Izu Vaisman

К геометрии многообразий флагов в симплектическом пространстве

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 2, 377–387

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100837

Чехословацкий математический журнал, т. 18 (93) 1968, Прага

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

IZU VAISMAN (Изу Вайсман), Iaşi

(Поступило в редакцию 24/II 1967г.)

1. Известно [1, 3], что проективно-симплектическое пространство это проективное пространство $(2n - 1)$-измерений, в котором выбран, в качестве *абсолюта*, неспециальный комплекс прямых. Это пространство будем обозначать через Sp_{2n-1} и слово проективно будет опускаться.

Относительно проективного репера, абсолют дается уравнением

$$g_{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{det. } |g_{\alpha\beta}| = 1; \ \alpha, \beta = 1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ кососиметрический, невырожденный, проективный тензор [3] и $p^{\alpha\beta}$ грассмановы координаты прямой.

Группой движений пространства будем считать группу проективных преобразований, при которых тензор $g_{\alpha\beta}$ инвариантен, т.е. *симплектическую группу*.

Для двух точек $A(x^\alpha)$, $B(y^\alpha)$ определим кососиметрическое, *скалярное произведение*

$$\langle A, B\rangle = g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta . \tag{2}$$

Тогда соотношение *сопряженности* этих точек определяется условием

$$\langle A, B\rangle = 0 , \tag{3}$$

т.е.

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0 . \tag{4}$$

Это позволяет определить естественным образом соотношение *сопряженности* различных геометрических образов [3].

Проективный репер $\{A_\alpha\}$ называется *симплектическим* если

$$\langle A_\alpha, A_\beta\rangle = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = 2\sigma - 1, \ \beta = 2\sigma \ (\sigma = 1, \ldots, n), \\ 0 & \text{в других случаях с } \alpha < \beta . \end{cases} \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем употреблять только симплектические реперы. Тогда будет удобно сделать обозначения

(6) $$A_\sigma = A_{2\sigma-1}, \quad B_\sigma = A_{2\sigma} \quad (\sigma = 1, \ldots, n),$$

при которых условия (5) станут

(7) $$\langle A_\sigma, A_\tau \rangle = \langle B_\sigma, B_\tau \rangle = 0, \quad \langle A_\sigma, B_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}.$$

Уравнения движения такого репера имеют вид

(8) $$\mathrm{d}A_\sigma = \omega_\sigma^\tau A_\tau + \overline{\omega}_\sigma^\tau B_\tau, \quad \mathrm{d}B_\sigma = \vartheta_\sigma^\tau A_\tau + \eta_\sigma^\tau B_\tau,$$

где $\omega, \overline{\omega}, \vartheta, \eta$ — формы Пфаффа; они удовлетворяют условиям

(9) $$\overline{\omega}_\sigma^\tau = \overline{\omega}_\tau^\sigma, \quad \vartheta_\sigma^\tau = \vartheta_\tau^\sigma, \quad \omega_\sigma^\tau + \eta_\tau^\sigma = 0,$$

которые являются следствиями соотношений (7).

Дифференцируя (8), получаем уравнения структуры

(10) $$\mathrm{d}\omega_\sigma^\lambda = \omega_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \overline{\omega}_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda, \quad \mathrm{d}\overline{\omega}_\sigma^\lambda = \omega_\sigma^\tau \wedge \overline{\omega}_\tau^\lambda + \overline{\omega}_\sigma^\tau \wedge \eta_\tau^\lambda,$$
$$\mathrm{d}\vartheta_\sigma^\lambda = \vartheta_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \eta_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda.$$

$\mathrm{d}\eta_\tau^\sigma$ получаются при помощи (9).

Пусть сейчас точки M_i $(i = 1, \ldots, h + 1)$, определяющие h-плоскость пространства Sp_{2n-1}. Ее *ранг* есть ранг матрицы $h_{ij} = \langle M_i, M_j \rangle$ и он является четным числом. Плоскость называется *неособой*, если её ранг имеет максимально возможное значение. Следует, что нечетномерные неособые плоскости являются симплектическими пространствами со структурой определенной тензором h_{ij}. Такое подпространство называется еще *симплектическим*.

Каждой h-плоскости соответствует сопряженная плоскость с $2n - h - 2$ измерений. В случае нечетномерной, неособой плоскости, пересечение с сопряженной плоскостью пусто, а объединение есть Sp_{2n-1}, а в случае четномерной неособой плоскости пересечение есть точка, которую назовем *полюс* данной плоскости.

Напомним еще, что две прямые (A, B) и (C, D) симплектического пространства имеют инвариант [1]

(11) $$W = \frac{\langle A, D \rangle \langle C, B \rangle + \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, B \rangle \langle C, D \rangle}{\langle A, D \rangle \langle C, B \rangle + \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle}.$$

Следуя методам Картана можно рассматривать также пространства с проективно-симплектической связностью. Эти пространства были рассмотрены в [3]. Много из нижеследующих вещей переносятся без трудности на случай таких пространств, употребляя ковариантное производное; по этому мы на таких обобщениях не остановимся.

2. Назовем *флагом* в симплектическом пространстве Sp_{2n-1} совокупность вида

(12) $$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_{2n-1} = Sp_{2n-1}\,,$$

образованную из точки P_0 и из неособых, линейных подпространств P_k, k-измерений, пространства Sp_{2n-1}. В дальнейшем, флаг будет обозначаться одной буквой, например F и плоскость P_k назовем *k-плоскостью флага.*

Пусть дан флаг F с плоскостями (12). Тогда каждая плоскость P_{2h} флага имеет полюс A_{h+1} $(h = 0, \ldots, n-1)$. Точки A_{h+1} назовем *центрами флага* F. Из определении полюса плоскости следует, что

(13) $$A_{h+1} \in P_{2h}\,, \quad A_{h+1} \overline{\in} P_{2h-1}$$

и это показывает, что центры флага являются линейно независимыми точками.

Другие очевидные, но важные соотношения суть

(14) $$\langle A_i, A_j \rangle = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,.$$

Учитываем сейчас прямые d_{h+1} $(h = 0, \ldots, n-1)$, где d_{h+1} есть сопряженная прямая плоскости P_{2h-1} в симплектическом пространстве P_{2h+1}; в случае $h = 0$, P_{2h-1} есть (условно) пустое множество и $d_1 = P_1$. Мы скажем, что прямые d_{h+1} являются *осями флага* F.

Очевидно, оси флага F являются неособыми, т.е. симплектическими прямыми, проходящими соответственно через центры A_{h+1}. Видно еще, что каждая точка прямой d_h сопряжена каждой точке прямой d_k $(h \neq k;\ h, k = 1, \ldots, n)$. Действительно, достаточно проверить это только для $k \leqq h - 1$. Но тогда имеем $2k - 1 \leqq 2h - 3$, $P_{2k-1} \subseteq P_{2h-3}$, $d_k \subseteq P_{2k-1} \subseteq P_{2h-3}$, а d_h сопряжена к P_{2h-3}, что доказывает наше утверждение. Доказательство верно и в случае $k = 1$.

Заметим еще соотношения

(15) $$d_1 \cup d_2 = P_3, \ldots, P_{2h-1} \cup d_{h+1} = P_{2h+1}, \ldots, P_{2n-3} \cup d_n = Sp_{2n-1}\,,$$

в которых значок „$\cup$“ обозначает сумму линейных подпространств. Из этих соотношений получается

(16) $$\bigcup_{h=1}^{n} d_h = Sp_{2n-1}\,.$$

Пусть сейчас, на каждой оси d_h флага, учитываем точку $B_h \neq A_h$. Тогда $2n$ точки $\{A_h, B_h\}$ являются линейно независимыми, так как отрицание этого утверждения противоречит соотношении (16). Более этого, имеем

(17) $$\langle B_h, B_k \rangle = 0 \quad (h, k = 1, \ldots, n)$$

и

(18) $$\langle A_h, B_k \rangle = 0 \quad (h \neq k;\ h, k = 1, \ldots, n)\,.$$

Следует, что при соответствующем нормировании точек A_h, B_k, эти точки образуют симплектический репер. Такие реперы будем называть *ассоциированными* флагу F.

Если $\{A_h, B_h\}$ – ассоциированный репер флага, плоскости флага суть

$$(19)\qquad P_{2h-2} = \{A_1, \dots, A_h, B_1, \dots, B_{h-1}\}, \quad P_{2h-1} = \{A_1, \dots, A_h, B_1, \dots, B_h\}$$
$$(h = 1, \dots, n).$$

Заметим еще, что сопряженные плоскости к плоскостям данного флага образуют *сопряженный флаг*, который имеет центры и оси

$$(20)\qquad \bar{A}_h = A_{n-h}, \quad \bar{d}_h = d_{n-h} \quad (h = 1, \dots, n).$$

Соотношения (15) показывают, что оси флага определяют единственным образом его нечетномерные плоскости. Центры флага определяют его четномерные плоскости: они являются сопряженными плоскостями этих центров. При этом, порядок центров и осей является существенным. По этому флаг определяется единственным образом через его центры и оси.

Следует, что ассоциированные реперы флага получаются друг с друга при помощи симплектического преобразования определенного матрицей вида

$$(21)\qquad \begin{pmatrix} \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \varrho_n & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & 0 & 1/\varrho_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n & 0 & \dots & 1/\varrho_n \end{pmatrix},$$

и что семейство ассоциированных реперов определяет соответствующий флаг.

Из предыдущих соображений видно, что симплектическая группа транзитивно действует над флагами. Следует, что если обозначим через GSp_{2n-1} симплектическую группу, через G_0 $2n$-параметрическую группу матриц (21) и через $F(Sp_{2n-1})$ множество флагов пространства Sp_{2n-1}, то это последнее множество отождествляется с однородным пространством

$$(22)\qquad F(Sp_{2n-1}) = GSp_{2n-1}/G_0.$$

Это однородное пространство будем называть *многообразием флагов* симплектического пространства Sp_{2n-1}. k-мерное подмногообразие многообразия флагов будем называть *k-параметрическим флаговым многообразием.*

3. В настоящей работе, мы будем рассматривать однопараметрическое флаговое многообразие VF_1 пространства Sp_{2n-1}.

В этом случае, центры A_h описывают кривые C_h $(h = 1, \dots, n)$ и, в обще принятых условиях регулярности, если F есть фиксированный флаг из VF_1 с центрами A_h, эти кривые имеют касательные t_h в точках A_h.

Пусть Q_{2n-2}^{h+1} сопряженная гиперплоскость точки A_{h+1} (в симплектической структуре Sp_{2n-1}) и R_{2n-3}^{h+1} сопряженное пространство касательной t_{h+1}. Так как t_{h+1} проходит через A_{h+1}, имеем $R_{2n-3}^{h+1} \subseteq Q_{2n-2}^{h+1}$. Ось d_h сопряжен точки A_{h+1} и, поэтому, мы имеем также $d_h \subseteq Q_{2n-2}^{h+1}$. Но отсюда следует что d_h встречает R_{2n-3}^{h+1}. В дальнейшем мы будем требовать чтобы многообразие VF_1 было *регулярным* в таком смысле, что пересечение прямой d_h с плоскостью R_{2n-3}^{h+1} было ровно точка. Эту точку будем обозначать через B_h. Построение точек B_h верно для $h = 1, \ldots, n$, если условимся, что $A_{n+1} = A_1$.

Таким образом мы получили $2n$ точки $\{A_h, B_h\}$, которые могут служить вершинами ассоциированного репера флага F. Дальше мы укажем на инвариантное нормирование этих точек. Для этого учитываем сначала произвольное нормирование. Это даст нам однопараметрическое семейство проективных реперов, зависящих, например, от параметра t, так что их инфинитезимальное перемещение определяется формулами (8) с выполнением формул (7), кроме последних из них для $\sigma = \tau$, и соответствующих следствий (9).

Если расчитываем теперь, при помощи формул (11), главную часть инварианта W прямых $(A_1, B_1) = P_1$ и $(A_1 + dA_1, B_1 + dB_1)$, получится

$$W \simeq \sum_{h=2}^{n} (\overline{\omega}_1^h \vartheta_1^h - \omega_1^h \eta_1^h) = E(t)\, \mathrm{d}t^2 \,, \tag{23}$$

где $E(t)$ есть функция от t.

Мы будем предполагать, как новое условие регулярности, что $E(t) > 0$. Тогда условие

$$E(t)\, \mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}\sigma^2 \tag{24}$$

определяет инвариантный параметр многообразия VF_1, которую мы назовем *симплектическим параметром* этого многообразия.

Заметим, что условие $E(t) > 0$ не является очень ограничительным, так как есть и другие возможности для выбора инвариантного параметра, например таким параметром является симплектическая дуга [3] произвольной из кривых C_h. При этом все следующие соображения существенно не изменяются.

Дальше мы будем все-таки, для простоты, требовать нового, ограничительного, условия регулярности: чтобы все кривые C_h были кривыми первого рода [3], т.е. их касательные t_h были симплектическими прямыми. Тогда мы имеем

$$\Lambda_h = \left\langle A_h, \frac{\mathrm{d}A_h}{\mathrm{d}\sigma} \right\rangle \neq 0 \quad (h = 1, \ldots, n) \tag{25}$$

и будем нормировать точки A_h при условии

$$\Lambda_h = \operatorname{sign} \Lambda_h = \varepsilon_h \quad (h = 1, \ldots, n) \,. \tag{26}$$

Эти условия имеют смысл потому что, как легко можно видеть, знак A_h инвариантен при умножении A_h с произвольным множителем ϱ.

Условие (26) определяет нормирование точек A_h до знака, но изменение знака не изменяет, до знака, компоненты инфинитезимального перемещения репера, т.е. такое изменение не является существенным.

Таким образом, предыдущие соображения устанавливали *репер Френе* ассоциированный флагу F регулярного многообразия VF_1: это репер $\{A_h, B_h\}$ с соответствующим нормированием вершин. Мы получили также *инвариантный параметр* σ. Дальше будем заниматься соответствующими *формулами Френе*.

Эти формулы, т.е. формулы движения репера Френе, получаются из формул (8), если поставить

$$(27) \qquad \omega_\sigma^\tau = p_\sigma^\tau(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad \bar{\omega}_\sigma^\tau = q_\sigma^\tau(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad \vartheta_\sigma^\tau = t_\sigma^\tau(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad \eta_\sigma^\tau = s_\sigma^\tau(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

При этом мы должны еще учитывать условия (9), которые дают

$$(28) \qquad q_\sigma^\tau = q_\tau^\sigma\,, \quad t_\sigma^\tau = t_\tau^\sigma\,, \quad p_\sigma^\tau + s_\tau^\sigma = 0\,,$$

условия

$$(29) \qquad \left\langle B_h, \frac{\mathrm{d}A_{h+1}}{\mathrm{d}\sigma}\right\rangle = 0 \quad (h = 1, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1)\,,$$

которые вытекают из выбора точек B_h и которые дают

$$(30) \qquad p_h^{h-1} = 0 \quad (h = 2, \ldots, n)\,, \quad p_1^n = 0\,,$$

условие (24), которое дает

$$(31) \qquad \sum_{h=2}^{n} (q_1^h t_h^1 + p_1^h p_h^1) = 1$$

и условия нормирования (26), которые дают

$$(32) \qquad q_h^h = \varepsilon_h \quad (\text{не суммировать})\,.$$

Это значит, что искомые формулы Френе суть формулы

$$(33) \qquad \frac{\mathrm{d}A_h}{\mathrm{d}\sigma} = p_h^k A_k + q_h^k B_k\,, \quad \frac{\mathrm{d}B_h}{\mathrm{d}\sigma} = t_h^k A_k + s_h^k B_k\,,$$

с выполнением условий (28), (30), (31) и (32).

Функции $p_h^k(\sigma)$, $q_h^k(\sigma)$, $t_h^k(\sigma)$, $s_h^k(\sigma)$ являются инвариантами флагового многообразия VF_1 (конечно, они не являются независимыми) и знание этих инвариантов, выполняющих указанные условия, известным образом определяет флаговое многообразие VF_1 с точностью до симплектического преобразования.

Заметим еще, что, если плоскости P_h флагов F многообразия VF_1 являются соприкасающимися к кривой C_1, которая описывается точкой $P_0 = A_1$ этих флагов, наша теория дает теорию кривых первого рода в пространстве Sp_{2n-1}. В этом случае, нельзя употреблять параметр σ, а надо взять симплектическую дугу кривой C_1. Легко видеть, что репер Френе кривой, который получается здесь, не является тем же самым с тем, который был построен в [3].

4. Занимаемся сейчас некоторыми геометрическими вопросами относительно многообразий VF_1 симплектического пространства Sp_{2n-1}.

Так как репер Френе и параметр σ получились геометрическими способами, мы будем заниматься, во-первых, геометрическим истолкованием инвариантов. Для этого мы имеем общий способ вычисления отклонов от параллелизма Миллера [2, 3]. Таким образом получается

$$\left|A_1, A_i, B_1, \ldots, A_k, \hat{B}_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}\sigma}\right| = \iota_k q_i^k,$$

$$(34) \qquad \left|A_1, A_i, B_1, \ldots, \hat{A}_k, B_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}\sigma}\right| = \iota_k p_i^k \quad (i \neq k),$$

$$\left|A_1, B_i, B_1, \ldots, \hat{A}_k, B_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}\sigma}\right| = \iota_k t_i^k,$$

где первые члены являются детерминантами соответствующих $2n$ точек, значок „$\wedge$“ обозначает отсутствие соответствующей точки и, во вторых членах, не суммируется по k, а $\iota_k = 1$ для $k < i$, $\iota_k = -1$ для $k \geqq i$.

Отсюда, если $q_i^k = 0$, $p_i^k = 0\,(i \neq k)$ или $t_i^k = 0$, получаются соответствующие параллелизмы Миллера [3].

Другие результаты можно получить при помощи симплектических инвариантов пар прямых. Например, для пары прямых $(A_i, \mathrm{d}A_i/\mathrm{d}\sigma)$ и $(B_i, \mathrm{d}B_i/\mathrm{d}\sigma)$ получается из (11) и (33) инвариант W_i такой, что

$$(35) \qquad \varepsilon_i t_i^i = \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k \neq i}} (p_i^k p_k^i + q_i^k t_k^i)\left(\frac{1}{W_i} - 1\right),$$

где $i = 1, \ldots, n$ и по i не суммируется. В частном случае $i = 1$, (35) дает, имея в виду формулы (31)

$$(36) \qquad \varepsilon_1 t_1^1 = \frac{1}{W_1} - 1\,.$$

Дальше будем устанавливать соотношения между инвариантами многообразия VF_1 и инвариантами кривой C_1, которая описывается точками P_0 флагов из VF_1. Мы уже знаем, что C_1 имеет род 1 [3] и будем употреблять вместо σ симплектическую дугу s кривой C_1 [3].

Пусть $\{M_h, N_h\}$ $(h = 1, \ldots, n)$ репер Френе кривой C_1 [3]. Тогда формулы движения этого репера имеют вид [3]

$$(37) \qquad \frac{\mathrm{d}M_h}{\mathrm{d}s} = \mu_h N_h\,, \quad \frac{\mathrm{d}N_h}{\mathrm{d}s} = M_{h-1} + \zeta_h M_h + M_{h+1}\,, \quad (M_0 = M_{n+1} = 0)\,.$$

Пусть

$$(38) \qquad \begin{aligned} A_h &= u_h^i M_i + v_h^i N_i\,, \quad M_i = a_i^k A_k + b_i^k B_k\,,\\ B_h &= w_h^i M_i + z_h^i N_i\,, \quad N_i = c_i^k A_k + l_i^k B_k\,, \end{aligned}$$

формулы, выражающие связь между реперами $\{A_h, B_h\}$ и $\{M_h, N_h\}$. Так как преобразования (38) должны быть симплектическими, получается

$$(39) \qquad \sum_{i=1}^{n} (u_h^i v_k^i - u_k^i v_h^i) = \sum_{i=1}^{n} (w_h^i z_k^i - w_k^i z_h^i) = 0\,, \quad \sum_{i=0}^{n} (u_h^i z_k^i - v_h^i w_k^i) = \delta_{hk}$$

и соответствующие соотношения для a, b, c, l.

Дифференцируя сейчас (38) и употребляя формулы (33) и (37) получаются искомые формулы

$$(40) \qquad \begin{aligned} p_h^k &= \sum_{i=1}^{n} [\dot{u}_h^i a_i^k + \dot{v}_h^i c_i^k + u_h^i c_i^k \mu_i + v_h^i (a_{i-1}^k + \zeta_i a_i^k + a_{i+1}^k)]\,,\\ q_h^k &= \sum_{i=1}^{n} [\dot{u}_h^i b_i^k + \dot{v}_h^i l_i^k + u_h^i l_i^k \mu_i + v_h^i (b_{i-1}^k + \zeta_i b_i^k + b_{i+1}^k)]\,,\\ t_h^k &= \sum_{i=1}^{n} [\dot{w}_h^i a_i^k + \dot{z}_h^i c_i^k + w_h^i c_i^k \mu_i + z_h^i (a_{i-1}^k + \zeta_i a_i^k + a_{i+1}^k)]\,,\\ s_h^k &= \sum_{i=1}^{n} [\dot{w}_h^i b_i^k + \dot{z}_h^i l_i^k + w_h^i l_i^k \mu_i + z_h^i (b_{i-1}^k + \zeta_i b_i^k + b_{i+1}^k)]\,, \end{aligned}$$

где точка обозначает производные относительно s.

Эти формулы естественно называть *формулами Мение-Боне* для флагового многообразия VF_1 [3].

Следуя вновь [3] перейдем к другим геометрическим соображениям. Вводим дифференциальные операторы ${}_{(i)}\mathrm{d}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определенные формулами

$$(41) \qquad \frac{{}_{(i)}\mathrm{d}A_h}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{k=1}^{i} (p_h^k A_k + q_h^k B_k)\,, \frac{{}_{(i)}\mathrm{d}B_h}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{k=1}^{i} (t_i^k A_k + s_i^k B_k)\,, \ (h = 1, \ldots, i)\,.$$

Ясно, что такие формулы определяют проекции семейств геометрических образов, вдоль кривой C_1, из $\bar{P}^0_{2n-2i-1}$ на P^0_{2i-1}, где P^0_{2i-1} есть плоскость флага $F_0 \in VF_1$ и $\bar{P}^0_{2n-2i-1}$ есть ее сопряженная плоскость. По этому можно сказать, что формулы (41) определяют *связность* плоскостей P_{2i-1} из VF_1 и что ${}_{(i)}\mathrm{d}$ является соответствующим *ковариантным дифференциалом*.

Для точки $Q \in P_{2i-1}$, имеем

(42) $$Q = \sum_{k=1}^{i} (q^k A_k + q'^k B_k)$$

и, при помощи формул (41), получается

(43) $$\frac{{}_{(i)}\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{l=1}^{i} \{(\dot{q}^l + p_k^l q^k + t_k^l q'^k) A_l + (\dot{q}'^l + q_k^l q^k + s_k^l q'^k) B_l\},$$

где точки обозначают производные по σ. Скажем, что точки (42) *параллельны относительно связности* (41) если

(44) $$\frac{{}_{(i)}\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\sigma} = \lambda Q .$$

В частности, для $i = 1$, формулы (41) дают

(45) $$\frac{{}_{(1)}\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\sigma} = p_1^1 A_1 + \varepsilon_1 B_1 , \quad \frac{{}_{(1)}\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}\sigma} = t_1^1 A_1 - p_1^1 B_1 .$$

Если теперь

(46) $$Q = q^1 A_1 + q'^1 B_1 ,$$

получается

(47) $$\frac{{}_{(1)}\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\sigma} = (\dot{q}^1 + p_1^1 q^1 + t_1^1 q'^1) A_1 + (\dot{q}'^1 + \varepsilon_1 q^1 - p_1^1 q'^1) B_1$$

и условия параллельности являются

(48) $$\dot{q}^1 + p_1^1 q^1 + t_1^1 q'^1 = \lambda q^1 , \quad \dot{q}^1 + \varepsilon_1 q^1 - p_1^1 q'^1 = \lambda q'^1 .$$

Отсюда следует, что точки A_1 не являются параллельными относительно прямых P_1 из VF_1 а B_1 являются такими, если только $t_1^1 = 0$.

Рассмотрим теперь некоторые специальные многообразия VF_1.

Скажем, что многообразие VF_1 является *геодезическим*, если прямые P_1 многообразия совпадают. Это означает, что $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\sigma)[A_1, B_1] = \lambda[A_1, B_1]$, где $[A_1, B_1]$ обозначают плюкеровы координаты прямой P_1. Отсюда получается характеристика геодезических многообразий:

(49) $$p_1^k = q_1^k = t_1^k = s_1^k = 0 \quad (k = 2, \dots, n).$$

Следует, что эти многообразия не являются регулярными в предыдущем смысле.

Скажем, что многообразие VF_1 является *асимптотическим*, если плоскости P_2 являются соприкасающимися к кривой C_1. Из формул (33) получается

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}\sigma^2} = (\dot{p}_1^h + p_1^k p_k^h + q_1^k t_k^h) A_h + (\dot{q}_1^h + p_1^k q_k^h + q_1^k s_k^h) B_h$$

и это дает для асимптотических многообразий характеристические соотношения

$$(50)\qquad p_1^h = 0\,,\quad p_1^2 p_2^h + \varepsilon_1 t_1^h = 0 \quad (h = 3, \ldots, n)\,,$$
$$q_1^h = 0\,,\quad p_1^2 q_2^h - \varepsilon_1 p_h^1 = 0 \quad (h = 2, \ldots, n)\,.$$

Рассмотрим вновь флаговое многообразие VF_1. Точки A_i были центрами флагов этого многообразия, прямые d_i были их осями и мы дали геометрический способ построения точек $B_i \in d_i$. Мы можем теперь учитывать флаговое многообразие VF_1^*, для которого центрами флагов были бы точки $B_1, \ldots, B_n$ и осями $d_1, \ldots, d_n$ (в указанном порядке). Скажем, что многообразие VF_1^* получилось применением к VF_1 *преобразования* $*$. Последовательным применением этого преобразования получается последовательность флаговых многообразий

$$(51)\qquad VF_1,\ VF_1^*,\ VF_1^{**}, \ldots\,,$$

которую назовем *последовательностью* $*$ многообразия VF_1. Все многообразия этой последовательности имеют оси $d_1, \ldots, d_n$.

Многообразие VF_1 называется *циклическим порядка* $n - 1$, если n-ый член его последовательности $*$ совпадает с первым членом, т.е. с самым многообразием VF_1.

В качестве примера, установим условия, характеризующие циклические многообразия порядка 2. Для этого обозначим через t_{h+1}^*, где $h = 1, \ldots, n$ и индекс $n + 1$ надо считать равным индексу 1, касательные к кривым C_{h+1}^*, порожденным точками B_{h+1}. Предыдущие замечания об индексах остаются верными и в далнейших рассуждениях. Потом, пусть R_{2n-3}^{*h+1} сопряженные плоскости касательных t_{h+1}^*. Тогда, центрами флагов многообразия VF_1^{**} будут точки D_h пересечения прямых d_h с плоскостями R_{2n-3}^{*h+1} [1]). Следует, что такая точка D_h имеет вид

$$(52)\qquad D_h = \lambda_{(h)} A_h + \mu_{(h)} B_h$$

и выполняет условия

$$(53)\qquad \langle B_{h+1}, D_h \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}B_{h+1}}{\mathrm{d}\sigma}, D_h \right\rangle = 0\,.$$

Отсюда, при помощи фрмул Форене (33), получается (до множителя)

$$(54)\qquad D_h = t_{h+1}^h A_h + s_{h+1}^h B_h \quad (\text{не суммировать!})\,.$$

Сейчас видно, что циклические многообразия порядка 2, для которых $D_h \approx = A_h$, характеризуются условиями

$$(55)\qquad s_h^{h-1} = 0 \quad (h = 2, \ldots, n)\,,\quad s_1^n = 0\,,$$

[1]) Конечно, предполагается, что все многообразия последовательности $*$ являются регулярными.

или

$$p^h_{h-1} = 0 \quad (h = 2, \dots, n), \quad p^1_n = 0\,, \tag{55'}$$

Заметим еще, что формулы (54) дают геометрические истолкования для инвариантов t^h_{h+1}/s^h_{h+1}.

5. Сделаем также некоторые замечания относительно k-параметрических флаговых многообразий пространства Sp_{2n-1}.

Пусть VF_k такое многообразие. Для его изучения можно взять вдоль многообразия некоторое семейство симплектических реперов, ассоциированных флагам F из VF_k. Тогда, инфинитезимальное перемещение этих реперов определяется формулами (8), где $\omega, \bar{\omega}, \vartheta, \eta$ зависят от k параметров и удовлетворяют соотношениям (9) и уравнениям структуры (10). Предположим еще, что центры флагов F нормированы.

Тогда, переход к другому семейству ассоциированных реперов определяется формулами

$$\bar{A}_\sigma = A_\sigma\,, \quad \bar{B}_\sigma = \lambda_\sigma A_\sigma + B_\sigma \quad (\sigma = 1, \dots, n)\,, \tag{56}$$

где λ_σ — некоторые функции.

Теперь формулы (8) дают

$$\mathrm{d}\bar{A}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{n} (\omega^\tau_\sigma - \lambda_\tau \bar{\omega}^\tau_\sigma)\, \bar{A}_\tau + \bar{\omega}^\tau_\sigma \bar{B}_\tau\,. \tag{57}$$

Отсюда следует, что пфаффовы формы $\bar{\omega}^\tau_\sigma$ являются *инвариантными формами* многообразия VF_k. В виду их симметричности в (σ, τ), их число $n(n + 1)/2$.

Для определения канонического репера надо еще дать построение точек B_i на осях d_i флагов F. Точки B_i можно искать либо при некоторых условиях относительно λ_σ из (56), либо геометрическими средствами. Так, например, в случае $k = 2$, оси d_i образуют конгруэнции и можно связать B_i с фокусами этих конгруэнций.

Литература

[1] *Гейдельман Р. М.:* Основы теории семейств подпространств в симплектических пространствах. Мат. Сб. *55* (1961), стр. 7—34.

[2] *Gheorghiev Gh.* et *Popa I.:* Géométrie projective différentielle des variétés de cônes. C. R. Acad. Sci. Paris, T. *251*, p. 1208—1210.

[3] *Vaisman I.:* Courbes, configurations de Myller et distributions dans les espaces à connexion symplectique. An şt. Univ. Iaşi, T. X (1964), p. 417—436; *T. XI* (1965), p. 133—162.

Адресс автора: Яссы, Румыния. (Университет г. Яссы, Математический семинар им. А. Миллера.)