Чехословацкий математический журнал, т. 18 (93) 1968, Прага

О ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

ANTON KOTZIG (Антон Коциг), Bratislava

(Поступило в редакцию 8/IV 1967 г.)

На протяжении всей работы под графом мы будем понимать неориентированный конечный граф без петель и без кратных ребер. Условимся: Если G — граф, то символом $V(G)$ (соотв. $E(G)$) обозначим множество его вершин (соотв. ребер), а символом $\varrho_G(x, y)$ расстояние между его вершинами x, y. Если x, y принадлежат к различным компонентам из G, то положим $\varrho_G(x, y) = +\infty$. Множество вершин, смежных в G с вершиной x, обозначим через $O_G(x)$ и назовем окрестностью x в G.

Будем говорить, что граф G является Q-графом, если он обладает следующими свойствами: 1. содержит наименее одно ребро; 2. для каждой тройки его вершин $\{x, y, z\}$ такой, что $\varrho_G(y, z) = 1$, справедливо: $\varrho_G(x, y) \neq \varrho_G(x, z)$.

Лемма 1. *Всякий Q-граф есть связной четный (=бихроматический) граф.*

Доказательство. Пусть G — произвольный Q-граф и пусть v, w — вершины инцидентные некоторому ребру $e \in E(G)$. Следовательно, $\varrho_G(v, w) = 1$. Если бы G не был связный, то существовала бы по крайней мере одна такая вершина u, которая бы принадлежала к иной компоненте, чем e. Но тогда имело бы место $\varrho_G(u, v) = \varrho_G(u, w) = +\infty$ и G не имел бы свойства 2. Предположение, что Q-граф не связный, ведет к противоречию. Значит, каждый Q-граф связен.

Пусть y — произвольная вершина из $V(G)$. Так как G связный граф, то для функции $f(x) = \varrho_G(x, y)$, определенной на $V(G)$, имеет место: если вершины p, q смежные, то $|f(p) - f(q)| = 1$. Следовательно, значения f в двух смежных вершинах различного паритета. Если обозначим символом X_1 (соотв. X_2) множество всех тех вершин из $V(G)$, в которых $f(x)$ — число нечетное (соотв. четное), то $\{X_1, X_2\}$ есть такое разбиение множества $V(G)$, что две смежных вершины из G принадлежат к различным классам этого разбиения. Поэтому G — четный граф, а это нам и нужно было доказать.

Пусть G — Q-граф и x его вершина. Определим подмножество $M_G(x)$ множества $V(G)$ вот так: $v \in V(G)$ принадлежит к $M_G(x)$ тогда и только тогда, когда для каждой вершины w из окрестности $O_G(v)$ имеет место: $\varrho_G(x, v) > \varrho_G(x, w)$. Очевидно, $M_G(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in V(G)$.

Будем говорить, что Q-граф G является центрально симметрическим графом (кратко S-графом), если для всех $x \in V(G)$ справедливо: $|M_G(x)| = 1$. Условимся: Если x — вершина S-графа G и $M_G(x) = \{y\}$, то это выразим так: $y = \bar{x}$. О значении S-графов для теории структур говорит следующая теорема:

Теорема 1. *Если к каждому определенно выбранному* $x \in V(G)$ *существует структура Жордана-Дедекинда, такая, что ее диаграмма изоморфна* G *и что ее найбольшим элементом является* x, *то* G *есть* S-*граф.*

Доказательство. Диаграммой структуры Жордана-Дедекинда может быть лишь связный четный граф без петель и кратных ребер. Беря во внимание свойства структуры и тот факт, что к наибольшему элементу x должен существовать единственный наименьший элемент, утверждение теоремы очевидно.

Замечание 1. Не всякий S-граф имеет свойства графа из теоремы 1. Так например, граф, изображенный на рис. 1 является S-графом, но не является диаграммой структуры, наибольшим элементом которой был бы x. Это потому, что $\{r, s, t\}$ — множество элементов, которые находятся в данном случае как под u, так и под v, а это множество не имеет единственного наибольшего элемента.

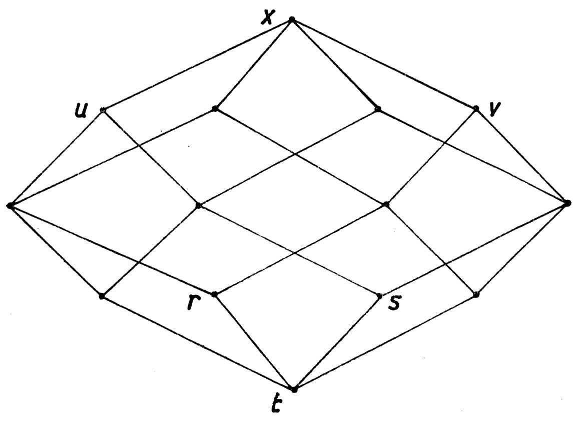

Рис. 1.

Теорема 2. *Пусть* G *есть* S-*граф и пусть* x — *его вершина, тогда* $[y = \bar{x}] \Rightarrow [x \neq y]$ *и для каждой вершины* $v \in V(G)$ *имеет место*: $\varrho_G(x, v) + \varrho_G(v, \bar{x}) = \varrho_G(x, \bar{x})$.

Доказательство. Пусть $M_G(x) = \{y\}$. Из связности графа G (смотри лемму 1) следует, что существует вершина $v \in O_G(x)$ такая, что $\varrho_G(x, v) =$

$= 1 > \varrho_G(x, x) = 0$. Поэтому x не принадлежит к $M_G(x)$, т.е. $x \neq y$. Теперь докажем, что для каждой вершины u справедливо $\varrho_G(x, u) + \varrho_G(u, \bar{x}) = \varrho_G(x, \bar{x})$. Определим фунцию f на множестве $V(G)$ так: для произвольной вершины $v \in \in V(G)$ имеет место: $f(v) = \varrho_G(x, y)$. Прямо из определения этой функции вытекает следующее: если u, w – смежные вершины, то $|f(u) - f(w)| = 1$, а из $v_0 \neq \bar{x}$ вытекает: $O_G(v_0)$ содержит хотя бы одну такую вершину v_1, для которой справедливо: $f(v_1) = f(v_0) + 1$ (в противном случае v_0 принадлежало бы к $M_G(x)$, что противоречит прелположению, что G есть S-граф). Если $v_1 \neq \bar{x}$, то существует $v_2 \in O_G(v_1)$ такое, что $f(v_2) = 1 + f(v_1) = 2 + f(v_0)$. Продолжая это рассуждение, мы получим следующую последовательность $v_0, v_1, \ldots$ и закончим этот процесс только тогда, когда для некоторого натурального k имеет место $v_k = \bar{x}$; $f(v_k) = k + f(v_0) = f(\bar{x})$. Отсюда следует, что $\varrho_G(v_0, \bar{x}) \leqq k$. Значит: $\varrho_G(v_0, \bar{x}) \leqq k$; $\varrho_G(x, v_0) + \varrho_G(v_0, \bar{x}) \leqq f(\bar{x}) = \varrho_G(x, \bar{x})$. Однако, очевидно, что сумма $\varrho_G(x, v_0) + \varrho_G(v_0, \bar{x})$ не может быть меньше, чем $\varrho_G(x, \bar{x})$. Следовательно, для всех $x \in V(G)$ справедливо: $\varrho_G(x, v) + \varrho_G(v, \bar{x}) = \varrho_G(x, \bar{x})$. Из этого сразу же вытекает, что x имеет наибольшее расстояние от $\bar{x}$ и что для всех $v \neq x$, $\varrho_G(\bar{x}, v) < \varrho_G(\bar{x}, x)$. То есть: $M_G(\bar{x}) = \{x\}$, что и нужно было еще доказать.

Замечание 2. Прямо из теоремы 2 следует, что S-граф имеет четное число вершин.

Теорема 3. *Пусть G – произвольный S-граф и x – его вершина, тогда имеет место $\bar{\bar{x}} = x$.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием теоремы 2.

Условимся пару вершин $x, \bar{x}$ называть противоположными вершинами S-графа.

Теорема 4. *Пусть G – произвольный S-граф и пусть d – его диаметр, тогда произвольные две противоположные вершины и только такие две вершины имеют расстояние d.*

Доказательство. Пусть v, w такая пара вершин, для которой имеет место: $\varrho_G(v, w) = d$. Из факта, что G – S-граф и из теоремы 2 следует: $w = \bar{v}$; $v = \bar{w}$. Значит, $\varrho_G(v, \bar{v}) = d$. Пусть u – произвольная вершина из $O_G(v)$. Справедливо: $\varrho_G(u, v) = 1$ и согласно теореме 2 $\varrho_G(u, \bar{v}) = d - 1$; $\bar{u} \neq \bar{v}$ (а то бы кроме v, и u принадлежало к $M_G(\bar{v})$, что невозможно). Из этого следует, что окрестность вершины $\bar{v}$ содержит вершину t, для которой справедливо $\varrho_G(u, t) = 1 + \varrho_G(u, \bar{v}) = d$. Поскольку d – диаметр, то должно быть $t = \bar{u}$. Следовательно, из $\varrho_G(v, \bar{v}) = d$ вытекает, что для всех вершин u из окрестности имеет место: $\varrho_G(u, \bar{u}) = d$. Аналогично рассуждая об окрестностях других вершин, найдем (так как G – связняй граф), что для каждой вершины $x \in V(G)$ справедливо: $\varrho_G(x, \bar{x}) = d$, что и нужно было доказать.

Замечание 3. Прямым следствием теоремы 4 является справедливость следующего утверждения: произвольные две противоположные вершины S-графа — одинаковой степени.

Теорема 5. *Пусть G — S-граф с диаметром $d > 1$ и пусть e — произвольное его ребро, тогда G содержит такую окружность K, которья имеет следующие свойства*: (1) *e принадлежит K*; (2) *K содержит точно $2d$ вершин*; (3) *K содержит с каждой вершиной x и вершину $\bar{x}$*; (4) *для произвольных двух вершин x, y из K имеет место*: $\varrho_G(x, y) = \varrho_K(x, y)$.

Доказательство. Пусть e — произвольное ребро из $E(G)$. Обозначим его концы через u_0, u_1. На основании теоремы 2 имеет место $\varrho_G(u_1, \bar{u}_0) = d - 1$. Поэтому существует путь U длины $d - 1$, который соединяет вершины $u_1, \bar{u}_0$. Этот путь не может, очевидно, содержать ни u_0, ни $\bar{u}_1$. Обозначим вершины пути U в порядке прохождения по них, идя по U и выходя из u_1, символами $u_1, u_2, \ldots, u_{d-1}, \bar{u}_0$ и положим $\bar{u}_i = w_i$ для всех $i \in \{0, 1, 2, \ldots, d - 1\}$. Из доказательства теоремы 4 ясно, что существует путь W длины $d - 1$, по которому проходим через отдельные его вершины в следующем порядка: $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_{d-1}, u_0$. Пути U, W не могут иметь никакую общую вершину, потому что $\varrho_G(u_i, w_i) = d$. Поэтому если прибавим к путям U, W еще ребро e и ребро, соединяющее вершины $\bar{u}_0, \bar{u}_1$, то получим, очевидно, окружность K, которая обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема 6. *Во всяком S-графе существует такой автоморфизм, который обменивает пары противоположных элементов.*

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теорем 2, 3, 4, 5 и из рассуждений, проведенных при их доказательстве.

Замечание 4. Из теоремы 6 и из рассуждений, проведенных при доказательствах теорем 4 и 5, также следует: Всякий S-граф можно реализовать в E_3 так, что вершинами будут точки, а ребрами будут простые дуги, соединяющие соответствующие точки (причем никаких два ребра не пересекаются), и таким образом осуществленный комплекс будет центрально симметрическим. Этот факт позволил нам ввести термин центрально симметрический граф.

Лемма 2. *Пусть G — S-граф с диаметром $d > 2$, тогда для произвольных двух различных вершин x, y имеет место*: $O_G(x) \neq O_G(y)$.

Доказательство. Предположим противное утверждению леммы, что существуют вершины x, y с одинаковой окрестностью. Очевидно, справедливо: $\varrho_G(x, y) = 2$, из чего вытекает (ввиду предположения $d > 2$) $\bar{x} \neq y$. В силу теоремы 2 для каждой вершины $v \in O_G(x)$ имеет место: $\varrho_G(\bar{x}, v) = d - 1$ и, поскольку любой путь из $\bar{x}$ до y должен проходить через вершину из $O_G(y) =$

$= O_G(x)$, также имеет место $\varrho_G(\bar{x}, y) = d$ что является противоречием, потому что y не может принадлежать к $M_G(\bar{x})$, если G — S-граф и $x \neq y$. Это доказывает лемму.

Определим на множестве всех нами исследованных графов бинарную операцию умножения так: Пусть F, G — два графа; $V(F) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $V(G) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. О графе H будем говорить, что он является произведением графов F, G (записываем $H = F \times G$), если $V(H) = \{v_{i,j}\}$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ и имеет место: вершина $v_{i,j}$ в H соединена ребром с вершиной $v_{r,s}$ тогда и только тогда, когда $i = r$ и w_j соединена в G ребром с w_s, или когда $j = s$ и u_i соединена в F ребром с вершиной u_r. Очевидно, таким образом определенная операция коммутативна и ассоциативна. Поэтому будем писать $F \times F = F^2$; $F \times F^2 = F^3$; ... положим также $F^1 = F$. Если C^1 — граф, содержащий две вершины и соединяющее их ребро, то для произвольного натурального числа справедливо: C^n — граф n-мерного куба.

Прямо из определения произведения $H = F \times G$ следует: подграф F_j (где j — определенно выбранное число из $\{1, 2, \ldots, n\}$ графа H, содержащий все вершины $v_{i,j}$ вместе с соединяющими их ребрами, изоморфный F и аналогично подграф G_i (при определенно выбранном $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$), содержащий все вершины $v_{i,j}$ вместе с соединяющими их ребрами, изоморфный G. О ребрах из F_j (соотв. из G_i) будем говорить так, что они параллельны F (соотв. G). Очевидна справедливость следующего утверждения:

Лемма 3. *Произвольное ребро из $H = F \times G$ параллельно или F, или G.*

Теорема 7. *Всякий S-граф с диаметром 1 изоморфен C^1, а всякий S-граф с диаметром 2 изоморфен C^2.*

Доказательство. Граф. с диманетром 1 — полный граф, имеющий наименее две вершины. Если этот граф должен быть S-графом, то должен быть четным графом (смотри лемму 1), а таким является лишь граф C^1.

Известно, что каждый летный граф с диаметром 2 можно построить следующим путем: к данным двум непустым классам вершин X, Y прибавим ребра так, чтобы имело место: каждые две вершины, принадлежащие к различным классам $\in \{X, Y\}$, соединены ребром и никакие две вершины из того самого класса ве соединены ребром. В таком-то графе две различные вершины, принадлежащие к одному и тому самому классу разбиения $\{X, Y\}$, имеют расстояние 2. Если же это должен быть S-граф, то должно быть $|X| = |Y| = 2$ (смотри теорему 4). Значит: всякий S-граф с диаметром 2 изоморфен C^2. Итак, доказательство окончено.

Лемма 4. *Пусть $H = F \times G$ и пусть $V(F) = \{u_i\}$, $V(G) = \{w_j\}$, $V(H) = \{v_{i,j}\}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; тогда для произвольной пары вершин $v_{i,j}$, $v_{r,s}$ из $V(H)$ имеет место: $\varrho_H(v_{i,j}, v_{r,s}) = \varrho_F(u_i, u_r) + \varrho_G(w_j, w_s)$.*

Доказательство. Прямо из определения произведения графов следует: кратчайший путь из $v_{i,j}$ до $v_{r,j}$ (и также само кратчайший путь из $v_{i,s}$ до $v_{r,s}$) имеет длину $\varrho_F(u_i, u_r)$, а все его ребра праллельны F. Кратчайший путь из $v_{i,j}$ до $v_{i,r}$ (а также само из $v_{r,j}$ до $v_{r,s}$) имеет длину $\varrho_G(w_j, w_s)$, а все его ребра параллельны G. Следовательно, $\varrho_H(v_{i,j}, v_{r,s}) \leqq \varrho_F(u_i, u_r) + \varrho_G(w_j, w_s)$. Поскольку при переходе через одно ребро не могут измениться оба индекса в обозначении вершины из H, то из этого сразу следует, что там может быть только равенство. Тем самым лемма доказана.

Теорема 8. *Если G_1, G_2 — S-графы, то $G_3 = G_1 \times G_2$ тоже S-граф. Пусть d_i ($i = 1, 2, 3$) — диаметр графа G_i, тогда имеет место*: $d_3 = d_1 + d_2$.

Доказательство. Теорема является прямым следствием леммы 4 и определения произведения графов.

Лемма 5. Пусть G — произвольный четный связный граф и пусть $\{U, W\}$ такое разбиение множества $V(G)$, что каждое ребро из $E(G)$ соединяет вершины, принадлежащие к различным классам данного разбиения, тогда для каждой пары $x, y \in V(G)$ справедливо: $\varrho_G(x, y)$ — нечетное число тогда и только тогда, когда x, y принадлежат к различным классам разбиения $\{U, W\}$.

Доказательство очевидно.

Условимся: Разбиение $\{U, W\}$ множества $V(G)$ с выше приведенными свойствами в лемме 5 будем в дальнейшем обозначать символом $Z(G)$.

Далее условимся: Пусть n — натуральное число. Будем обозначать символом R_n граф, для которого имеет место: (1) $V(R_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$; (2) каждая вершина x_i в R_n соединена ребром с каждой вершиной y_j, где $i \neq j$, и никакое другое ребро R_n уже не содержит.

Теорема 9. *Пусть n — натуральное число >2, тогда R_n — регулярный S-граф ($n - 1$)-ой степени, диаметр которого 3, и кжадый S-граф с диаметром 3 изоморфен некоторому R_m, где $m > 2$.*

Доказательство. Прямо из построения графа R_n ясно, что при $n > 2$ R_n — связный четный граф, в котором всякая вершина ($n - 1$)-ой степени и в котором для всех $i \neq j$ имеет место: $\varrho_{R_n}(x_i, y_j) = 1$; $\varrho_{R_n}(x_i, x_j) = \varrho_{R_n}(y_i, y_j) = 2$; $\varrho_{R_n}(x_i, y_i) = 3$ (т.е.: $y_i = \bar{x}_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$). Поэтому R_n — S-граф, имеет диаметр 3 и является регулярным графом ($n - 1$)-ой степени. Пусть теперь G — S-граф с диаметром 3. Поскольку расстояние между вершинами, принадлежащими к различным классам разбиения $Z(G) = \{U, W\}$, число нечетное и диаметр 3, то оно должно быть или 1, или 3 (смотри лемму 5). Но к произвольной вершине $v \in V(G)$ существует в S-графе с диаметром 3 одна и только одна вершина $\bar{v}$, принадлежащая к иному классу разбиения $Z(G)$ и такая, что $\varrho_G(v, \bar{v}) = 3$.

Поэтому каждая вершина из U соединена ребром с каждой вершиной из W, за исключением одной (противоположной) вершины, а никакие другие ребра в G не встречаются. Следовательно, G изоморфен R_m и, поскольку R_1, R_2 не связные, должно быть $m > 2$, что и нужно было доказать.

Лемма 6. *Пусть G — S-граф, а d его диаметр. Для разбиения $Z(G) = \{U, W\}$ имеет место*: $[d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)] \Rightarrow [|U| \equiv 0$ (мод 2); $|W| \equiv 0$ (мод 2)]; $[d \equiv 1$ (мод 2)] $\Rightarrow [|U| = |W|]$.

Доказательство. Пусть d — четное число. На основании леммы 5 для произвольной вершины $v \in V(G)$ справедливо: v, $\bar{v}$ принадлежат к одному и тому же самому классу разбиения $Z(G)$. Отсюда вытекает, что как U, так и W должны содержать четное число элементов. Если d — нечетное число, то тогда имеет место: v, $\bar{v}$ принадлежат к различным классам разбиения $Z(G)$. Из этого сразу следует, что U и W имеют одинаковое число элементов. Тем самым доказательство закончено.

Лемма 7. *Пусть G — S-граф с диаметром 4. Пусть $Z(G) = \{U, W\}$ и пусть x — произвольная вершина из U, тогда $\{O_G(x), O_G(\bar{x})\}$ — разбиение множества W на два класса с одинаковым числом элементов.*

Доказательство. Ввиду леммы 5 $\varrho_G(x, y)$ — не четное число тогда и только тогда, когда y принадлежит к W. Тогда это число или 1, или 3. По преположению $\varrho_G(x, \bar{x}) = 4$. Следовательно, имеет место: $[y \in O_G(x)] \Rightarrow [\varrho_G(x, y) = 1]$; $[y \in O_G(\bar{x})] \Rightarrow [\varrho_G(x, y) = 3]$. Так как во всяком S-графе $|O_G(x)| = |O_G(\bar{x})|$, то ввиду выше приведенного справедливость леммы очевидна.

Лемма 8. *Пусть p — натуральное число >1. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2p}\}$ и пусть $R = \{\{r_1, \ddot{r}_1\}, \{r_2, \ddot{r}_2\}, \ldots, \{r_s, \ddot{r}_s\}\}$ — множество всех таких разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ на два класса по p элементов, что имеет место: никакой класс никакого из этих разбиений не содержит два числа, сумма которых равна $2p + 1$. Пусть граф H обладает следующими свойствами*: (1) $V(H) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2p}, w_1, w_2, \ldots, w_{2s}\}$; (2) *вершина u_i соединена в H ребром с вершиной w_j тогда и только тогда, когда число i принадлежит к классу r_j разбиения из R, причем положим $r_j = \ddot{r}_{2s+1-j}$, если $j > s$, а другие ребра H уже не содернит Тогда имеет место*: *H — S-граф с диаметром 4 и справедливо*: $\bar{u}_i = u_{2p+1-i}$; $\bar{w}_i = w_{2s+1-i}$.

Доказательство. Очевидно, справедливо следующее: $s = 2^{p-1}$; H — четный граф; $Z(H) = \{U, W\}$, где $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2p}\}$; $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{2s}\}$. Поскольку $p \geqq 2$, то и $s \geqq 2$, а, следовательно, R содержит наименее два разбиения.

Пусть $\{r_i, \ddot{r}_i\} \neq \{r_j, \ddot{r}_j\}$ – произвольные разбиения из R. Класс r_i (а также класс $\ddot{r}_i$) имеет наименее один общий элемент с классом r_j, а также с классом $\ddot{r}_j$. Отсюда вытекает, что две произвольные вершины w_i, w_j из W такие, для которых $j \neq 2s + 1 - i$, имеют в окрестности общую вершину, и, значит, тогда $\varrho_H(w_i, w_j) = 2$, в то время как $\varrho_H(w_i, w_{2s+1-i}) = 4$. Подобным рассуждением найдем, что имеет место $\varrho_H(u_i, u_j) = 2$ для $j \neq 2p + 1 - i$ и $\varrho_H(u_i, u_{2p+1-i}) = 4$. Кроме того, для каждых двух вершин $x \in U$, $y \in W$ справедливо $\varrho_H(x, y) \in \{1, 3\}$. Из построения графа H также вытекает, что $|M_H(x)| = 1$ для каждой вершины $x \in H$. Поскольку H обладает двумя свойствами Q-графа, то из выше приведенного следует, что H – S-граф с диаметром 4 и что $\bar{u}_i = u_{2p+1-i}$; $\bar{w}_j = w_{2s+1-j}$, что и нужно было доказать.

Теорема 10. *Пусть G – S-граф с диаметром 4, $Z(G) = \{U, W\}$, тогда $|U|$, а также $|W|$ являются четными числами ($|U| = 2p$; $|W| = 2q$) и имеет место: (1) $p \geqq 2$; $q \geqq 2$; (2) q – степень каждой вершины из U и p – степень каждой вершины из W; (3) $p \leqq 2^{q-1}$; $q \leqq 2^{p-1}$. К всякой паре натуральных чисел $p \leqq q$, которые обладают свойствами (1), (3), существует S-граф F с диаметром 4, в котором вершины одного класса из $Z(F)$ имеют степень p, а вершины второго класса – степень q.*

Доказательство. В силу леммы 6 для S-графа с диаметром 4 имеет место: $|U| \equiv |W| \equiv 0$ (мод 2). Следовательно, пусть $|U| = 2p$; $|W| = 2q$. На основании теоремы 5 G содержит окружность с 8 вершинами. Поэтому $p \geqq 2$; $q \geqq 2$. Ввиду леммы 7 для каждой вершины $x \in U$ имеет место $|O_G(x)| = \frac{1}{2}|W| = q$. Значит, q – ее степень. Аналогично доказывается, что p – степень вершины из W.

Пусть w – произвольная вершина из W. В силу леммы 5 и $\bar{w}$ принадлежит к W. На основании леммы 7 $\{O_G(w), O_G(\bar{w})\}$ – разбиение множества U на два класса с одинаковым числом элементов. Для произвольной вершины $u \in U$, очевидно, справедливо: $u, \bar{u}$ принадлежат к различным классам разбиения $\{O_G(w), O_G(\bar{w})\}$ (либо в противном случае расстояние между u и $\bar{u}$ было бы 2, что противоречит теореме 4). Из множества U можно образовать именно p пар вершин таких, что их расстояние равно 4, а таких разбиений множества U на два класса по p элементов, что никакая из только что умпомянутых пар не является подмножеством одного и того же самого класса разбиения, есть точно 2^{p-1}. Ввиду леммы 2 никакие две различные вершины S-графа с диаметром большим чем 2, не имеют одной и той же самой окрестности. Отсюда следует, что $q \leqq 2^{p-1}$. Аналогично рассуждая о разбиениях множества W, найдем, что имеет место $p \leqq 2^{q-1}$.

Пусть теперь p, q – натуральные числа такие, что $p \geqq 2$; $q \geqq 2$; $p \leqq q$; $q \leqq 2^{p-1}$. Обозначим символом I_p так-то определенный граф: $I_p = C^1 \times R_p$. В силу теорем 7, 8, 9 I_p – S-граф такой, что его диметр равен 4 и каждая вершина p-ой степени. Из первой части доказательства следует, что граф H из леммы 8 содержит подграф H_0, изоморфный I_p. Этот подграф содержит все вершины из $U \in Z(H)$ и вместе с каждой вершиной $w_i \in W \in Z(H)$ содержит также вершину w_{2s+1-i}. Образуем последовательность $H_0, H_1, \ldots, H_{s-p}$ подграфов графа H следующим образом: H_k возникает из H_{k-1} прибавлением такой пары вершин w_j, w_{2s+1-j} из W, которые не принадлежат к H_{k-1}, и прибавлением всех ребер из $E(H)$, которые инцидентны этим вершинам. Тогда, очевидно, для произвольного графа H_i из образованной последовательности имеет место: H_i — S-граф с диаметром 4, а для разбиения $Z(H_i) = \{U_i, W_i\}$ имеет место: всякая вершина из $U_i = U$ q-той степени (где $q = p + i$) и всякая вершина из W_i p-той степени. Из выше приведенного справедливость теоремы очевидна.

Из проведенных рассуждений очевидно следующее: С увеличением диаметра не только увеличивается число различных неизоморфных S-графов, но увеличивается и их разнообразие. В то время как для $d \in \{1, 2\}$ существует только один S-граф (смотри теорему 7), для $d = 3$ уже существует их бесконечно много. Каждый из них является регулярным графом; для данной степени вершин существует только один S-граф с диаметром 3 (смотри теорему 9). Уже для диаметра 4 степень вершин S-графа G, принадлежащих к различным классам разбиения $Z(G) = \{U, W\}$, может быть различна (p для всех вершин из U и q для всех вершин из W — смотри теорему 10), Но тогда граф $H = C^1 \times G$ обладает этим свойством: диаметр его равен 5 и в каждом из классов разбиения $Z(H)$ встречаются вершины различной степени. Ввиду требовательности исследования S-графов с большим (которая следует из выше упомянутого разнообразия) мы ограничились исчерпывающими исследованием только для случаев $d < 5$. Однако, мы установили как некоторые их свойства при произвольном диаметре (смотри теоремы 2, 4, 5), так и метод построения S-графов с произвольным большим d (смотри теорему 8). В связи с этим возникают следующие, до сих пор не решенные вопросы:

Вопрос 1. Какими дальнейшими свойствами обладают и как можно построить все примитивные S-графы, т.е. такие S-графы, которые не являются произведением двух S-графов?

Примером примитивного S-графа является окружность с $2n$ вершинами (обозначение K_{2n}), где n — целое число >2; граф R_m при $m \geqq 5$, дальше каждый S-граф G с диаметром 4, котором для разложения $Z(G) = \{U, W\}$ имеет место: $|U| \neq |W|$.

Другим открытым, но, кажется, довольно важным вопросом является следующий вопрос:

Вопрос 2. Каким свойствами обладает класс всех тех S-графов, которые удовлетворяют требованиям теоремы 1?

Очевидно, что к этому классу принадлежат графы $C^1, K_6, K_8, \ldots$ и произведение любого числа их. Не известно, существует ли и другой, отличный от таким образом построенного графа, обладающий требуемыми свойствами. Ввиду большого разнообразия S-графов с высшим диаметром оказывается целесообразным заняться дальнейшим исследованием данного класса S-графов, хотя бы уже ввиду выше упомянутой важной связи их с теорией структур.

Адрес автора: Bratislava, Šmeralova 2, ČSSR (Prírodovedecká fakulta UK).