Zbyněk Nádeník

Sur les courbes convexes gauches

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 4, 718–721

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100867

SUR LES COURBES CONVEXES GAUCHES

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 30 juin 1967)

Cet article se rattache très étroitement aux travaux [2] et [3] qui précèdent récemment. Leur objet a été — dans un espace euclidien à $2n$ dimensions — une courbe fermée C, les rapports des courbures de laquelle sont constants et positifs et dont l'indicatrice sphérique des opposés des vecteurs unitaires de la dernière normale est donc une hypercirconférence Γ. Celle-ci a, dans un système des coordonnées orthogonales convenablement choisies, les équations

$$(1) \qquad x_{2i-1} = r_i \sin l_i\beta\,, \quad x_{2i} = r_i \cos l_i\beta \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)\,,$$

où $r_i > 0$ et $0 < l_i \neq l_j$ sont les constantes et β est l'arc de Γ. La longueur de Γ étant b, les

$$(2) \qquad \lambda_i = \frac{b}{2\pi}\, l_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sont les nombres naturels distincts dont l'interprétation géométrique est évidente (voir [2], p. 363). En se référant à ces nombres, nous convenons d'appeler la courbe C en question „la courbe du type $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$".

A l'aide de la fonction d'appui $h(\beta)$ de C, on peut exprimer le rayon $P(\beta)$ de la dernière courbure de C sous la forme (toujours $[\,.\,]' = \mathrm{d}[\,.\,]/\mathrm{d}\beta$; voir [2], p. 364)

$$(3) \quad P(\beta) = \Lambda\{h^{(2n)}(\beta) + [l_1^2 + \ldots + l_n^2]\, h^{(2n-2)}(\beta) + \ldots + [l_1^2 \ldots l_n^2]\, h(\beta)\}\,,$$

où $\Lambda > 0$ est une constante composée de nombres r_i et l_i.

Nous allons formuler la première assertion dans laquelle, sous la courbe convexe dans E_{2n}, nous comprenons la courbe qui a, avec chaque hyperplan, $2n$ points communs au plus:

1. *Soit* $\lambda = \max[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. *Tout hyperplan coupe la courbe C dans 2λ points au plus. Si*

$$(4) \qquad \lambda_i = i \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

la courbe C est convexe. (Voir le n^0 1.)

I. J. SCHOENBERG [4] a démontré, pour les courbes gauches, une inégalité isopérimétrique générale très belle: *Si L désigne la longueur d'une courbe fermée convexe dans* E_{2n} (celle-ci est rectifiable; voir [4], p. 149) *et si V est le volume de l'enveloppante convexe de cette courbe, alors*

$$L^{2n} \geqq (2\pi n)^n \, n! \, (2n)! \, V; \tag{5}$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si la courbe en question est une hypercirconférence spéciale du type (4); c'est-à-dire une hypercirconférence dont les équations — dans un système des coordonnées convenablement choisi — sont de la forme (1) où les l_i sont définis par (2) pour $b = 2\mu\pi \sqrt{n}$ (μ = const. > 0) et (4) et encore $r_i = \mu/i$.

Ainsi, d'après l'assertion 1, *pour toute courbe C du type* (4) *l'inégalité* (5) *est valable.* De plus, les suppositions des théorèmes 1 et 2 dans [2] étant dans le cas (4) satisfaites, on a — d'après le théorème 3 dans [2] — *pour la courbe C du type* (4) *aussi une autre inégalité isopérimétrique* $L^2 - 2b(n!)^2 (2\pi/b)^{2n} \Lambda \,.\, F \geqq 0$ (*ou* $\leqq 0$) *pour n impair* (*ou pair*), *où* $F = \frac{1}{2}\int_0^b h(\beta)\, P(\beta)\, d\beta$ *est une fonctionnelle analogue à l'aire d'un domaine plan. Ici, le signe d'égalité a lieu si et seulement si la courbe C en question est une hypercirconférence arbitraire, naturellement, du type* (4).

Voici la deuxième assertion qui est analogue au lemme 2 dans [3]:

2. *Si la fonction d'appui* $h(\beta)$ *d'une courbe C du type* (4) *est soumise aux conditions initiales* $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0$, *alors*

$$h(\beta) = \frac{1}{(2n-1)!} \frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{b}{\pi}\right)^{2n-1} \int_0^\beta P(\gamma) \sin \frac{2\pi(\beta - \gamma)}{b} \left[\sin \frac{\pi(\beta - \gamma)}{b}\right]^{2n-2} d\gamma \tag{6}$$

(cf. (14) dans [3]).

Mais le lemme mentionné se rapporte aux courbes C du type $\lambda_i = 2i - 1$ ($i = 1, \ldots, n$). Tandis que dans ce cas l'hypercirconférence (1) est centrée, ce qui permet de définir sur la courbe C en question les points opposés avec les hyperplans osculateurs parallèles, il n'en est pas ainsi dans le cas considéré (4). Cependant, le lemme 2 de [3] a été utilisé dans [3] dans une seule direction: si $\beta \in (0, \frac{1}{2}b\rangle$, alors l'intégrale de ce lemme est positive. L'intégrale dans (6) jouit évidemment de la même propriété. Cela veut dire que *les théorèmes du travail* [3] *lesquels sont fondés exclusivement sur le lemme 2 en question* (et non pas sur la symétrie sus-mentionnée de Γ) *restent valables aussi pour les courbes C de notre type* (4). *Notamment, les analogies spaciales des théorèmes de W. Blaschke et B. Segre concernant les courbes convexes planes* (à savoir les théorèmes 3 et 6 dans [3]) *s'étendent ainsi aux courbes C du type* (4).

Nous allons démontrer les assertions 1 et 2 formulées ci-dessus.

1. Soient $a_1, \ldots, a_{2n}$ et c les constantes arbitraires pour lesquelles $\sum_1^{2n} a_i^2 > 0$. En désignant par $x_1(\beta), \ldots, x_{2n}(\beta)$ les coordonnées d'un point de la courbe C — dans le système dans lequel l'hypercirconférence Γ possède les équations (1) – nous posons

$$F(\beta) = \sum_{v=1}^{2n} a_v x_v(\beta) + c\,. \tag{1,1}$$

Parce que $x'_{2i-1}(\beta) = \mu_i\, P(\beta) \cos l_i\beta$, $x'_{2i}(\beta) = -\mu_i\, P(\beta) \sin l_i\beta$ ($\mu_i =$ const.; $i = 1, \ldots, n$; voir (2,6) et (2,7) et aussi (6) dans [2][1]), p. 369, 370), il résulte de (1,1) et (2) que

$$F'(\beta) = P(\beta) \sum_{i=1}^{n} \left(A_i \cos \frac{2\pi\lambda_i\beta}{b} + B_i \sin \frac{2\pi\lambda_i\beta}{b} \right), \tag{1,2}$$

où $A_i, B_i =$ const. Il s'ensuit que la dérivée $F'(\beta)$ s'annule si et seulement si le polynôme trigonométrique dans (1,2) égale à zéro. Ce polynôme étant de degré $\lambda = \max [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ au plus, il découle du théorème bien connu concernant les racines d'un polynôme trigonométrique (voir [5], ch. X, § 1) que, dans l'intervalle $\langle 0, b)$, $F'(\beta) = 0$ dans 2λ points au plus. En vertu de la périodicité de la fonction (1,1), il en résulte que, dans l'intervalle $\langle 0, b)$, la fonction (1,1) s'annule dans 2λ points au plus. Cela veut dire que chaque hyperplan coupe la courbe C dans 2λ points au plus.

Si la courbe C appartient au type (4), il y a $\lambda = n$ et la courbe C en question est convexe.

2. Pour démontrer notre deuxième assertion, nous rappelons d'abord la formule (voir [1], p. 206, la dernière formule pour $2n - 1$ au lieu de n)

$$\sin^{2n-1} \frac{\alpha}{2} = 2^{2-2n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2n-1}{n-1-j} \sin \frac{(2j+1)\,\alpha}{2} \tag{2,1}$$

et puis, nous revenons au travail [3]. En tenant (3) pour une équation différentielle, nous y avons établi – dans le lemme 1 – que si la fonction d'appui $h(\beta)$ d'une courbe C est soumise aux conditions $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0$, elle est de la forme

$$h(\beta) = \frac{(-1)^{n-1}}{A\, l_1 l_2 \ldots l_n V} \int_0^\beta P(\gamma)\, D(\beta, \gamma)\, \mathrm{d}\gamma\,; \tag{2,2}$$

ici dénote $D(\beta, \gamma)$ ou V le déterminant dont la $i^{\text{ième}}$ colonne ($i = 1, 2, \ldots, n$) est $l_i, l_i^3, \ldots, l_i^{2n-3}, \sin l_i(\beta - \gamma)$ ou $1, l_i^2, \ldots, l_i^{2n-2}$. De plus, en posant

$$D(\beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} A_i \sin l_i(\beta - \gamma)\,, \tag{2,3}$$

[1] Dans (2,7), il y a une erreur et une faute d'impression; exactement c'est $x'_{2i}(\beta) = \ldots; \ldots n$.

nous avons encore trouvé (voir (2,2) dans [3]; conventionnellement $\prod_a^b(.) = 1$ pour $a > b$) que, pour $i = 1, \ldots, n - 1$,

$$A_i : A_n = [l_n \prod_{p=1}^{i-1} (l_n^2 - l_p^2) \prod_{q=i+1}^{n-1} (l_n^2 - l_q^2)] : [l_i \prod_{p=1}^{i-1} (l_i^2 - l_p^2) \prod_{q=i+1}^{n-1} (l_q^2 - l_i^2)] .$$

En substituant, dans ces fractions, les valeurs de $l_1, \ldots, l_n$ d'après (2) et (4), nous obtenons ($i = 1, \ldots, n - 1$)

$$(2,4)\quad A_i : A_n = [2i(2n - 1)!] : [(n + i)!\,(n - i)!] = \binom{2n-1}{n-i} - \binom{2n-1}{n-1-i} .$$

D'autre part, on tire de (2,1) que

$$\cos \frac{\alpha}{2} \sin^{2n-1} \frac{\alpha}{2} = 2^{2-2n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2n-1}{n-1-j} \tfrac{1}{2}[\sin (j + 1)\, \alpha + \sin j\alpha] =$$

$$= 2^{1-2n} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \left[\binom{2n-1}{n-i} - \binom{2n-1}{n-1-i}\right] \sin i\alpha + 2^{1-2n} (-1)^{n-1} \sin n\alpha .$$

En posant ici $\alpha = 2\pi(\beta - \gamma)/b$ et en tenant compte de (2,4) et (2,3) et encore de (2) et (4), nous arrivons à la relation

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi(\beta - \gamma)}{b} \left[\sin \frac{\pi(\beta - \gamma)}{b}\right]^{2n-2} = \frac{(-1)^{n-1}\, 2^{1-2n}}{A_n} D(\beta, \gamma) .$$

Donc, d'après (2,2)

$$h(\beta) = \frac{2^{2n-2} A_n}{A\, l_1 l_2 \ldots l_n V} \int_0^\beta P(\gamma) \sin \frac{2\pi(\beta - \gamma)}{b} \left[\sin \frac{\pi(\beta - \gamma)}{b}\right]^{2n-2} \mathrm{d}\gamma .$$

En calculant ici – à l'aide de (2) et (4) – le quotient $A_n : (l_1 l_2 \ldots l_n V)$, nous terminons, par la formule définitive (6), les considérations présentes.

Bibliographie

[1] *E. Hammer:* Trigonometrie. 5^e éd. Stuttgart 1923.

[2] *Z. Nádeník:* Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 363–376.

[3] *Z. Nádeník:* Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée. Czech. Math. J. *17* (*92*) (1967), 447–459.

[4] *I. J. Schoenberg:* An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional euclidean spaces. Acta Math. *91* (1954), 143–164.

[5] *A. Zygmund:* Trigonometric Series. Vol. II. Warszawa 1935, Cambridge 1959. (Тригонометрические ряды. Москва 1965).

Adresse de l'auteur: Praha 2 - Nové Město, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).