $g \in V'$ (espace dual), telle que $gv = 0$ pour $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ et encore $f \in Q'$.

Désignons $fv = \langle v, f \rangle_\Omega$, $gv = \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$.

Le problème aux limites: on cherche $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$ de sorte que

$$u - u_0 \in V, \tag{1.3}$$

$$\forall v \in V: \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i v a_i(x, D^j u) \, dx = \langle v, f \rangle_\Omega + \langle v, g \rangle_{\partial\Omega} \, . \tag{1.4}$$

Formellent, on obtient une équation non-linéaire dans $\Omega : \sum_{|i| \leqq k} (-1)^{|i|} \, .$ $. \, D^i(a_i(x, D^j u)) = f(x)$ dans la forme divergentielle.

**Exemple 1.1.** Prenons $k = 1$, $m = 2$; si $i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 sur $l$-ème place, définissons: $a_i(x, D^j u) = \partial u / \partial x_l$. Puis, soit $a_{(0,\ldots 0)}(x, D^j u) = u|u|^\lambda$ avec $0 \leqq \lambda < \infty$ et quelconque pour $N = 2$ et avec $\lambda = 4/(N - 2)$ pour $N \geqq 3$. Posons $\mathfrak{B} = \mathscr{D}(\Omega)$, $Q = L_p(\Omega)$ avec $1 < p$, quelconque pour $N = 2$ et avec $p = 2N/(N + 2)$ pour $N \geqq 3$. Soit $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Notre problème aux limites correspond formellement (on utilise la formule de Green) à la solution de l'équation:

$$-\Delta u + u|u|^\lambda = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \, , \tag{1.5}$$

à la condition aux limites

$$u = u_0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \, . \tag{1.6}$$

**Exemple 1.2.** On pose dans l'exemple précédent $\mathfrak{B} = \mathscr{E}(\bar{\Omega})$; alors $V = W_2^{(1)}(\Omega)$. Soit $\langle v, g \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} vg \, dS$ avec $g \in L_q(\partial\Omega)$, $1 \leqq q < \infty$ et $q$ est arbitraire pour $N = 2$, d'autre part $q = 2(N - 1)/N$ pour $N \geqq 3$. Le problème aux limites correspond formellement à la solution de l'équation (1.5) et à la condition aux limites:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \, , \tag{1.7}$$

$\partial u / \partial n$ étant la dérivée selon na normale extérieure.

**Exemple 1.3.** Soit $k = 1$, $m = 2l$, $l$ un entier $\geqq 0$ et posons $a_i(x, D^j u) = (\partial u / \partial x_n)^{m-1}$ (pour $i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ 1 étant sur $i$-ème place.

Puis $a_{(0,\ldots 0)}(x, D^j u) = u$, $\mathfrak{B} = \mathscr{E}(\bar{\Omega})$, alors $V = W_m^{(1)}(\Omega)$. $\langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$ soit de l'exemple précédent avec $q = N(m - 1)/(N - 1) \, m$ pour $1 < m < N$, $q > 1$ pour $m = N$ et

$q = 1$ pour $m > N$. Le problème aux limites correspond à la solution de l'équation

$$(1.8) \qquad -(m-1)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{m-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega\,,$$

$$(1.9) \qquad \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{m-1} \nu_n = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,;$$

$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ est le vecteur de la normale extérieure.

**Exemple 1.4.** On cherche minimum de la fonctionnelle $\int_\Omega \big(1 + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2\big)^{m/2} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega uf dx$, avec $f \in L_{m/(m-1)}(\Omega)$, $1 < m < \infty$, dans la classe des fonctions $u_0 + v$, $u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$, fixé, $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega) \equiv V$. L'équation d'Euler, dans la forme faible, c'est (1.4) avec

$$\langle v, f\rangle_\Omega = \int_\Omega vf \,\mathrm{d}x\,, \quad \langle v, g\rangle_{\partial\Omega} \equiv 0$$

et avec

$$a_i(x, D^j u) = m\big(1 + \sum_{|j|=k} (D^j u)^2\big)^{(m-2)/2} D^i u\,.$$

## 2. MÉTHODE VARIATIONNELLE

Pour simplifier l'ecriture, on va désigner la dualité entre $B$, $B'$, un espace de Banach et son adjoint par $(v, f)$, $v \in B$, $f \in B'$. On définit l'opérateur $T$ de $V \to V'$ par

$$(v, Tu) = \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i v a_i(x, D^j u_0 + D^j u)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nous pouvons exprimer les définitions ci-dessous à l'aide de l'opérateur $T$. D'habitude, nous utiliserons la forme explicite.

Pour la théorie variationnelle abstraite, il nous faudra seulement quelques énoncés faciles: si $\Phi(v)$ est une fonctionnelle sur un Banach, on désigne par

$$D\Phi(v, \tilde{v}) = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(v + t\tilde{v}) - \Phi(v)}{t}\,,$$

la différentielle de Gateaux. On supposera toujorus que $D\Phi(v, .)$ est une fonctionnelle linéaire et continue. On sait d'après le théorème de Gantmacher, Šmuljan, Eberlein qu'un Banach $B$ est réflexif si et seulement si la boule unité, fermée, est faiblement compacte. On démontre immédiatement: si pour chaque $v_1, v_2 \in B$, $\Phi(v_2) - \Phi(v_1) \geqq D\Phi(v_1, v_2 - v_1)$, alors $\Phi(v)$ est continue faiblement, inférieurement (cela veut dire: $v_n \to v$ (convergence faible) $\Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \Phi(v_n) \geqq \Phi(v)$).

On a aussi évidemment: si $\Phi(v_0) = \min_{v \in B} \Phi(v)$, alors $D\Phi(v_0, v) = 0$ (point critique). Une fonctionnelle faiblement continue intérieurement, atteint son minimum dans chaque boule fermée.

Revenons aux opérateurs différentielles.

Nous dirons que l'opérateur $T$ est totalement monoton (strictement), si pour chaque $v, w \in V$, $v \neq w$ et $u_0$ de la définition du problème, la condition

$$(2.1) \quad \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(w - v) \left[a_i(x, D^j u_0 + D^j w) - a_i(x, D^j u_0 + D^j v)\right] \mathrm{d}x \geqq 0 \quad (>0)$$

$$\left[(w - v, Tw - Tv) \geqq 0 \, (>0)\right]$$

est satisfaite.

Nous dirons que la condition de la coercitivité faible pour l'opérateur $T$ est satisfaite, si pour chaque $v \in V$ et notre $u_0$, la condition

$$(2.2) \quad \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i v a_i(x, D^j u_0 + D^j v) \, \mathrm{d}x \geqq \lambda(\|v\|_{k,m}) \,, \quad \left[(v, Tv) \geqq \lambda(\|v\|_{k,m})\right] ,$$

où $\lambda(s)/s$ est sommable sur chaque intervalle $(0, R)$, $R > 0$ et si

$$(2.3) \qquad \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s} \, \mathrm{d}s = \infty \,.$$

Désignons encore par $d$, le nombre des indices $|j| \leqq k$.

Nous dirons que la condition de symmetrie pour les fonctions $a_i$ est satisfaite, si presque partout dans $\Omega$:

$$(2.4) \qquad (-1)^{|j|} \int_{Ed} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_j} a_i(x, \zeta_d) \, \mathrm{d}\zeta = (-1)^{|i|} \int_{Ed} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} a_j(x, \zeta_d) \, \mathrm{d}\zeta \,.$$

**Remarque 2.1.** Si

$$(2.5) \qquad \sum_{|i| \leqq k} (\xi_i - \eta_i) \left[a_i(x, \xi_j) - a_i(x, \eta_j)\right] \geqq 0$$

pour $\xi_i, \eta_i$ réelles, la condition (2.1) est valable. Si $a_i$ sont continûment différentiables en $\zeta_j$, la condition

$$(2.6) \qquad \sum_{|i|,|j| \leqq k} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} \xi_i \xi_j \geqq 0$$

entraîne (2.5). La condition

$$(2.7) \qquad \lim_{\|v\|_{k,m} \to \infty} \frac{1}{\|v\|_{k,m}} \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i v a_i(x, D^j u_0 + D^j v) \, \mathrm{d}x = \infty$$

entraîne (2.2), (2.3). La condition

$$\sum_{|i|\leqq k} a_i(x, \zeta_d)\,\zeta_i \geqq c_1 \sum_{|i|\leqq k} |\zeta_i|^m + c_2|\zeta_{(0,\ldots 0)}|^m - c_3$$

avec $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 \geqq 0$ (pour le problème, où $V = \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$, il suffit $c_2 \geqq 0$), avec la condition (1.1), entraînent (2.7).

Si les coefficients sont continûment différentiables en $\zeta_j$ pour presque tout $x$ de $\Omega$, la condition (2,4) équivaut à la condition

$$\frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \zeta_i}. \tag{2.8}$$

Pour réduire le problème aux limites, au problème variationnel, if faut d'abord trouver une fonctionelle de sorte que $D\Phi(v, \tilde{v}) = (\tilde{v}, Tv)$.

**Théorème 2.1.** *Si* (2.4) *est valable, la fonctionelle*

$$\Phi(v) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i v a_i(x, D^j u_0 + tD^j v)\,\mathrm{d}x - \langle v, f\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega} \tag{2.9}$$

*est continue sur $V$, ayant la différentielle de Gateaux au chaque point $v$ de $V$ et*

$$D\Phi(v, \tilde{v}) = \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i\tilde{v} a_i(x, D^j u_0 + D^j v)\,\mathrm{d}x - \langle \tilde{v}, f\rangle_\Omega - \langle \tilde{v}, g\rangle_{\partial\Omega}.$$

Démonstration. Soit $\varkappa = \int_{|\zeta|<1} \exp\left(|\zeta|^2/(|\zeta|^2 - 1)\right) \mathrm{d}\zeta$ et posons pour presque tous $x$ de $\Omega$, $0 < h < 1$:

$$a_{ih}(x, \zeta_j) = \frac{1}{\varkappa h^d} \int_{|\zeta - z| < h} \exp \frac{|\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2 - h^2} \,.\, a_i(x, z)\,\mathrm{d}z\,.$$

On obtient immédiatement que les $a_{ih}(x, \zeta_j)$ satisfont aux conditions (1.2) ou (1.1); l'estimation ne dépend pas de $h$. Pour $h$ fixé, une telle estimation vaut pour les dérivées des $a_{ih}(x, \zeta_j)$ en $\zeta_j$. Définissons à l'aide des $a_{ih}(x, \zeta_j)$, par (2.9) la fonctionnelle $\Phi_h(v)$. Il suit de (2.4) que $\partial a_{ih}/\partial \zeta_j = \partial a_{jh}/\partial \zeta_i$; si nous utilisons cela, nous obtenons sans difficulté pour $v \in \mathfrak{B}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \Phi(v + \tau\tilde{v}) = \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i\tilde{v} a_{ih}(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde{v})\,\mathrm{d}x - \langle \tilde{v}, f\rangle_\Omega - \langle \tilde{v}, g\rangle_{\partial\Omega}.$$

Il en suit que pour $\tilde{v} \in \mathfrak{B}$

$$\frac{\Phi_h(v + \tau\tilde{v}) - \Phi_h(v)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}\tau \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i\tilde{v} a_{ih}(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde{v})\,\mathrm{d}x - \langle \tilde{v}, f\rangle_\Omega - \langle \tilde{v}, g\rangle_{\partial\Omega}, \tag{2.11}$$

d'où (2.11) pour $v \in V$. On peut faire tendre $h \to 0$ dans (2.11) et on obtient par là (2.11) pour $a_i(x, \zeta_j)$.

**Théorème 2.2.** *Les conditions* (2.1)–(2.4) *soient satisfaites. Alors il existe un minimum de la fonctionnelle* $\Phi(v)$ *de* (2.9) *dans* $v$, *soit* $v$. *La fonction* $u_0 + v$ *est une solution du problème. Si la condition de la monotonie stricte est satisfaite, la solution est unique.*

Démonstration. Il suit facilement de (2.1) l'inégalité: $\Phi(v_2) - \Phi(v_1) \geqq \geqq D\Phi(v_1, v_2 - v_1)$ alors la continuité faible inférieurement de la fonctionnelle est satisfaite. On a

$$\Phi(v) \geqq \int_0^1 \lambda(t\|v\|_{k,m}) \frac{\mathrm{d}t}{t} - c\|v\|_{k,m} = \|v\|_{k,m} \left( \frac{1}{\|v\|_{k,m}} \int_0^{\|v\|_{k,m}} \frac{\lambda(s)}{s} \, \mathrm{d}s - c \right),$$

d'où

$$\lim_{\|v\|_{k,m} \to \infty} \Phi(v) = \infty .$$

Il en suit l'existence de minimum, soit $v$; c'est le point critique. L'unicité est claire

Écrivons les fonctions $a_i(x, \zeta_j)$ sous la forme $a_i(x, \zeta_\alpha, \zeta_\beta)$, où $|\alpha| = k$, $|\beta| < k$.

Nous dirons que la condition de la monotonie de l'opérateur $T$ de sa partie principale est satisfaite, si pour $v, w, \omega \in V$ et notre $u_0$, l'inégalité

$$(2.12) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i(w - v) \left[ a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha w, D^\beta u_0 + D^\beta \omega) - \right.$$
$$\left. - a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta \omega) \right] \mathrm{d}x \geqq 0$$

a lieu. Supposons encore qu'il suit de $v_n \rightharpoonup v$

$$(2.13) \qquad \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i(v - v_n) \left[ a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta v_n) - \right. \right.$$
$$- a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta v) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i(v - v_n) \left[ a_i(x, D^j u_0 + D^j v_n) - \right.$$
$$\left. \left. - a_i(x, D^j u_0 + D^j v) \right] \mathrm{d}x \right\} = 0 .$$

**Théorème 2.3.** *La condition* (2.1) *du théorème* 2.2 *soit remplacé par* (2.12), (2.13). *Alors il existe un minimum de la fontionnelle* $\Phi(v)$ (2.9).

Démonstration. Il suffit de démontrer la continuité faible inférieurement de $\Phi(v)$. Soit $v_n \rightharpoonup v$. On a

$$\Phi(v_n) - \Phi(v) - D\Phi(v, v_n - v) =$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i(v_n - v) \left[ a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v + tD^\alpha(v_n - v), \right.$$

$$D^\beta u_0 + D^\beta v + tD^\beta(v_n - v)) - a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta v +$$

$$+ tD^\beta(v_n - v))] \,dx + \int_0^1 dt \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i(v_n - v)\,[a_i(x, D^\alpha u_0 +$$

$$+ D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta v + tD^\beta(v_n - v)) - a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta v)] \,dx +$$

$$+ \int_0^1 dt \int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i(v_n - v)\,[a_i(x, D^j u_0 + D^j v + tD^j(v - v_n)) -$$

$$- a_i(x, D^j u_0 + D^j v)] \,dx \equiv A_n + B_n + C_n\,.$$

On a lim $D\Phi(v, v_n - v) = 0$ et d'après les hypothèses (2.13)

$$\lim_{n\to\infty} (B_n + C_n) = 0\,.$$

Il suit de (2.12) que $A_n \geqq 0$, d'où

$$\varliminf_{n\to\infty} \Phi(v_n) \geqq \Phi(v)\,,$$

c.q.f.d.

**Remarque 2.2.** La condition

$$\sum_{|i|=k} (\xi_i - \eta_i)\,[a_1(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) - a_i(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta)] \geqq 0 \tag{2.14}$$

ou si $a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta)$ sont continûment différentiables en $\xi_\alpha$, la condition

$$\sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta)\,\xi_i\xi_j \geqq 0 \tag{2.15}$$

garantissent (2.12). Pour avoir (2.13), il suffit que dans (1.2) pour $|i| = k$, $|j| < k$, on remplace $\varkappa_{|i|,|j|}$ par $\varkappa^*_{|i|,|j|}$, avec $\varkappa^*_{|i|,|j|} < \varkappa_{|i|,|j|}$ et pour $|i| < k$ la même chose et encore pour $k - N/m \leqq |i| < k$, $g_{|i|} \in L_{q'^*_{|i|}}(\Omega)$ avec $q'^*_{|i|} > q'_{|i|}$.

Remarquons que dans les théorèmes analogues, basés sur la théorie des opérateurs monotons, on suppose (2.14) $> 0$ pour $\xi \neq \eta$ et une condition de croissance pour $a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta)$, $|i| = k$ en $\xi_\alpha$, cf. plus loin et J. Leray, J. L. Lions [8], F. E. Browder [1].

Pour les méthodes approximatives, nous nous tournerons à la considération classique des suites minimisantes, à savoir des suites, pour lesquelles, $\lim_{n\to\infty} \Phi(v_n) = \min_{v\in V} \Phi(v)$.

Nous démontrons immédiatement par absurde:

**Théorème 2.4.** *Supposons (2.1)–(2.4) et la monotonie stricte. Soit $v_n$ une suite minimisante. Alors $v_n \rightharpoonup v$.*

Pour obtenir la convergence forte, il suffit de supposer au lieu de (2.1): pour $v, w \in V$, $u_0$ en question, on a

$$(2.16) \qquad \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(w - v) \left[a_i(x, D^j u_0 + D^j w) - a_i(x, D^j u_0 + D^j v)\right] \mathrm{d}x \geqq \geqq \lambda\left(\|w - v\|_{k,m}\right),$$

où $\lambda(s)/s$ est sommable sur chaque intervalle $(0, R)$, $R > 0$ et si $\int_0^R (\lambda(s)/s)\,\mathrm{d}s > 0$ pour $R > 0$.

**Théorème 2.5.** *On suppose* (2.1)–(2.4), *la monotonie stricte et* (2.16). *Alors si $v_n$ est une suite minimisante et $v$ la solution du problème, alors $v_n \to v$.*

Démonstration. Étant $\Phi(v_n) \to \Phi(v)$, on a d'après le théorème 2.4: $v_n \rightharpoonup v$. Maintenant

$$(2.17) \qquad \Phi(v_n) - \Phi(v) - D\Phi(v, v_n - v) =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(v_n - v)\, a_i(x, D^j u_0 + D^j v + t(D^j v_n - D^j v))\, \mathrm{d}x -$$

$$- \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(v_n - v)$$

$$a_i(x, D^j u_0 + D^j u)\, \mathrm{d}x \geqq \int_0^{\|v_n - v\|_{k,m}} \frac{\lambda(s)}{s}\, \mathrm{d}s\,,$$

d'où le résultat: si $\|v_n - v\|_{k,m}$ ne converge pas vers zéro, on en peut tirer une sous-suite convergeante, soit vers $\varepsilon > 0$, ce qui n'est pas en vertu de (2.15) possible.

## 3. APPLICATION DE LA THÉORIE DES OPÉRATEURS MONOTONS

Prémièrement, voilà un théorème de J. Leray, J. L. Lions, cf. [8]. Il n'est pas substentiel que l'espace de Banach $V$ que nous allons considérer est réel.

**Lemme 3.1.** *Soit $V$ un Banach réel, réflexif, $A(v)$ un opérateur borné de $V$ dans $V'$, continue de tout sousespace de $V$ de dimension finie dans $V'$ faible. On suppose la coercitivité*

$$(3.1) \qquad \lim_{\|v\| \to \infty} \frac{(v, A(v))}{\|v\|} = \infty\,.$$

*Alors si une des hypothèses suivantes est satisfaite, l'opérateur $A$ est surjectif.*

*Hypothèse I: $A(v)$ est monoton: $(v - u, A(v) - A(u)) \geqq 0$ pour $v, u \in V$.*

*Hypothèse II*: *Il existe une application bornée de* $V \times V$ *dans* $V'$, *soit* $A(v, u)$, *telle que* $A(u, u) = A(u)$ *pour* $u \in V$ *et vérifie des conditions*:

(i) $\forall v \in V$, *l'application* $v \to A(v, u)$ *est continue de toute droite de* $V$ *dans* $V'$ *faible* (*hemicontinue*) *et pour* $u, v \in V (u - v, A(u, u) - A(v, u)) \geqq 0$,

(ii) *si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $V$ *et si* $(u_n - u, A(u_n, u_n) - A(u, u_n)) \to 0$, *alors pour* $v \in$ $\in V: A(v, u_n) \rightharpoonup A(v, u)$ *dans* $V'$,

(iii) *si* $u_n \rightharpoonup u$ *et* $A(v, u_n) \rightharpoonup v'$ *dans* $V'$, *alors* $(u_n, A(v, u_n)) \to (u, v')$.

Nous dirons que pour l'opérateur elliptique $T$, la condition de coercitivité est satisfaite, si l'on a (2.7).

Il suit immédiatement du lemme 3.1, hypothèse I:

**Théorème 3.1.** *Les conditions* (2.1), (2.7) *soient satisfaites. Alors il existe une solution du problème aux limites.*

*Nous obtenons aussi du lemme* 3.1 *immédiatement*:

**Théorème 3.2.** *Supposons que* $a_i(x, \zeta_j)$ *pour* $|i| < k$, *ne dépend pas de* $\zeta_j$, $|j| = k$ *et la condition* (1.2) *avec* $\varkappa^*_{|i|,|j|} < \varkappa_{|i|,|j|}$; *la dernière condition aussi pour* $|i| = k$. *Puis les hypothèses* (2.12), (2.7) *soient satisfaites. Alors, il existe une solution du problème aux limites.*

Démonstration. Posons $(w, A(v, u)) = \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i w a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u) \, dx$. Il suit du lemme 1.1 et de la compacité d'immersion en question, que l'application $A(v, v)$ est bornée et que $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow A(v, u_n) \to A(v, u)$ dans $V'$, d'où (ii), (iii); (i) suit de (2.12), c.q.f.d.

Au cas, où $a_i$ pour $|i| < k$ dépendent de $\zeta_j$, $|j| = k$, ajouterons encore quelques conditions algébriques sur $a_i$, $|i| = k$ (cf. J. Leray, J. L. Lions [7], F. E. Browder [1])

$$\sum_{i=k} a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) \, \xi_i / (|\xi| + |\xi|^{m-1}) \to \infty \tag{3.6}$$

pour $|\xi| \to \infty$, uniformément par rapport aux $\zeta_\beta$,

$$\sum_{|i|=k} [a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) - a_i(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta)] \, (\xi_i - \eta_i) > 0 \tag{3.7}$$

pour $\xi \neq \eta$ presque partout dans $\Omega$.

**Théorème 3.3.** *Supposons que pour* $|i| \leqq k$, $|j| < k$ *la condition* (1.2) *est valable avec* $\varkappa^*_{|i|,|j|} < \varkappa_{|i|,|j|}$, *et pour* $k - N/m \leqq |i| < k$ *que* $g_{|i|} \in L_{q'^*_{|i|}}(\Omega)$ *avec* $q'^*_{|i|} > q'_{|i|}$. *Puis supposons* (2.7) *et* (3.6). *Alors, il existe une solution du problème aux limites.*

Démonstrons d'abord un lemme (voir la même démonstration dans J. Leray, J. L. Lions [8], mais une autre assertion).

**Lemme 3.2.** *Sous les hypothèses sur $a_i$ du théorème 3.3 soit $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$ et posons*

$$f_n(x) = \sum_{|i| \leqq k} [a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha u_n, D^\beta u_0 + D^\beta u_n) -$$
$$- a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha u, D^\beta u_0 + D^\beta u_n)] [D^i u_n - D^i u]$$

*et supposons que $\int_\Omega f_n(x) \, dx \to 0$. Alors il existe une suite partielle, encore notée par $u_n$, telle que*

$$D^i u_n(x) \to D^i u(x) \tag{3.8}$$

*presque partout dans $\Omega$ pour $|i| \leqq k$.*

Démonstration. Il suit de (3.7) que $f_n(x) \geqq 0$, alors, on peut trouver une sous--suite des $f_n$ (qu'on note encore $f_n$), telle que $f_n(x) \to 0$ et $D^\beta u_n(x) \to D^\beta u(x)$, $|\beta| < k$, presque partout dans $\Omega$. Soit $x$ un tel point et encore tel que $g_i(x) < \infty$ (cf. (1.2)). Soit (après un choix) $\lim_{n \to \infty} D^i u_n(x) = \xi_i$, $|i| = k$. Il suit de (1.2) et (3.6) que

$$f_n(x) \geqq \sum_{|i|=k} a_i(x, D^\alpha u_0(x) + D^\alpha u_n(x), D^\beta u_0(x) + D^\beta u_n(x))$$
$$D^i u_n(x) - c(x) (1 + \sum_{|i|=k} |D^i u_n(x)|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |D^i u_n(x)|) ,$$

d'où $|\xi_i| < \infty$. Mais il suit de (3.7) que $\xi_i = D^i u(x)$, d'où l'assertion.

Démonstration du théorème 3.3. Définissons

$$(w, A(v, u)) = \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i w a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u) \, dx +$$
$$+ \int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i w a_i(x, D^j u_0 + D^j u) \, dx .$$

Il suit du lemme 1.1 que $A(u, v)$ est une application bornée, continue; la condition de monotonie suit de (3.7).

Vérification de (ii): si $u_n \rightharpoonup u$ et $(u_n - u, A(u_n, u_n) - A(u, u_n)) \to 0$, ce qui est $\int_\Omega f_n(x) \, dx$ du lemme 3.2, il en suit, après un choix convenable, pour $|i| < k$: $a_i(x, D^j u_0(x) + D^j u_n(x))$ converge presque partout dans $\Omega$ vers $a_i(x, D^j u_0(x) + D^j u(x))$, d'où par le théorème de Jegorov et compte tenu du fait que

$$\varkappa^*_{|i|,|j|} < \varkappa_{|i|,|j|} ,$$

suit que

$$\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i w a_i(x, D^j u_0 + D^j u_n) \, dx \to \int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i w a_i(x, D^j u_0 + D^j u) \, dx . \tag{3.9}$$

Mais de chaque sous-suite de $\{u_n\}$, on peut tierer une autre, telle que (3.9) est valable: il en suit que (3.9) est valable pour la suite originale. D'autre part, il suit de compacité de l'immersion que $a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u_n) \to a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u)$ dans $L_{m'}(\Omega)$, d'où (ii).

Vérification de (iii): soit $u_n \rightharpoonup u$ dans $V$ et $A(v, u_n) \rightharpoonup v'$ dans $V'$. Alors pour $|i| \leqq k$:

$$a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u_n) \to a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u)$$

dans $L_{q'_{|i|}}(\Omega)$. D'autre part, nous avons

$$\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i(u_n - u)\, a_i(x, D^j u_0 + D^j u_n)\, \mathrm{d}x \to 0\,. \tag{3.10}$$

Maintenant

$$\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i u a_i(x, D^j u_0 + D^j u_n)\, \mathrm{d}x =$$

$$= (u, A(v, u_n)) - \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i u a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u_n)\, \mathrm{d}x \to$$

$$\to (u, v') - \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i u a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u)\, \mathrm{d}x\,,$$

alors en vertu de (3.10)

$$\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i u_n a_i(x, D^j u_0 + D^j u_n)\, \mathrm{d}x \to$$

$$\to (u, v') - \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i u a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta u)\, \mathrm{d}x\,,$$

d'où (iii) et le théorème.

## 4. RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION, CAS GÉNÉRAL

On supposera dans cette section la dérivabilité continue des fonctions $a_i(x, \zeta_j)$ en $x$, $\zeta_j$ et on va désigner $a_{ij}(x, \zeta_j) = (\partial a_i/\partial \zeta_j)(x, \zeta_\alpha)$. Pour la littérature, cf. J. Nečas [13] et M. I. Višík [24]. On va se borner aux hypothèses $m \geqq 2$ et en désignant

$$v_{|i|}(\zeta_\alpha, d) = d + \sum_{|\alpha|=k} |\zeta_\alpha| \quad \text{si} \quad |i| = k \quad \text{et}$$

$$v_{|i|}(\zeta_\alpha, d) = d + \sum_{|\alpha|\leqq k} |\zeta_\alpha| \quad \text{si} \quad |i| < k \ (d \geqq 0)$$

on supposera

$$(4.1)\quad |a_{ij}(x,\zeta_\alpha)| \leqq c\nu_{|i|}^{m/2-1}\nu_{|j|}^{m/2-1}\,,\quad \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x,\zeta_\alpha)\right| \leqq c\nu_{|i|}^{m-1}\,,\quad \text{pour}\quad |i| < k\,,$$

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x,\zeta_\alpha)\right| \leqq c\nu_{|i|}^{(m-1)/2}\nu_{|i|-1}^{(m-1)/2}\quad \text{pour}\quad |i| = k\,,$$

$$c\nu_k^{m-2}\sum_{|i|=k}\xi_i^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x,\zeta_\alpha)\,\xi_i\xi_j\,.$$

Désignons par $\sigma$ une fonction de $\mathscr{E}(\Omega) \cap \mathscr{E}(\bar{\Omega})$ équivalente à la dist $(x, \partial\Omega)$ et telle que

$$(4.2)\qquad |D^i\sigma| \leqq c\sigma^{1-|i|}$$

et par $\Omega_n$ une suite croissante des sousdomaines, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n = \Omega$ et par $\sigma_n$ la suite des „$\sigma$" correspondante.

L'inégalité (4.2) est valable indépendamment de $n$; on peut supposer encore que $\sigma_n(x) \to \sigma(x)$ dans $\Omega$. L'existence d'une telle suite $\Omega_n$ et des fonctions $\sigma_n$ est démontrée aux travaux de l'auteur [18], [19].

Pour le terme à droit, on supposera que

$$(4.3)\qquad \sum_{l=1}^{N}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_l}\sigma^k\right\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'} \leqq c\,.$$

On désigne par $\Delta_h u(x) = (u(x+h) - u(x))/\tau$. Nous utiliserons cette propriété bien connue, (cf. J. Nečas) [17]: si $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ et $|h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $h = (0, \ldots, \tau, 0, \ldots \ldots, 0)$, avec $\tau$ sur $l$-ème place, il est:

$$u \in W_p^{(k)}(\Omega)\,,\quad 1 \leqq p < \infty \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{N}\|\Delta_h u\|_{W_p{}^{(k-1)}(\Omega')} \leqq c\,.$$

Cela étant, on a $\lim\limits_{\tau\to 0}\Delta_h u = \partial u/\partial x_l$ dans $W_p^{(k-1)}(\Omega')$ et

$$\sum_{l=1}^{N}\|\Delta_h u\|_{W_p{}^{(k-1)}(\Omega')} \leqq c_1\|u\|_{W_p{}^{(k)}(\Omega)}$$

$$\|u\|_{W_p{}^{(k)}(\Omega)} \leqq c_2 \sup_{\Omega'\subset\Omega}\Big(\lim_{\tau\to 0}\sum_{l=1}^{N}\|\Delta_h u\|_{W_p{}^{(k-1)}(\Omega')} + \|u\|_{W_p{}^{(k-1)}(\Omega)}\Big)\,.$$

**Théorème 4.1.** *Soit $u$ la solution du problème aux limites, $m \geqq 2$, et supposons* (4.1)–(4.3). *Alors*

$$(4.4)\qquad \int_\Omega \sigma^{2k}\sum_{l=1}^{N}\left\{\frac{\partial}{\partial x_l}[d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2]^{m/4}\right\}\mathrm{d}x \leqq c$$

*et pour $d > 0$*

(4.5) $$\int_\Omega \sigma^{2k}(d + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2)^{m/2-1} \sum_{|i|=k+1} (D^i u)^2 \, dx \leqq c \, .$$

*Pour $d \geqq 0$, on a*

(4.6) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \sigma^{2kn/(N-2)} \left|D^i u\right|^{(m.N)/(N-2)} dx \leqq c \quad (N > 2)\,,$$

(4.7) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \sigma^{2kp/m} \left|D^i u\right|^p dx \leqq c \quad (N = 2,\, 1 \leqq p < \infty)\,.$$

Démonstration. Posons pour $x \in \Omega_n : v(x) = \sigma_n^{2k}(x)\, \Delta_h\, u(x)$, pour $x \notin \Omega_n$ : : $v(x) = 0$ $(h = (0, \ldots, 0, \tau, 0, \ldots, 0)$, $\tau > 0$ avec $\tau$ sur $l$-ème place, $|h| <$ $<$ dist $(\Omega_n, \partial\Omega))$. On a $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$. Soit encore $w \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ avec dist (support $w$, $\partial\Omega) \leqq$ dist $(\Omega_n, \partial\Omega)$. Il suit de (14)

(4.8) $$\int_\Omega \sum_{|i|,|j|\leqq k} \left[\int_0^1 a_{ij}(x + th, (1 - t)\, D^\alpha u(x) + \right.$$
$$\left. + tD^\alpha u(x + h))\, dt \right] D^i w(x)\, D^j \Delta_h\, u(x)\, dx +$$
$$+ \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \left[\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x + th, (1 - t)\, D^j u(x) + tD^j u(x + h))\, dt\right] D^i w(x)\, dx =$$
$$= \langle w, \Delta_h f\rangle_\Omega \, .$$

Posons

$$\mathscr{I} = \int_\Omega \sigma_n^{2k} \left\{\int_0^1 (d + \sum_{|\alpha|=k} |(1 - t)\, D^\alpha u(x) + \right.$$
$$\left. + tD^\alpha u(x + h)|)^{m-2}\, dt\right\} \sum_{|i|=k} (D^i \Delta_h\, u(x))^2\, dx \quad \text{et} \quad w = v\, .$$

Il suit de (4.4) l'inégalité

(4.9) $$\mathscr{I} \leqq c_1 \mathscr{I}^{1/2} \|u\|_{k,m}^{m/2} + c_2 \|u\|_{k,m}^m + c_3 \|f\|_n \, \|u\|_{k,m},$$

où

$$\|f\|_n = \|\sigma_n^k \Delta_h f\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'}\, .$$

Il suit de (4.9) que

$$\|\sigma_n^k \Delta_h f\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'} = \left\|\sigma_n^k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_l}\, (x + th)\, dt\right\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'}\,,$$

d'où

(4.10) $$\mathscr{I} \leqq c_4 + c_5 \|f\|_n \, .$$

Pour $d \geqq 0$ on a

$$\frac{1}{\tau^2}\{[d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u(x+h))^2]^{m/4} - [d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u(x))^2]^{m/4}\}^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{m^2}{4}\left\{\int_0^1 [d + \sum_{|\alpha|=k}((1-t)\, D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h))^2]^{m/2-1}\, dt\right\} \sum_{|i|=k}(D^i \Delta_h u(x))^2 ,$$

d'où

$$(4.11)\int_{\Omega_n} \frac{1}{\tau^2}\{[d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u(x+h))^2]^{m/4} - [d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u(x))^2]^{m/4}\}^2\, \sigma_k^{2n}\, dx \leqq$$

$$\leqq c_6 + c_7 \|f\|_n .$$

(4.11) implique que la fonction $w(x) = [d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u(x))^2]^{m/4}$ converge dans $L_2(\Omega')$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, vers sa dérivée qui existe dans $L_2(\Omega')$. Par un choix convenable des $\tau_r \to 0$, on obtient de (4.11) et du lemme de Fatou l'inégalité

$$(4.12) \quad \int_{\Omega_n} \sigma_n^{2k}\left\{\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}[d + \sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2]^{m/4}\right\}^2 dx \leqq c_6 + c_8 \sum_{l=1}^{N}\left\|\sigma_n^k \frac{\partial f}{\partial x_l}\right\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'} .$$

Mais l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty x^{-m}\left|\int_0^x f(x)\, dx\right|^m dx \leqq \left|\frac{m}{m-1}\right|^m \int_0^\infty |f(x)|^m\, dx$$

et les inégalités (4.2) pour $\sigma$ et $\sigma_n$ entrainent que

$$\left\|\sigma_n^k \frac{\partial f}{\partial x_l}\right\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'} \leqq c_9 \left\|\sigma \frac{\partial f}{\partial x_l}\right\|_{(\mathring{W}_m{}^{(k-1)})'} ,$$

d'où par le procédé limite: $n \to \infty$ et du lemme de Fatou suit (4.4); (4.6) et (4.7), ce n'est qu'une conséquence des théorèmes de l'immersion.

Pour obtenir (4.5), on part de (4.10) au lieu de (4.11) et obtient l'assertion de la même manière.

Comme une conséquence immédiate du théorème précédent, on obtient:

**Conséquence 4.1.** *Sous les hypothèses su théorème* 4.1, *pour chaque* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\partial u/\partial x_l$ *satisfait à léquation linéaire*

$$(4.13) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leqq k} a_{ij}(x, D^\alpha u)\, D^i\varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x, D^j u)\, D^i\varphi\, dx = \left\langle \varphi, \frac{\partial f}{\partial x_l}\right\rangle_\Omega .$$

Pour pouvoir démontrer que la solution u du problème aux limites appartient aux classes $C^{(l)}(\Omega)$, $l = k, k + 1, \ldots$ ou est analytique, les conditions sur la régularité des coefficients et du terme à droit étant valables, il suffit qu'on démontre l'appartenance de la solution à $C^{(k)}(\Omega)$; cf. Ch. B. Morrey [12].

Ce pas, c'est le point central des théorèmes sur la régularité des solutions des équations non-linéaires.

Il est résolu au cas de $k = 1$ aux travaux de O. A. Ladyženskaja, N. N. Uralceva, cf. [6], aux travaux de Ch. B. Morrey, cf. [12], le cas $k \geqq 1$ et $N = 2$ par l'auter, cf. plus loin et [14], [15], [16].

## 5. LES ÉQUATIONS D'ORDRE 2

Nous démontrerons que la solution du problème aux limites appartient à $C^{(1),\mu}(\Omega)$, l'espace des fonctions, dont les prémières dérivées sont $\mu$-höldériennes, $0 < \mu < 1$.

Cette démonstration répose sur le théorème de De Giorgi, cf. plus loin, que nous annonçons sous la forme à laquelle est venu G. Stampacchia dans [21], [21 bis].

Pour pouvoir utiliser cette théorie, il faut démontrer que les premières dérivées de la solution appartiennent à $L_\infty(\Omega')$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Pour obtenir une démonstration relativement facile, nous adoptons une méthode de l'auteur cf. [17] et de E. R. Buley [3 bis] et simplifierons encore des hypothèses. Nous supposerons dans ce paragraphe on posant $\mu = 1 + \sum_{|\alpha|=1} |\zeta_\alpha|$

(5.1)

$$|a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leqq c\mu^{m-2}\,, \quad \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x, \zeta_\alpha)\right| \leqq c\mu^{m-1}\,, \quad c\mu^{m-2} \sum_{|i|=1} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x, \zeta_\alpha)\, \xi_i \xi_j\,.$$

Pour le terme à droit, nous supposerons pour simplicité que

$$\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leqq c\,. \tag{5.2}$$

Soit encore $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ un sous-domaine arbitraire mais fixé d'abord; nous supposerons que la suite $\sigma_n$ des fonctions de (4.2) est telle que $\sigma_n(x) = 1$ pour $x \in \Omega'$.

**Théorème 5.1.** *Soit u la solution du problème aux limites,* $u \in W_m^{(1)}(\Omega)$, $m \geqq 2$. *Supposons* (5.1), (5.2). *Alors pour chaque* $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, *il existe* $c(\Omega')$ *de sorte que pour* $x \in \Omega'$:

$$\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqq c(\Omega')\,. \tag{5.3}$$

Démonstration. Démontrons l'énoncé pour $N \geqq 3$ (le cas $N = 2$ est plus facile et se démontre de la même manière avec un autre choix des constantes). Si $v(x)$

est une fonction mesurable, désignons par $(v(x))^l_+ = \min(l, \max(v(x), 0))$ et par $(v(x))^l_- = \min(l, \max(-v(x), 0))$. Pour $p = 0, 1, 2, \ldots$, définissons $\lambda_p, \varkappa_p$ par $\lambda_0 = 0$, $\varkappa_0 = 2$ et pour $p \geqq 1$ par

$$(5.4) \qquad m + \lambda_{p+1} = \frac{N}{N-2}(m + \lambda_p)$$

$$N - 2 + \varkappa_{p+1} = (N - 2 + \varkappa_p)\frac{N}{N-2}.$$

Posons dans (4.8) pour $w = \sigma_n^{\varkappa_p}[(\Delta_h u)^l_+]^{1+\lambda_p}$ (cf. la notation de la démonstration du théorème 4.1). On a $w \in W_m^{(1)}(\Omega)$ et le support de $w$ appartient à $\bar{\Omega}_n$.

Démontrons maintenant par reccurence que pour $p = 0, 1, \ldots$

$$(5.5) \qquad \left(\int_\Omega \sigma^{\varkappa_p N/(N-2)} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^{(m+\lambda_p)N/(N-2)} \,\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N(m+\lambda_{p+1})} < \infty$$

et de plus que

$$\left(\int_\Omega \sigma^{\varkappa_{p+1} N/(N-2)} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^{(m+\lambda_{p+1})N/N-2)} \,\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N(m+\lambda_p+1)} \leqq$$

$$\leqq c^{1/(m+\lambda_{p+1})}(m + \lambda_{p+1} + N - 2 + \varkappa_{p+1})^{2/(m+\lambda_{p+1})} \,.$$

$$\cdot \left(\int_\Omega \sigma^{\varkappa_p N/(N-2)} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^{(m+\lambda_p)N/(N-2)} \,\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N(m+\lambda_p)}$$

avec $c \geqq 1$.

Si $p = 0$, (5.5) est vrai, ca découle de (4.6). Supposons (5.5) vrai pour un $p$ et posons dans (4.8) $w = \sigma_n^{\varkappa_{p+1}}[(\Delta_h u)^l_+]^{1+\lambda_{p+1}}$. Désignons

$$\mathscr{I} = \int_\Omega \sigma_n^{\varkappa_{p+1}} \left(\int_0^1 (1 + \sum_{|\alpha|=1} [(1-t)\, D^\alpha u(x) + t D^\alpha u(x+h)]^2)\right)^{m/2-1} \mathrm{d}t \,.$$

$$\cdot \sum_{i=1}^N \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} [(\Delta_h u)^l_+]^{1+\frac{1}{2}\lambda_{p+1}}\right\}^2 \mathrm{d}x \,,$$

$$\mathscr{I}_1 = \int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x))^2 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x+h))^2)^{m/2-1} \,.$$

$$\cdot\, \sigma_n^{\varkappa_{p+1}-2} |\Delta_h u(x)|^{2+\lambda_{p+1}} \,\mathrm{d}x \,,$$

$$\mathscr{I}_2 = \int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x))^2 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x+h))^2)^{(m-1)/2} \,.$$

$$\cdot\, \sigma_n^{\varkappa_{p+1}-1} |\Delta_h u(x)|^{1+\lambda_{p+1}} \,\mathrm{d}x \,,$$

$$\mathscr{I}_3 = \int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x))^2 + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u(x+h))^2)^{m/2} \,.\, \sigma_n^{\varkappa_{p+1}} |\Delta_h u(x)|^{\lambda_{p+1}} \,\mathrm{d}x \,.$$

On obtient par un calcul immédiat

$$\mathscr{I} \leqq c(1 + \lambda_{p+1} + \varkappa_{p+1})^2 (\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3). \tag{5.7}$$

Les intégrales $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2, \mathscr{I}_3$ sont finies, cela découle de (5.5). On utilise maintenant plusieurs-fois le lemme de Fatou: premièrement pour $l \to 0$; ensuite (4.5) entraîne qu'il existe une suite $h_q \to 0$ telle que $\Delta_{h_q} u(x) \to (\partial u/\partial x_l)(x)$ presque partout dans $\Omega$; on peut faire tendre $h_q \to 0$ dans (5.7) et enfin on fait le procès limite $n \to \infty$. Il en suit l'inégalité

$$\int_\Omega \sum_{\substack{i=1\\|\alpha|=1}}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma^{\varkappa_{p+1}/2}(D^\alpha u(x))_+^{(m+\lambda_{p+1})/2}\right]\right\}^2 \mathrm{d}x + \tag{5.8}$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} \sigma^{\varkappa_{p+1}}(D^\alpha u(x))_+^{m+\lambda_{p+1}} \mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq c(1 + \lambda_{p+1} + \varkappa_{p+1})^2 \int_\Omega \sigma^{\varkappa_p N/(N-2)} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|^{(m+\lambda_p)N/(N-2)} \mathrm{d}x .$$

Par le théorème d'immersion $W_2^{(1)}(\Omega) \to L_{2N/(N-2)}(\Omega)$ pour $(D^\alpha u(x))_+$ et $(D^\alpha u(x))_-$ suit (5.6). Par application de (5.8) pour $0, 1, \ldots, p + 1$ et par calculant log de cette expression, on obtient que

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|^{(m+\lambda_p)N/(N-2)} \mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N(m+\lambda_p)} \mathrm{d}x \leqq c ,$$

d'où l'assertion.

**Lemme 5.1.** (E. De Giorgi, G. Stampacchia).
*Soit $u \in W_2^{(1)}(\mathcal{O})$ et telle que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$*

$$\int_{\mathcal{O}} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{O}} \varphi f \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{O}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i \,\mathrm{d}x ,$$

où $f \in L_p(\mathcal{O})$, $f_i \in L_{2p}(\mathcal{O})$, $p > N/2$, $a_{ij} \in L_\infty(\mathcal{O})$, $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq c|\xi|^2$. *Alors il existe $\mu = \mu(\mathcal{O}')$, $\mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ de sorte que $u \in C^{(0),\mu}(\overline{\mathcal{O}}')$ et*

$$\|u\|_{C^{(0),\mu}(\overline{\mathcal{O}}')} \leqq c(\mathcal{O}') \left(\|f\|_{L_p(\mathcal{O})} + \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L_{2p}(\mathcal{O})} + \|u\|_{W_2^{(1)}(\mathcal{O})}\right).$$

Comme une consèquence immédiate du théorème 5.1 et du lemme 5.1 nous avons

**Conséquence 5.1.** *Les conditions du théorème* 5.1 *soient satisfaites. Alors il existe $\mu = \mu(\Omega')$ de sorte que $u \in C^{(1),\mu}(\Omega')$ pour chaque $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.*

En effet, on a (5.3), on passe dans (4.8) vers la limite pour $|h| \to 0$ et on applique sur $\partial u/\partial x_l$ le lemme précédent.

Si l'on modifie les hypothèses (4.1), (4.3), (les $a_i$ de l'exemple 1.4 satisfont à ces hypothèses) on obtient pour $1 < m < \infty$, $N = 2$, que la solution du problème aux limites appartient à $C^{(k),\mu}(\Omega')$, pour chaque $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, cf. J. Nečas [15], [16]. La démonstration de ce théorème est trop compliquée pour la donner dans ce cours. Ce qui est essentiel, c'est une estimation „à priori" que nous allons formuler et démontrer ici:

On se bornera, pour simplifier, au cas $2 \leqq m < \infty$. Nous supposerrons en désignant

$$(6.1) \qquad \Psi(\zeta_\alpha) = 1 + \sum_{|\alpha|=k} |\zeta_\alpha| : |a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leqq c\Psi^{m-2}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad |i| = |j| = k,$$

$$\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, \zeta_\alpha)\, \xi_i \xi_j \geqq c\Psi^{m-2} |\xi|^2,$$

$$\left| \frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x, \zeta_\alpha) \right| \leqq c\Psi^{m-1},$$

$$a_i \equiv 0 \quad \text{pour} \quad |i| < k \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} = 0 \quad \text{pour} \quad |j| < k.$$

Pour la terme à droit, on supposera que

$$\langle w, f \rangle_\Omega = \sum_{|i| \leqq k} \int_\Omega D^i w f_i \, dx$$

avec

$$(6.2) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|=k} |f_i|^{m/(m-1)} \, dx < \infty$$

et l'existence d'un $p_0 > 2$ tel que pour chaque $l = 1, \ldots, N$

$$(6.3) \qquad \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right|^{p_0} \sigma^{k p_0} \, dx < \infty.$$

Soit encore $\varkappa \geqq 0$. On désigne par

$$C_\varkappa^{(k)}(\Omega) \equiv \{u \in C^{(k)}(\Omega), \sup_{d>0} d^\varkappa (\max_{x \in \bar{\Omega}_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u(x)|) < \infty\},$$

où $\Omega_d = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > d\}$.

Nous allons formuler notre théorème sur l'estimation „à priori":

**Théorème 6.1.** *Soit* $\alpha \geqq (1 + k) \,.\, 2/(2 - \varepsilon m)$, $0 < \varepsilon < 2/m$ *et supposons les hypothèses* (6.1), (6.2), (6.3), $N = 2$. *Alors si*

$$(6.3 \text{ bis}) \qquad u \in C_\alpha^{(k)}(\Omega)$$

*il existe une fonction continue et positive, $c_\alpha(s)$, définie pour $0 \leqq s < \infty$, telle que*

$$(6.4) \qquad \|u\|_{C^{(k)}_\alpha} \leqq c_\alpha\left(\|u\|_{W_{m(k)}} + \sum_{|i|=k} \|f_i\|_{L_{m/(m-1)}} + \sum_{|i|=k}\sum_{l=1}^{N}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_l}\sigma^k\right\|_{L_{p_0}}\right).$$

*Cela étant, $u \in C^{(k),\mu}(\Omega')$ pour $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $0 < \mu = \mu(\Omega')$.*

D'abord, nous anonçons quelques lemmes:
On démontre facilement (cf. J. Nečas [16]):

**Lemme 6.1.** *Soit $f(d)$ un fonction réelle, nonnégative, définie pour $0 < d < d_0$ et telle que pour $\alpha > .0$ : $\sup\limits_{0<d<d_0} d^\alpha f(d) < \infty$. Soit $\varkappa \geqq 0$, $0 \leqq \lambda < 1$, $\alpha \leqq \varkappa/(1-\lambda)$, $f(2d) \leqq c_1 d^{-\varkappa} f(d)^\lambda + c_1 d^{-\varkappa}$. Alors pour $\beta \geqq \varkappa(1-\lambda)$, on a $\sup\limits_{0<d<d_0} \mathrm{d}^\beta f(d) \leqq$ $\leqq c(\beta, \varkappa, \lambda, c_1)$.*

On démontre par la méthode de Morrey (cf. J. Nečas [16]) facilement:

**Lemme 6.2.** *Soit $K_d = \{x \in E_N, |x| < d\}$, $u \in W_p^{(1)}(K_d)$, $p > N$. Alors*

$$(6.5) \quad |u(0)| \leqq c d^{1-N/p}\left(\frac{1}{p-N}\right)^{1-1/p}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{K_d}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right|^p \mathrm{d}z\right)^{1/p} + c d^{-N}\int_{K_d}|u(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Voici maintenant encore un lemme dont la démonstration n'est pas immédiate, mais pas compliquée, cf. J. Nečas [16] qui jouera le rôle du lemme 5.1 (pour les résultats voisins, cf. N. G. Meyers [9]):

**Lemme 6.3.** *Soient pour $|i| = |j| = k$, $A_{ij} \in L_\infty(K_d)$, $A_{ij} = A_{ji}$, $\gamma_1 \sum\limits_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq$ $\leqq \sum\limits_{|i|=|j|=k} A_{ij}\xi_i\xi_j \leqq \gamma_2 \sum\limits_{|i|=k}\xi_i^2$, $f_i \in L_p(K_d)$, $2 < p < 2 + \varrho$, et $\omega \in W_2^{(k)}(K_d)$ telle que pour $\varphi \in D(K_d)$*

$$\int_{K_d} \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij} D^i\varphi D^j\omega \,\mathrm{d}x = \sum_{|i|=k}\int_{K_d} D^i\varphi f_i \,\mathrm{d}x \,.$$

*Alors il existe deux constantes $\gamma_3 = \gamma_3(\varrho) > 1$, $\gamma_4(\varrho) > 0$, telles que si*

$$(6.5)' \qquad p\left(1 - \frac{\log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) - \log\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}{\log \gamma_3}\right) \leqq 2\,,$$

*alors*

$$(6.6) \qquad \left(\int_{K_{d/2}} \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqq \frac{2}{\gamma_1}\gamma_4^{(p-2)/p}\,.$$

$$\cdot\left[\left(\int_{Kd}\sum_{|i|=k}|f_i|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + d^{-k+N/p-N/2}\left(\int_{K_d}\sum_{|i|\leqq K}(D^i\omega)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right].$$

Démonstration du théorème 6.1. Premièrement, la démonstration du théorème 4.1 nous donne (4.5) sous l'hypothèse (6.3). Cela étant, compte tenu de (6.3 bis) et en posant dans (4.8) $w = \varphi$ de $\mathscr{D}(\Omega)$, nous obtenons pour $|h| \to 0$ et chaque $\partial u/\partial x_l$ une équation linéaire

$$\int_\Omega \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, D^\alpha u(x))\, D^i\varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i\varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_l}\, dx - \int_\Omega \sum_{|i|=k} \frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x, D^\alpha u(x))\, D^i\varphi\, dx\,.$$

Soit $x_0 \in \Omega$, $d = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Désignons par $K(x_0) = \{x, |x - x_0| < d\}$ et par $L(x_0) = \{x, |x - x_0| < d/2\}$. Il suit du lemme 6.3 et de (4.5) immédiatement

(6.7) $$\sum_{|\alpha|=k+1} \|D^\alpha u\|_{L_p(L(x_0))} \leqq c d^{-2k-1} A_d^{m-1}\,,$$

où $A_d = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}_d} (1 + \sum\limits_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|)$.

La condition (6.5)' entraîne la validité de (6.7) pour $p = 2 + c_1 A_d^{2-m}$. Posons $m(x) = (1 + \sum\limits_{|\alpha|=k} (D^\alpha u(x))^2)^{m/4}$. Il suit de (4.5) que

(6.8) $$\left(\int_{L(x_0)} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqq c d^{-k}$$

et de (6.7)

(6.9) $$\left(\int_{L(x_0)} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial m}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} \leqq c d^{-2k-1} A_d^{\frac{3}{2}m-2}\,.$$

Soit

$$\frac{1}{p_1} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2}\,, \quad 0 < a < 1\,, \quad a + b = 1\,.$$

Il suit de (6.8), (6.9)

(6.10) $$\left(\int_{L(x_0)} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial m}{\partial x_i}\right|^{p_1} dx\right)^{1/p_1} \leqq c A_d^{a(\frac{3}{2}m-2)} \,.\, d^{-k} d^{-(k+1)a}\,.$$

D'autre part, étant $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$, il en suit

(6.11) $$\frac{1}{d^2}\int_{L(x_0)} |m(x)|\, dx \leqq c d^{-1}\,.$$

On voit que $p_1 \geqq 2 + c_2 \,.\, A_d^{2-m}$. Il suit maintenant de (6.10), (6.11) et du lemme

6.2 que

$$A_{2d} \leqq c a^{-1} d^{-(k+1)2/m} A_d^{1-2/m+\varepsilon},$$

où $a(4 - 6/m) = \varepsilon$. Nous prenons $0 < \varepsilon < 2/m$; l'assertion suit maintenant du lemme 6.1.

### *Bibliographie*


[1] *F. E. Browder:* Problèmes non-linéaires, Séminaire de mathématiques supérieures, Montréal 1966.

[2] *F. E. Browder:* Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, Bull. Amer. Math. Soc. *71* (1965), 178—183.

[3] *F. E. Browder:* Remarks on the direct method of the calculus of variations, Archive for Rat. Mech. and Anal. *20* (1965), 251—258.

[3 bis] *E. R. Buley:* The differentiability of solutions of certain variational problems for multiple integrals, Technical Report 16, University of Berkeley, 1960.

[4] *E. De Giorgi:* Sulla differentiabilità e l'analyticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sci. Torino *3* (1957), 25—43.

[5] *P. Hartman, G. Stampacchia:* On some non-linear elliptic differential functional equations, Acta Math. Uppsala, *115* (1966), 271—350.

[6] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева:* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Moskva 1964.

[7] *А. Лангенбах:* О некоторых нелинейных операторах теории упругости в гилбертовском пространстве, Вест. Ленинград. Государ. Университета, *6* (1961), 38—50.

[8] *J. Leray, J. L. Lions:* Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France *93* (1965), 97—107.

[9] *N. G. Meyers:* On $L_p$-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations, Ann. Scuola norm. Sup. Pisa *17* (1963), 189—206.

[10] *С. Г. Михлин:* Чиселнная реализация вариящионных методов, Moskva 1966.

[11] *G. J. Minty:* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. Journ. *29* (1962), 341—346.

[11 bis] *G. J. Minty:* On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, *50* (1963), 1038—1041.

[12] *Ch. B. Morrey:* Multiple integrals in the calculus of variations, Springer 1966.

[13] *J. Nečas:* Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique; l'existence et la régularité des solutions, Comment. Math. Univ. Calor. *7*, 3 (1966) 301—317.

[14] *J. Nečas:* On the existence and regularity of solutions of nonlinear elliptic equations, Proceed. of Equadiff II, Bratislava 1966.

[15] *J. Nečas:* Sur l'appartenance dans la classe $C^{(\kappa)\mu}$ des solutions variationnelles des équations elliptiques, non-linéaires d'ordre 2k en deux dimensions, Comment. Math. Univ. Carol. *8*, 2 (1967), 209—217.

[16] *J. Nečas:* Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre 2k en deux dimensions, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa *XXI* (1967), 427—457.

[17] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague 1967.

[18] *J. Nečas:* Об областях типа $\mathfrak{N}$, Czech. Math. Journ. *12* (1962), 274—287.

[19] *J. Nečas:* Sur une méthode pour resoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, XVI. 1962, 305—326.

[20] *J. Nečas* a *Z. Poracká:* [1] On extrema of functionals, Comment. Math. Univ. Carol. *7*. 4 (1966), 509—520.

[21] *G. Stampacchia:* Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Sém. sur les équat. diff., Collège de France, 1963—64.

[21 bis] *G. Stampacchia:* Le même titre, Sémin. de mathématiques supérieures, Montréal 1965, Université Montréal 1966.

[22] *М. М. Вайнберг*, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Москва 1956.

[23] *M. M. Vajnberg*, *R. I. Kačurovskij:* On the variational theory of nonlinear operators and equations (en russe) ДАН СССР *129* (1959), 1199—1202.

[24] *М. И. Вишик:* Квазилинейные силно-элиптические системи дифференциальных уравнений имеющие дивергентную форму, Труды московского матем. общества *12* (1963), 125—182.

*Adresse de l'auteur:* Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).