Alena Bílková

Sur la différentiabilité du repère de Frenet et sur le type différentiel d'une courbe dans l'espace E_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 2, 315–355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100835

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DU REPÈRE DE FRENET ET SUR LE TYPE DIFFÉRENTIEL D'UNE COURBE DANS L'ESPACE E_n

ALENA BÍLKOVÁ, Praha

(Reçu le 28 decembre 1966)

1. INTRODUCTION

Dans ses articles [1] et [2] E. ČECH a étudié la question de savoir comment on peut déterminer la classe différentielle des éléments du repère de Frenet d'une courbe si l'on connaît les classes différentielles des coefficients dans les formules de Frenet. Des problèmes semblables ont été envisagés aussi dans [3]–[7]. Le présent travail est étroitement lié aux articles [1], [2] et [7].

Nous allons commencer par faire un rappel des notions nécessaires; d'une part pour faciliter la lecture, d'autre part pour pouvoir changer certaines notations en les adaptant mieux à nos buts.

Définition 1.1. Nous disons que la classe différentielle d'une fonction $f(t)$ – nous la désignons par $\mathrm{cl}\, f$ – vérifie la relation $\mathrm{cl}\, f \geqq 0$ lorsque la fonction $f(t)$ est continue; qu'elle vérifie $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ lorsque $f(t)$ admet une dérivée de l'ordre r, $f^{(r)}(t)$, continue; $\mathrm{cl}\, f = \infty$ lorsque $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ pour tout $r > 0$; et enfin $\mathrm{cl}\, f = r$, lorsque $\mathrm{cl}\, f \geqq r$, mais non pas $\mathrm{cl}\, f \geqq r + 1$. La classe différentielle d'une fonction vectorielle ou encore la classe différentielle d'un tenseur (donc, en particulier, la classe différentielle d'un produit extérieur) est définie comme le minimum des classes différentielles de ses composantes. D'une façon plus générale encore, la classe différentielle d'un objet géométrique G est définie comme $\min_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{cl}\, G_\lambda$, où G_λ, $\lambda \in \Lambda$, sont les coordonnées non-homogènes de l'objet donné G.

Définition 1.2. Une courbe C, c'est-à-dire un ensemble de points $X = X(t)$, est dite régulière (et le paramètre t est alors dit régulier également) si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) $\mathrm{cl}\, X \geqq 1$;

b) il existe un système orthonormal de vecteurs $e_i = e_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et un système de fonctions scalaires $K_j = K_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, tels que

$$\operatorname{cl} e_i \geqq 1\,, \quad \operatorname{cl} K_j \geqq 0\,, \quad K_j \neq 0$$

pour toute valeur de t, les grandeurs X, e_i, $(i = 1, \ldots, n)$ et K_j $(j = 0, \ldots, n - 1)$ étant liées par les formules de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1 \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = -K_{i-1}e_{i-1} + K_i e_{i+1}\,, \quad 2 \leqq i \leqq n - 1\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}e_n}{\mathrm{d}t} = -K_{n-1}e_{n-1}\,.$$

En particulier, pour $t = s$ où s est la longuer de l'arc de la courbe, on a

$$K_0 = 1\,, \quad K_1 = k_1, \ldots, K_{n-1} = k_{n-1}\,,$$

où k_i $(1 \leqq i \leqq n - 1)$ est la i-ème courbure de la courbe C.

Désignons ensuite E_i $(i = 1, \ldots, n)$ les arêtes du repère de Frenet au point X, déterminées par les vecteurs-unités e_i; de façon plus générale, le symbol de $E_{i_1 \ldots i_k}$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, $1 \leqq i_u \leqq n$ pour $1 \leqq u \leqq k$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, dénotera le sous-espace linéaire de l'espace E_n passant par le point X et déterminé par les vecteurs $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Pour la classe différentielle de l'espace $E_{i_1 \ldots i_k}$ nous avons en vertu de la définition 1.1 la relation

$$\operatorname{cl} E_{i_1 \ldots i_k} = \min\left(\operatorname{cl}\left[X e_{i_1} \ldots e_{i_k}\right], \operatorname{cl}\left[e_{i_1} \ldots e_{i_k}\right]\right). \tag{1.2}$$

Définition 1.3. Nous appelons classe différentielle d'une courbe (étant donné le paramètre t) la matrice à une ligne

$$\left\|\operatorname{cl} X, \operatorname{cl} E_1, \operatorname{cl} E_{12}, \ldots, \operatorname{cl} E_{12\ldots n-1}\right\|. \tag{1.3}$$ [1]

Nous appelons type différentiel d'une courbe régulière C dans l'espace E_n la matrice carrée $\boldsymbol{M}_n$, de type $n \times n$, aux éléments

$$a_{k0} = \operatorname{cl}_{\sigma_k} X\,, \quad a_{ki} = \operatorname{cl}_{\sigma_k} E_{1\ldots i}\,, \quad 0 \leqq k \leqq n - 1\,, \quad 0 \leqq i \leqq n - 1\,.$$ [2]

---

[1]) Dans la suite, si nous le trouvons avatageux, nous parlerons aussi de la suite ($\operatorname{cl} X$, $\operatorname{cl} E_1, \ldots$ $\ldots, \operatorname{cl} E_{1\ldots n-1}$) au lieu de la matrice (1.3).

[2]) En ce sens, nous parlerons aussi de la ligne $0, \ldots, n - 1$ ou de la colome $0, \ldots, n - 1$ de la matrice $\boldsymbol{M}_n$.

Ici, $\mathrm{cl}_{\sigma_k} X$ dénote la classe différentielle du vecteur X par rapport au paramètre σ_k, la notation $\mathrm{cl}_{\sigma_k} E_{1\ldots i}$ ayant une signification analogue. Les paramètres σ_u, $0 \leqq u \leqq \leqq n - 1$, sont donnés par les relations

$$\sigma_u = \int K_u \, \mathrm{d}t \,, \tag{1.4}$$

où t est un paramètre original arbitraire; les σ_k sont évidemment indépendants du choix de t et possèdent une signification géométrique. (Le symbole de σ_0 remplace, pour rendre la notation uniforme, le paramètre s dont on a parlé dans la Définition 1.2.)

Dans le cas du paramètre σ_i, les coefficients de Frenet dans les formules (1.1) prennent la forme

$$K_j = \frac{k_j}{k_i}, \quad 0 \leqq j \leqq n - 1 \,, \tag{1.5}$$

les symboles de k_i, $1 \leqq i \leqq n - 1$ étant définis dans la Définition 1.2, avec

$$k_0 = 1 \,. \tag{1.6}$$

Dans son article [1], E. Čech a déterminé la classe différentielle d'une courbe (pour un paramètre t régulier quelconque) en dépendance des classes différentielles des coefficients de Frenet particuliers, dans le cas de l'espace E_n avec $n = 2, 3, 4$. De plus, il a montré dans ce même travail, que pour $n = 2$ un seul type différentiel est possible, pour $n = 3$ il y a 6 types possibles et que pour $n = 4$ il existe en somme 41 types différentiels différents, d'une courbe. Dans son travail [2], E. Čech a complété ses résultats pour l'espace E_3 en ce sens qu'il a déterminé les classes différentielles aussi pour les éléments secondaires du repère de Frenet (c'est-à-dire pour ceux qui ne sont pas éléments de la matrice (1.3)).

Dans [7], on a trouvé les classes différentielles des éléments secondaires du repère de Frenet dans le cas de l'espace E_4. Pour ce but, on a utilisé une définition un peu plus générale de la classe différentielle d'une fonction $f(t)$ que n'est celle dont on se sert d'habitude: La classe différentielle d'une fonction $f(t)$ sur un intervalle donné est définie comme le minimum des classes différentielles de la fonction $f(t)$ dans les points particuliers de l'intervalle considéré, et l'on n'exige pas que la classe différentielle soit exactement la même en tous les points de l'intervalle en question. Comme on l'a montré en [7], les résultats obtenus avec cette définition plus générale, restent valables même dans le cas de la définition plus restreinte (avec la même classe différentielle sur l'intervalle entier). Dans le présent travail, nous garderons la définition plus générale, et cela pour les raisons suivantes:

Exemple 1.4. Désignons par $\mathscr{M}$ la classe des fonctions définies sur l'intervalle $\langle -1, +1 \rangle$ et de classe différentielle 0 (prise au sens restreint, c'est-à-dire la même en tous les points de cet intervalle). Soit $f_1(x) \in \mathscr{M}$. Alors toute fonction $f(x) = f_1(x) + k|x|$, $k \in E_1$, est évidemment de la classe 0 en tous les points $x \neq 0$, tandis que $\mathrm{cl}\, f(0)$ peut être supérieure à 0.[3])

Mais si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) + k|h| - f_1(0)}{h} \tag{1.7}$$

existe, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) + k'(h) - f_1(0)}{h}$$

ne peut pas exister pour $k' \neq k$. Prenons maintenant k_1 tel que la limite (1.7) n'existe ni pour $k = k_1$ ni pour $k = -k_1$. Alors

$$f_2(x) = f_1(x) + k_1|x| \in \mathscr{M},$$

$$f_3(x) = -f_1(x) + k_1|x| \in \mathscr{M},$$

mais

$$f_4(x) = f_2(x) + f_3(x) = 2k|x| \notin \mathscr{M},$$

car $\mathrm{cl}\, f_4(x_0) = \infty$ pour $x_0 \neq 0$. Sans hypothèses restrictives supplémentaires, on n'aurait donc même pas la relation $\mathrm{cl}\,(u + v) \geqq \min(\mathrm{cl}\, u, \mathrm{cl}\, v)$, car la classe différentielle $\mathrm{cl}\,(u + v)$, prise au sens restreint, pourrait ne pas exister. Il en résulterait donc des complications inutiles dans nos considérations ultérieures.

Dans notre travail, nous nous proposons de trouver la relation qui existe entre les classes différentielles des éléments particuliers du repère de Frenet et les classes différentielles des coefficients de Frenet, tout cela indépendamment de la dimension de l'espace dans lequel la courbe donnée est plongée. Ensuite, nous envisagerons aussi la question de savoir sous quelles conditions une matrice carrée du type $n \times n$ peut être le type différentiel d'une courbe régulière C plongée dans l'espace E_n, et combien il existe de tels types pour n donné.

Le principal outil dont on s'est servi dans les articles [1] et [2], sont des considérations élémentaires concernant la classe différentielle d'une somme, d'un produit, etc, et qui ont été présentées en [7] sous forme de théorèmes. Mais en [7], on a donné de plus le théorème suivant, que nous reproduisons ici à cause de son importance:

Théorème 1.5. *Le tenseur $\mathscr{T}$ soit une combinaison de produits extérieurs, c'est-à-dire*

$$\mathscr{T} = \sum c_{i_1 i_2 \ldots i_r} [e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_r}],$$

---

[3]) Par $\mathrm{cl}\, f(x_0)$ nous désignerons la classe différentielle de la fonction $f(x)$ au point x_0.

où $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, la sommation étant étendue à toutes les combinaisons possibles d'indices, $\left[\text{il y en a } \binom{n}{r}\right]$ et où $c_{i_1 i_2 \ldots i_r} = c_{i_1 i_2 \ldots i_r}(t)$ sont des fonction scalaires du paramètre t pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, et les vecteurs $e_j = e_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, forment pour tout $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ un système orthonormal. Supposons ensuite que l'inégalité

$$\min_{\binom{n}{r}} \operatorname{cl} c_{i_1 \ldots i_r} < \min_{1 \leqq j \leqq n} \operatorname{cl} e_j$$ [4])

soit vérifiée. Alors on a aussi la relation

$$\operatorname{cl} \mathscr{T} = \min \operatorname{cl} c_{i_1 \ldots i_r} .$$

(Ce théorème est cité dans [7] comme théorème 9′, sa démonstration étant tout à fait analogue à celle du théorème 9 de [7].) Ce théorème joint à l'étude des dérivées d'ordres supérieurs – tandis que E. Čech n'a utilisé que les dérivées premières des expressions considérées – rend possible l'extension des résultats de Čech au cas d'un espace euclidien de dimension arbitraire.[5])

2. DÉTERMINATION DE LA CLASSE DIFFÉRENTIELLE DES ÉLÉMENTS PRINCIPAUX DU REPÈRE DE FRENET

Nous allons énoncer d'abord deux lemmes.

Lemme 2.1. *Soit donné un système d'équations différentielles du premier ordre*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1 , \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2 , \quad \frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = -K_{i-1} e_{i-1} + K_i e_{i+1} , \quad 2 \leqq i \leqq n - 1 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}e_n}{\mathrm{d}t} = -K_{n-1} e_{n-1} ,$$

et soit

$$\min (\operatorname{cl} K_0, \operatorname{cl} K_1, \ldots, \operatorname{cl} K_{n-1}) = r \geqq 0 .$$

---

[4]) Le premier membre de cette inégalité représente la valeur minimum de toutes les $\binom{n}{r}$ valeurs de $\operatorname{cl} c_{i_1 \ldots i_r}$, où $1 \leqq r \leqq n - 1$, $1 \leqq i_p \leqq n$ pour $1 \leqq p \leqq r$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

[5]) L'emploi des dérivées d'ordre supérieur présente l'avantage que voici: Si nous formons la dérivée d'ordre suffisamment élevé (à supposer qu'elle existe) de l'expression $[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}]$ ou $[X e_{i_1} \ldots e_{i_k}]$, elle contiendra tous les coefficients de Frenet. La classe différentielle de l'élément donné du repère de Frenet est alors déterminée par la classe différentielle du coefficient de Frenet qui a, avec un certain poids, la classe différentielle minimale. L'énoncé exact sera donné dans le théorème 2.3.

Alors le système en question admet toujours une solution et pour toute solution de (2.1) *on a*

$$\operatorname{cl} X \geqq r + 1\,, \quad \operatorname{cl} e_j \geqq r + 1\,, \quad 1 \leqq j \leqq n\,.$$

Démonstration. L'énoncé concernant l'existence de la solution est une conséquence immédiate des théorèmes bien connus de la théorie des équations différentielles; l'énoncé concernant la classe différentielle des fonctions vectorielles cherchées peut être démontré facilement (par exemple par l'absurde).

Lemme 2.2. *Il existe une solution particulière du système d'équations différentielles* (2.1) *telle que les vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$ *forment un système orthonormal. Autrement dit, étant donné le système d'équations différentielles* (2.1) *avec* $K_j \neq 0$, $\operatorname{cl} K_j \geqq 0$, $j = 0, \ldots, n - 1$, *il existe toujours une courbe régulière* C *telle que les formules de Frenet correspondant à elle soient identiques au système* (2.1).

Pour la **démonstration** dans le cas de $n = 3$, $t = s$ voir p. ex. [8], théorème 20.1. Cette démonstration-là peut facilement s'adapter au cas de paramètre général et de dimension quelconque.

Let but principal de ce paragraphe sera de démontrer le théorème 2.3 que voici.

Théorème 2.3. *Etant donné les valeurs de* $\operatorname{cl} K_0$, $\operatorname{cl} K_1, \ldots, \operatorname{cl} K_{n-1}$ *se rapportant au système* (2.1), *nous avons*

$$\operatorname{cl} X = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\operatorname{cl} K_j + j) + 1 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{cl} E_{1\ldots k} = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\operatorname{cl} K_j + |j - k|) + 1 \tag{2.3}$$

(voir la formule (1.2)).

Pour pouvoir démontrer le théorème 2.3, il nous faut encore énoncer quelques lemmes. Nous reviendrons à la démonstration du théorème 2.3 après avoir énoncé et démontré le lemme 2.14. Le théorème 2.3 représente un cas spécial du théorème 3.2, donné plus loin, mais pour faciliter la formulation et pour rendre plus claires les connections, nous l'avons énoncé séparément.

Dans les lemmes 2.4–2.10 qui vont suivre on suppose provisoirement l'existence de toutes les dérivées qui y apparaissent.

Lemme 2.4. *Toutes les dérivées d'un produit extérieur de la forme*

$$[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}]\,, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k\,, \tag{2.4}$$

$1 \leqq k \leqq n - 1$, $1 \leqq i_u \leqq n$, *qui existent, sont égales à des combinaisons linéaires de la même forme*[6]), *les coefficients scalaires dans ces combinaisons étant les produits des coefficients de Frenet et des dérivées de ces coefficients.*

[6]) Cela veut dire qu'il s'agit de produits du même nombre de facteurs, mais avec des indices différents.

La démonstration est évidente si l'on se rend compte de la façon dont on calcule la dérivée d'un produit extérieur et qu'on se rappelle les formules de Frenet (1.1).[7])

Lemme 2.5. *Le coefficient* K_u, $1 \leqq u \leqq n-1$, *figure dans la dérivée première de l'expression* (2.4) *si et seulement si la suite*

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) \tag{2.5}$$

a) *soit contient* u *sans contenir* $u+1$,

b) *soit contient* $u+1$ *sans contenir* u.

Si le coefficient K_u *figure dans la dérivée première de l'expression* (2.4), *il y apparaît comme le coefficient scalaire d'un, et d'un seul, des produits extérieurs qui forment la combinaison linéaire représentant la dérivée de* (2.4).

Démonstration. La première partie du lemme découle immédiatement des règles sur les dérivées des produits extérieurs, compte tenu des formules de Frenet et de l'asymétrie du produit extérieur. La deuxième partie découle des formules de Frenet et du fait que les cas a) et b) s'excluent l'un l'autre.

Lemme 2.6. *Si le vecteur* e_v *ne figure pas, en tant que facteur dans le produit extérieur* (2.4), *il figurera dans un des produits formant la dérivée de* (2.4) *si et seulement si la suite* (2.5)

a) *soit contient* $v-1$,

b) *soit contient* $v+1$.

La démonstration est évidente.

Lemme 2.7. *Si le produit extérieur* (2.4) *contient le vecteur* e_v *en tant qu'un de ses facteurs, alors dans la combinaison linéaire qui représente la dérivée de l'expression* (2.4),

a) *tous les produits extérieurs contiendront le vecteur* e_v *en tant que facteur si parmi les facteurs de* (2.4) *on trouve aussi* e_{v-1} *et* e_{v+1} (*soit seulement* e_2 *si* $v=1$ *ou* e_{v-1} *si* $v=n$).

b) *Si le cas* a) *n'a pas lieu, alors dans un des produits qu'on rencontre dans la combinaison linéaire formant la dérivée de l'expression* (2.4) *le vecteur* e_v *sera remplacé par le vecteur* e_{v-1} (*si* (2.4) *ne contient pas* e_{v-1} *en tant que facteur*) *ou bien par le vecteur* e_{v+1} (*si* (2.4) *ne contient pas* e_{v+1}). [8])

La démonstration est évidente.

---

[7]) Pour éviter tout malentendu, nous soulignons que, dans tout ce qui suit, nous prendrons la dérivée de l'expression (2.4) toujours pour une somme de termes non-nuls — les termes dont le coefficient scalaire est identiquement nul de même que ceux où le produit extérieur est identiquement nul seront tout simplement écartés de nos considérations.

[8]) Bien entendu si $v-1 \geqq 1$, $v+1 \leqq n$. Les cas de $v=1$, $v=n$ sont analogues. Nous ne tenons pas compte du changement des coefficients scalaires.

Lemme 2.8. *Lorsque* $|j - k| = m$, $1 \leqq j \leqq n - 1$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, *alors l'expression* K_j *figure en tant que facteur d'un coefficient scalaire de la combinaison linéaire dont on a parlé dans le lemme* 2.4 *pour la première fois dans la dérivée* $(n + 1)$*-ème de l'expression*

$$[e_1 e_2 \dots e_k]. \tag{2.6}$$

Les dérivées de K_j *figureront dans les dérivées d'ordre* $m + 2$ *au moins.*

Démonstration. a) Soit $j - k \geqq 0$, donc $j = k + m$. En vertu de lemmes 2.5, 2.6 et 2.7 on démontre aisément par récurrence que la dérivée d'ordre $(m + 1)$ contiendra un terme de la forme

$$K_k K_{k+1} \dots K_{k+m} [e_1 e_2 \dots e_{k-1} e_{k+m+1}] \tag{2.7}$$

le coefficient $K_j = K_{k+m}$ ne pouvant pas figurer dans une dérivée d'ordre inférieur à $m + 1$. Il en découle immédiatement l'énoncé concernant la dérivée de K_j.

b) Soit $j - k < 0$, donc $j = k - m$. D'une manière analogue au cas a) on démontre que la dérivée d'ordre $(m + 1)$ contiendra un terme de la forme

$$K_k K_{k-1} \dots K_{k-m} [e_1 e_2 \dots e_{k-m-1} e_{k-m+1} \dots e_{k+1}] \tag{2.8}$$

le coefficient $K_j = K_{k-m}$ ne pouvant pas figurer dans une dérivée d'ordre inférieur, d'où l'énoncé concernant la dérivée du coefficient K_j.

Remarque 2.9. Il est évident que (2.7) ou (2.8) sont les seules termes de la dérivée d'ordre $(m + 1)$ de l'expression (2.6) dont le coefficient scalaire contienne K_j en tant que facteur (même si l'on considère non seulement K_j mais encore ses dérivées).

Lemme 2.10. *La notation étant la même que dans le lemme* 2.8, *soit* $\overline{m} > m + 1$ *et* $\operatorname{cl} K_j = \varrho$. *Alors la dérivée de l'ordre le plus élevé du coefficient* K_j *qui figure dans la dérivée* $\overline{m}$*-ème de* (2.6) *est de l'ordre* $\overline{m} - m - 1$, *et c'est*

$$\operatorname{cl}\left(\frac{\mathrm{d}^{\overline{m}-m-1}}{\mathrm{d}t^{\overline{m}-m-1}} K_j\right) = \varrho - (\overline{m} - m - 1).$$

Cette dérivée est contenue, en tant que facteur, dans l'expression

$$K_k K_{k+1} \dots K_{j-1} \frac{\mathrm{d}^{\overline{m}-m-1} K_j}{\mathrm{d}t^{\overline{m}-m-1}} [e_1 e_2 \dots e_{k-1} e_{j+1}] \tag{2.9}$$

pour $j > k$ *et dans*

$$K_k K_{k-1} \dots K_{j+1} \frac{\mathrm{d}^{\overline{m}-m-1} K_j}{\mathrm{d}t^{\overline{m}-m-1}} [e_1 e_2 \dots e_{j-1} e_{j+1} \dots e_{k+1}] \tag{2.10}$$

pour $j < k$.[9]) *L'expression* (2.9) *ou* (2.10) *est la seule qui contienne la dérivée d'ordre* $(\bar{m} - m - 1)$ *du coefficient* K_j.

La démonstration découle immédiatement du lemme 2.8 et de la Remarque 2.9.

Lemme 2.11. *Si le minimum du second membre de* (2.3) *est atteint pour l'indice* $u \neq 0$ *et que* $\mathrm{cl}\, K_u = \varrho$, *il existe la dérivée de l'ordre* $(m + 1 + \varrho - r)$ *de l'expression* (2.6) *où* $m = |u - k|$.[10])

Démonstration. Pour faciliter la lecture nous allons rappeler d'abord la signification des symboles: k est donné par l'expression (2.6); u, m, ϱ sont donnés par l'énoncé même, r est déterminé par le lemme 2.1, d'après lequel on a $\mathrm{cl}\,[e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}] \geqq \geqq r + 1$ pour $1 \leqq k \leqq n - 1$, $1 \leqq i_u \leqq n$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. C'est pourquoi nous pouvons, en vertu du lemme 2.4 former la dérivée de l'ordre l de l'expression (2.6) si la dérivée de l'ordre $(l - 1)$ existe et que tous les coefficients de Frenet et leurs dérivées qui y figurent admettent une dérivée.

En vertu du lemme 2.8 le coefficient K_u apparaitra pour la première fois dans la dérivée de l'ordre $m + 1$. Soit K_v un autre coefficient qui peut être — soit lui même, soit sa dérivée — le coefficient scalaire d'un des produits extérieurs qui apparaissent dans la dérivée de l'ordre $(m + 1)$ donnée. Soit $\mathrm{cl}\, K_v = \tau$ et supposons que la dérivée d'ordre maximum de l'expression K_v qui figure dans cette dérivée de l'ordre $(m + 1)$ de (2.6) soit elle même de l'ordre ν.[11]) En vertu du lemme 2.10 nous trouvons facilement que le coefficient K_v apparaît pour la première fois dans la dérivée de l'ordre $m + 1 - \nu$ de l'expression (2.6) et que l'on a

$$m + 1 - \nu - 1 = |v - k| \,.^{12})$$

On a donc

$$\nu = m - |v - k|$$

et en même temps

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}^\nu K_v}{\mathrm{d}t^\nu}\right) = \tau - \nu = \tau - (m - |v - k|)\,.$$

Comme d'après nos hypothèses (voir la formule (2.3)) on a

$$\mathrm{cl}\, K_v + |v - k| \geqq \mathrm{cl}\, K_u + |u - k|\,,$$

c'est-à-dire

$$\tau + |v - k| \geqq \varrho + |u - k| = \varrho + m\,,$$

---

[9]) Il est clair comment il faut modifi (2.9) pour les cas où $j = k$.

[10]) On n'exclut nullement le cas où la valeur minimum est atteinte pour plusieurs indices à la fois.

[11]) Jusqu'à présent nous supposons toujours que toutes les dérivées en question existent.

[12]) La valeur de $m + 1 - \nu$ remplace maintenant celle de $m + 1$ du lemme 2.8.

on a

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}^\nu K_v}{\mathrm{d}t^\nu}\right) = \tau - m + |v - k| \geqq \varrho\,.$$

Il en découle que tous les coefficients de Frenet et leurs dérivées qui figurent dans la dérivée $(m + 1)$-ème sont d'une classe différentielle au moins égale à celle de K_u, c'est-à-dire ϱ au moins. (Il est aisé de voir que toutes les dérivées précédentes existent de sorte que nous pouvons réellement former la dérivée de l'ordre $(m + 1)$.) Si $\varrho = r$, la démonstration du lemme 2.11 est achevée.

Si $\varrho > r$ il nous faudra considérer encore des dérivées d'ordres supérieurs. Supposons que la dérivée de l'ordre $m + 1 + i$ existe avec $0 \leqq i < \varrho - r$. Il est évident que tous les coefficients scalaires qui figurent dans cette dérivée-ci sont d'une classe différentielle au moins égale à $\varrho - i$. (C'est évident tant qu'ils sont dus à la différentiation des coefficients figurant déjà dans la dérivée de l'ordre $m + 1$, mais les coefficients de Frenet et leurs dérivées qui n'apparaissent que plus tard ne peuvent être, en vertu du lemme 2.10 d'une classe différentielle inférieure, car K_u réalise le minimum du second membre de la formule (2.3) et nous pourrions alors répéter le raisonnement précédent.) Comme $\varrho - i > r \geqq 0$, il est possible de former une nouvelle dérivée de (2.6), c'est-à-dire la dérivée de l'ordre $m + 1 + i + 1$. Il en découle par récurrence l'énoncé concernant l'existence de la dérivée de l'ordre $m + 1 + \varrho - r$.

Lemme 2.12. *Supposons que le minimum du second membre de la formule* (2.3) *ne soit pas atteint pour $u = 0$ et soient $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q$ toutes les valeurs, différant l'une de l'autre, pour lesquelles ce minimum est atteint. Soient m_i et ϱ_i les valeurs du lemme* 2.11, *correspondant à l'indice u_i. Alors*

(2.11) $(m_1 + 1 + \varrho_1 - r) = (m_2 + 1 + \varrho_2 - r) = \ldots = (m_q + 1 + \varrho_q - r) = \alpha$[13])

Lemme 2.13. *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q$ les mêmes que dans le lemme* 2.12 *et supposons que nous ayons $u_1 < k, \ldots, u_p < k, u_{p+1} > k, \ldots, u_q > k$.*[14]) *Alors dans la dérivée d'ordre α de l'expression* (2.6) — *cette dérivée existe en vertu du lemme* 2.11 — *sont de* cl r *les coefficients scalaires suivants figurant dans la combinaison linéaire donnée* (voir le lemme 2.4):

$$(2.12)\quad K_k K_{k-1} \ldots K_{u_1+1} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(k-u_1)-1} K_{u_1}}{\mathrm{d}t^{\alpha-(k-u_1)-1}}, \ldots, K_k \ldots K_{u_p+1} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(k-u_p)-1} K_{u_p}}{\mathrm{d}t^{\alpha-(k-u_p)-1}},$$

$$K_k K_{k+1} \ldots K_{u_{p+1}-1} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(u_{p+1}-k)-1} K_{u_{p+1}}}{\mathrm{d}t^{\alpha-(u_{p+1}-k)-1}}, \ldots, K_k \ldots K_{u_q-1} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(u_q-k)-1} K_{u_q}}{\mathrm{d}t^{\alpha-(u_q-k)-1}}.$$

---

[13] Le symbole α est introduit à nouveau par la relation (2.11) pour la valeur commune des expresions donnèes. Le lemme est évident.

[14]) k étant donné par (2.6).

Tous les autres coefficients scalaires qui y apparaissent sont de classes différentielles supérieures.

Démonstration. a) Il découle des lemmes 2.8 et 2.10 que les coefficients donnés figurent effectivement dans la dérivée de l'ordre α. Nous allons faire les calcules pour le premier des coefficients (2.12).

$$\mathrm{cl}\, K_{u_1} = \varrho_1\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(k-u_1)-1} K_{u_1}}{\mathrm{d}t^{\alpha-(k-u_1)-1}} = \varrho_1 - [\alpha - (k - u_1) - 1] =$$

$$= \varrho_1 - m_1 - 1 - \varrho_1 + r + k - u_1 + 1 = k - u_1 - m_1 + r = r\,,$$

car $m_1 = k - u_1$ (voir le lemme 2.11). Les autres facteurs du coefficient donné sont de classe différentielle $> r$ [15]), donc le coefficient donné, en tant que produit des grandeurs données, est de la classe différentielle r exactement. Il en va de même des autres coefficients de (2.12).

Si le minimum de (2.3) était également atteint pour K_k, alors on trouverait parmi les coefficients (2.12) aussi l'expression

$$\text{(2.13)} \qquad \frac{\mathrm{d}^{\alpha-1} K_k}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}$$

et rien ne serait à changer à la démonstration.

b) Les autres coefficients dans la combinaison linéaire donnée sont de classes différentielles supérieures pour les raisons suivantes.

Tant qu'ils contiennent, en tant que facteurs, des dérivées des coefficients de Frenet, pour lesquels le minimum de (2.3) est atteint, ces dérivées sont d'ordres inférieurs à ceux des coefficients (2.12) – cela résulte du lemme 2.10

Tant que d'autres coefficients de Frenet, ou leurs dérivées, figurent en tant que facteurs dans les coefficients en question, alors la dérivée d'ordre maximum d'un tel coefficient K_v $(v < k)$ qui y apparaisse est – toujours en vertu du lemme 2.10 – contenue en tant que facteur dans l'expression

$$K_k K_{k-1} \ldots K_{v+1} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-(k-v)-1} K_v}{\mathrm{d}t^{\alpha-(k-v)-1}}\,,$$

et l'on a

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}^{\alpha-(k-v)-1} K_v}{\mathrm{d}t^{\alpha-(k-v)-1}}\right) = \mathrm{cl}\, K_v - \alpha + (k - v) + 1 > r\,.$$

(On aboutirait à la dernière inégalité au bout d'un calcul analogue à celui fait à la démonstration du lemme 2.11.)

---

[15]) Si un des coefficients $K_k, K_{k-1}, \ldots, K_{u_1+1}$ était, en tant qu'une fonction scalaire du paramètre t, de la classe différentielle r, le minimum dans 2.3 ne pourrait se réaliser pour l'indice u_1.

Lemme 2.14. *Les expressions* (2.12) — *sous les mêmes hypothèses que dans le lemme* 2.13 — *sont, dans la combinaison linéaire du lemme* 2.4, *des coefficients scalaires des produits extérieurs*

$$(2.14) \qquad [e_1 e_2 \dots e_{u_1-1} e_{u_1+1} \dots e_{k+1}], \dots, [e_1 e_2 \dots e_{u_p-1} e_{u_p+1} \dots e_{k+1}],$$
$$[e_1 e_2 \dots e_{k-1} e_{u_{p+1}+1}], \dots, [e_1 e_2 \dots e_{k-1} e_{u_q+1}],$$

et (2.13) *est éventuellement le coefficient du produit extérieur*

$$(2.15) \qquad [e_1 e_2 \dots e_{k-1} e_{k+1}].$$

Les produits extérieurs (2.14), *ou* (2.14) *et* (2.15), *sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Le premier énoncé découle immédiatement du lemme 2.10, le second est évident.

A l'aide des lemmes énoncés nous sommes maintenant à même de démontrer enfin notre théorème 2.3:

a) Supposons que le minimum du second membre de (2.3) ne soit pas atteint pour $j = 0$. Il résulte alors des lemmes 2.1, 2.13, 2.14 et du théorème 1.5 que

$$\mathrm{cl} \frac{\mathrm{d}^\alpha [e_1 e_2 \dots e_k]}{\mathrm{d}t^\alpha} = r,$$

nous avons donc, en revenant à la notation antérieure

$$\mathrm{cl}\, [e_1 e_2 \dots e_k] = \alpha + r = m_i + 1 + \varrho_i - r + r = |u_i - k| + 1 + \mathrm{cl}\, K u_i,$$

u_i étant un quelconque des indices pour lesquels le minimum de (2.3) est réalisé. En ce qui concerne les dérivées du produit extérieur $[Xe_1 \dots e_k]$ — voir (1.2) — il est évident que nous obtenons ses dérivées d'ordres inférieurs (jusqu'à, et y compris, la k-ème) formellement en remplaçant, dans les dérivées correspondantes de l'expression $[e_1 \dots e_k]$, les produits $[e_{i_1} \dots e_{i_k}]$ par les produits $[Xe_{i_1} \dots e_{i_k}]$ sans en changer les coefficients; tandis que pour $l > k$ la dérivée d'ordre l du produit $[Xe_1 \dots e_k]$ sera une somme d'un plus grand nombre de termes que n'est la dérivée correspondante de l'expression $[e_1 \dots e_k]$.[16]) Le coefficient K_0 apparaîtra en tant que facteur, pour la première fois dans la dérivée de l'ordre $k + 1$, il en résulte que la dérivée d'ordre maximum du coefficient K_0 qui figure dans la dérivée α-ème du produit extérieur

[16]) En effet, on a p. ex. (dans E_n, $n \geqq 4$) les égalités

$$\frac{\mathrm{d}[Xe_2 e_3]}{\mathrm{d}t} = K_0 [e_1 e_2 e_4] - K_1 [Xe_1 e_3] + K_3 [Xe_2 e_4],$$

$$\frac{\mathrm{d}[e_2 e_3]}{\mathrm{d}t} = -K_1 [e_1 e_3] + K_3 [e_2 e_4].$$

$[Xe_1 \dots e_k]$ est elle même de l'ordre $\alpha - k - 1$. Or, on a

$$\mathrm{cl}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-k-1}K_0}{\mathrm{d}t^{\alpha-k-1}} = \mathrm{cl}\,K_0 - \alpha + k + 1 = \mathrm{cl}\,K_0 - (m_1 + 1 + \varrho_1 - r) + k + 1 =$$

$$= \mathrm{cl}\,K_0 + |k - 0| + 1 - (m_1 + 1 + \mathrm{cl}\,K_{u_1}) + r > r\,,$$

car d'après nos hypothèses le minimum dans (2.3) n'est pas atteint pour $j = 0$, (u_1 étant, suivant la notation adoptée, le premier indice pour lequel ce minimum soit réalisé, $m_1 = |k - u_1|$). Compte tenu des expressions de la forme $[Xe_{i_1} \dots e_{i_k}]$ il est impossible d'appliquer le théorème 1.5, car il ne s'agit pas, dans ce cas-là, d'un système orthogonal de vecteurs, mais il est aisé de voir que

$$\mathrm{cl}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}[Xe_1 \dots e_k]}{\mathrm{d}t^{\alpha}} \geqq r\,, \quad \mathrm{cl}\,[Xe_1 \dots e_k] \geqq r + \alpha$$

donc, d'après (1.2)

$$\mathrm{cl}\,E_{1\dots k} = r + \alpha = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\mathrm{cl}\,K_j + |j - k|) + 1\,.$$

b) Si le minimum du second membre de (2.3) est atteint pour $j = 0$, et pour d'autres valeurs encore, nous avons

$$\mathrm{cl}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-k-1}K_0}{\mathrm{d}t^{\alpha-k-1}} = r\,,$$

or, d'une façon analogue à ce qui précède

$$\mathrm{cl}\,[e_1 \dots e_k] = r + \alpha\,, \quad \mathrm{cl}\,[Xe_1 \dots e_k] \geqq r + \alpha\,,$$

donc, encore en vertu de (1.2),

$$\mathrm{cl}\,E_{1\dots k} = r + \alpha = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\mathrm{cl}\,K_j + |j - k|) + 1\,.$$

c) Le minimum de (2.3) soit atteint pour $j = 0$ seulement. Posons $\alpha = \mathrm{cl}\,K_0 + k + 1 - r$. Par un procédé analogue à celui de la démonstration du lemme 2.13, nous trouvons

$$\mathrm{cl}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}[e_1 \dots e_k]}{\mathrm{d}t^{\alpha}} > r\,,$$

car pour aucun des coefficients de Frenet figurant dans cette dérivée le minimum de (2.3) n'est atteint. De l'autre côté

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}[Xe_1 \dots e_k]}{\mathrm{d}t^{\alpha}} = K_k K_{k-1} \dots K_1 \frac{\mathrm{d}^{\alpha-k-1}K_0}{\mathrm{d}t^{\alpha-k-1}} [e_1 \dots e_{k+1}] + \dots$$

où

$$\mathrm{cl}\,\frac{\mathrm{d}^{\alpha-k-1}K_0}{\mathrm{d}t^{\alpha-k-1}} = r\,, \quad \mathrm{cl}\,K_i \geqq r+1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k\,,$$

$$\mathrm{cl}\,[e_1 \ldots e_{k+1}] \geqq r+1\,,$$

et la classe différentielle des termes non écrits ici est également $\geqq r+1$. Donc

$$\mathrm{cl}\,\frac{\mathrm{d}^{\alpha}[Xe_1 \ldots e_k]}{\mathrm{d}t^{\alpha}} = r$$

et enfin, une fois de plus en vertu de (1.2),

$$\mathrm{cl}\,E_{1\ldots k} = \mathrm{cl}\,K_0 + k + 1 - r + r = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} \left(\mathrm{cl}\,K_j + |j-k|\right) + 1\,.$$

Cela achève la démonstration de la formule (2.3). Pour démontrer (2.2), on procède d'une manière tout à fait analogue.

Convention 2.15. Dans le texte qui suit, nous ne parlons que de la formule (2.3), pour rendre l'affaire plus simple. Au besoin, on procèderait de même avec la formule (2.2).

Définition 2.16. Nous appellerons suite fondamentale de valeurs $(\mathrm{cl}\,K_0, \mathrm{cl}\,K_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{cl}\,K_{n-1})$ toute suite de cette sorte où la différence de deux termes voisins ne peut être que -1, 0 ou $+1$. La suite correspondante $(K_0, K_1, \ldots, K_{n-1})$ sera appelée suite fondamentale de coefficients de Frenet.

Nous dirons ensuite que deux suites fondamentales, $(K_0^1, K_1^1, \ldots, K_{n-1}^1)$ et $(K_0^2, K_1^2, \ldots, K_{n-1}^2)$ appartiennent à la même classe de suites fondamentales lorsque

$$\mathrm{cl}\,K_i^1 = \mathrm{cl}\,K_i^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n-1\,.$$

Une classe de suites fondamentales sera désignée par le symbole

$$[K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}]\,,$$

la suite $(K_0, K_1, \ldots, K_{n-1})$ étant un représentant arbitraire de la classe en question.

Théorème 2.17. *Si* $\mathrm{cl}\,X$, $\mathrm{cl}\,E_1, \ldots, \mathrm{cl}\,E_{1\ldots n-1}$ *sont les classes différentielles du point, de la tangente et des espaces osculateurs linéaires d'une courbe régulière C dans l'espace E_n, alors il existe toujours une courbe régulière C' telle que*

(2.16) $$\mathrm{cl}\,X' = \mathrm{cl}\,X, \ldots, \mathrm{cl}\,E'_{1\ldots n-1} = \mathrm{cl}\,E_{1\ldots n-1}\,,$$

et les valeurs correspondantes $\mathrm{cl}\,K'_0, \mathrm{cl}\,K'_1, \ldots, \mathrm{cl}\,K'_{n-1}$, *forment une suite fondamentale, cette dernière étant déterminée d'une manière univoque par la courbe C*

originale. Par contre, à chaque suite fondamentale $\{\mathrm{cl}\, K_i\}$ *est associée d'une façon univoque une suite* $(\mathrm{cl}\, X, \mathrm{cl}\, E_1, \ldots, \mathrm{cl}\, E_{1\ldots n-1})$ *telle qu'il existe une courbe régulière C pour laquelle* $\mathrm{cl}\, X, \ldots, \mathrm{cl}\, E_{1\ldots n-1}$ *sont les valeurs de la classe différentielle du point, de la tangente et des espaces osculateurs,* $K_0, \ldots, K_{n-1}$ *étant les coefficients de Frenet de cette courbe. Entre ces deux suites* $(\mathrm{cl}\, K_0, \ldots, \mathrm{cl}\, K_{n-1})$ *et* $(\mathrm{cl}\, X, \mathrm{cl}\, E_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{cl}\, E_{1\ldots n-1})$, *ainsi univoquement associées l'une à l'autre, a lieu la relation*

$$\mathrm{cl}\, X = \mathrm{cl}\, K_0 + 1,\ \mathrm{cl}\, E_{1\ldots j} = \mathrm{cl}\, K_j + 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n - 1\,. \tag{2.17}$$

Démonstration. La deuxième partie du théorème est évidente: en vertu du lemme 2.2 le système (2.1) a toujours une solution et comme pour la suite fondamentale de valeurs $\mathrm{cl}\, K_i$ on a la relation évidente

$$\mathrm{cl}\, K_k \leqq \mathrm{cl}\, K_j + |j - k|\,, \quad 0 \leqq j \leqq n - 1\,, \quad 0 \leqq k \leqq n - 1\,,$$

les formules (2.17) sont pour une telle suite une simple conséquence du théorème 2.3.

Soit maintenant par contre $(\mathrm{cl}\, X, \mathrm{cl}\, E_1, \ldots, \mathrm{cl}\, E_{1\ldots n-1})$ la classe différentielle d'une courbe régulière C. Soient $\mathrm{cl}\, E_{1\ldots j}$, $\mathrm{cl}\, E_{1\ldots j+1}$ deux termes voisins de la matrice (1.3). Comme les valeurs

$$\min_{0 \leqq l \leqq n-1} (\mathrm{cl}\, K_l + |l - j|) \quad \text{et} \quad \min_{0 \leqq l \leqq n-1} (\mathrm{cl}\, K_l + |l - (j + 1)|)$$

ne peuvent différer en valeur absolue que d'une unité au plus, il en découle (voir (2.3)) que la différence de deux termes voisins de la matrice (1.3) ne peut prendre qu'une des valeurs $-1, 0, +1$. Choisissons $K'_0, \ldots, K'_{n-1}$ de façon à avoir

$$\mathrm{cl}\, K'_0 = \mathrm{cl}\, X - 1,\ \mathrm{cl}\, K'_j = \mathrm{cl}\, E_{1\ldots j} - 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n - 1\,. \tag{2.18}$$

Alors $(\mathrm{cl}\, K'_0, \mathrm{cl}\, K'_1, \ldots, \mathrm{cl}\, K'_{n-1})$ est une suite fondamentale. La solution du système (2.1) avec les coefficients ainsi choisis, c'est donc une courbe régulière C' pour laquelle on a, comme il est facile de le voir en vertu du théorème 2.3,

$$\mathrm{cl}\, X' = \mathrm{cl}\, K'_0 + 1,\ \mathrm{cl}\, E'_{1\ldots j} = \mathrm{cl}\, K'_j + 1\,, \quad 1 \leqq j \leqq n - 1$$

et de (2.18) il découle alors (2.16).

Notre théorème 2.17 est donc démontré.

Corollaire 2.18. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une courbe régulière C telle que la matrice*

$$\|a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\| \tag{2.19}$$

dont les éléments sont tous entiers et positifs, soit sa classe différentielle, est que

$$|a_i - a_{i-1}| \leqq 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n - 1\,. \tag{2.20}$$

Démonstration. Nous avons montré déjà, lors de la démonstration du théorème 2.17, que la condition (2.20) est nécessaire. De l'autre côté, nous pouvons considérer la suite $(a_0 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$ comme une suite fondamentale de valeurs $\operatorname{cl} K_i$, $0 \leqq i \leqq n-1$, et la courbe C qui y correspond aura pour sa classe différentielle précisément la matrice (2.19)[17])[18]).

Corollaire 2.19. *Pour tout entier $n \geqq 2$ et pour $r = \min(\operatorname{cl} K_0, \ldots, \operatorname{cl} K_{n-1})$ donné il existe précisément 3^{n-1} classes différentielles différentes des courbes régulières plongées dans E_n.*

Définition 2.20.

a) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ la classe différentielle d'une courbe régulière. Nous dirons que a_i est une valeur propre, et nous écrirons $a_i = \bar{a}_i$, lorsque

$$a_i \leqq \min(a_{i-1}, a_{i+1}) \tag{2.21}$$

pour $2 \leqq i \leqq n-2$, ou bien $a_i \leqq a_1$ si $i = 0$, ou $a_i \leqq a_{n-2}$ si $i = n-1$. Dans le cas contraire nous dirons que la valeur a_i est diminuée, ce que nous dénoterons par $a_i \neq \bar{a}_i$ (mais le symbole de $\bar{a}_i$ sera dépourvu de sens dans ce cas-là).[19])

b) D'une façon analogue, soit $(\operatorname{cl} K_0, \ldots, \operatorname{cl} K_{n-1})$ une suite fondamentale. Tout comme dans a), nous écrirons $\operatorname{cl} K_j = \overline{\operatorname{cl} K_j}$ pour dire que

$$\operatorname{cl} K_j \leqq \min(\operatorname{cl} K_{j-1}, \operatorname{cl} K_{j+1})$$

pour $1 \leqq j \leqq n-2$, avec les modifications évidentes pour $j = 0$ ou $j = n-1$.

Théorème 2.21. *Si $a_i = \bar{a}_i$, alors*

$$a_i = \operatorname{cl} K_i + 1 . \tag{2.22}$$

Démonstration. Supposons que la relation (2.22) n'ait pas lieu. Il découle alors du théorème 2.3 l'existence d'un indice j tel que

$$a_i = \operatorname{cl} K_j + |j - i| + 1 < \operatorname{cl} K_i + 1 .$$

[17]) La courbe C n'est pas, bien entendu, déterminée d'une manière univoque, car si nous connaissons $\operatorname{cl} K_0, \ldots, \operatorname{cl} K_{n-1}$, nous pouvons toujours encore choisir les grandeurs $K_0, \ldots, K_{n-1}$ librement et, de plus, nous avons encore à choisir les constantes d'intégration en résolvant le système (2.1).

[18]) Dans son travail [1] E. Čech ne parle que de la condition nécessaire; en réalité, il ne savait pas encore que c'est une condition suffisante pour tout $n \geqq 2$, comme on le voit p. ex. de [3], p. 2 (152).

[19]) Par opposition à $a_i = \bar{a}_i$, l'égalité $a_i = a_j$ pour $i \neq j$ signifiera toujours que les valeurs numériques de a_i et a_j sont les mêmes.

Si $j > i$, nous avons (de nouveau en vertu du théorème 2.3)

$$a_{i+1} \leqq \operatorname{cl} K_j + |j - i - 1| + 1 = \operatorname{cl} K_j + |j - i| < a_i ,$$

en contradiction avec (2.21). Le cas de $j < i$ se résout de manière analogue.[20])

Théorème 2.22. *Si $a_i = \bar{a}_i$, alors*

$$a_i < a_j + |j - i| \tag{2.23}$$

pour tout $j \neq i$.

Démonstration. Supposons que la relation (2.23) ne soit pas vérifiée. Nous pouvons alors, sans restreindre la généralité de nos raisonnements, supposer l'existence d'un élément $j > i$ pour lequel

$$a_i = a_j + j - i .$$

Compte tenu de la condition (2.20), on doit avoir également

$$a_i = a_k + k - i , \quad i + 1 \leqq k \leqq j - 1 ,$$

donc, en particulier,

$$a_i = a_{i+1} + 1 .$$

Or, ceci est en contradiction avec (2.21).

Théorème 2.23. *Soit a_i un élément arbitraire de la matrice* (2.19) *satisfaisant à* (2.20). *Alors il existe toujours un élément a_j qui vérifie*

$$a_j = \bar{a}_j , \quad a_i = a_j + |j - i| . \tag{2.24}$$

Démonstration. a) Si $a_i = \bar{a}_i$, il n'y a rien à démontrer. b) Soit $a_i \neq \bar{a}_i$. Alors, en vertu de la condition (2.20) et de la définition 2.20, nous avons

$$a_i = \min(a_{i-1}, a_{i+1}) + 1 .$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer

$$a_i = a_{i-1} + 1 .$$

Il est alors évidemment possible de trouver un élément a_j, $j < i$, tel que

α) $a_{j+m} = a_{j+m+1} - 1$ pour $0 \leqq m \leqq i - j - 1$,

β) pour $j \neq 0$ on a toujours $a_j \leqq a_{j-1}$.

---

[20]) C'est au contenu du théorème 2.21 que se rapporte l'introduction des notions de valeurs „propre" et „diminuée". La valeur propre est liée à cl K_i par la relation (2.22), tandis que pour $a_j \neq \bar{a}_j$ nous ne pouvons compter qu'avec l'inégalité $a_j \leqq \operatorname{cl} K_j + 1$. Les valeurs propres ainsi définies joueront un rôle important dans la suite.

Cet élément a_j satisfait évidemment aux exigeances du théorème. De plus, il est évident que pour les éléments

$$a_{j+m}\,, \quad 1 \leqq m \leqq i - j - 1$$

on a la relation

$$a_{j+m} \neq \bar{a}_{j+m}\,.$$

Remarque 2.24. Il est évident qu'il peut exister deux éléments satisfaisant à (2.24), mais jamais davantage.[21])

Remarque 2.25. L'élément a_j du théorème 2.23 peut ne pas être la valeur propre la plus proche de a_i en ce sens qu'il peut exister un élément $a_s = \bar{a}_s$ pour lequel $|i - s| < |i - j|$.[22])

Définition 2.26. Nous appellerons valeur propre correspondant à a_i (associée à a_i) n'importe quel de deux éléments possibles a_j satisfaisant aux relations (2.24).

Théorème 2.27. *Soit $a_j = \bar{a}_j$ la valeur propre associée à l'élément a_i. Alors*

$$a_i = \mathrm{cl}\, K_j + |j - i| + 1\,.$$

La démonstration découle immédiatement de la définition 2.26 et du théorème 2.21.

Définition 2.28. Soient

$$(K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}) \tag{2.25}$$

les coefficients de Frenet d'une courbe régulière C et soit

$$(K'_0, K'_1, \ldots, K'_{n-1})$$

la suite fondamentale correspondant à une courbe régulière C' pour laquelle

$$\mathrm{cl}\, X' = \mathrm{cl}\, X, \ldots, \mathrm{cl}\, E'_{1\ldots n-1} = \mathrm{cl}\, E_{1\ldots n-1}$$

(voir le théorème 2.17). Nous dirons alors qu'on a associé au système de coefficients (2.25) la classe de suites fondamentale

$$[K'_0, K'_1, \ldots, K'_{n-1}]\,. \tag{2.26}$$

---

[21]) S'il s'agit p. ex. de la matrice $\|2\ 1\ 2\ 3\ 2\|$ et que l'on cherche l'élément a_j correspondant à $a_3 = 3$ au sens du théorème 2.23, on voit que les éléments $a_1 = \bar{a}_1 = 1$ et $a_4 = \bar{a}_4 = 2$ satisfont les deux aux conditions imposées.

[22]) Considérons la matrice $\|5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\|$, et cherchons l'élément a_j correspondant, au sens du théorème 2.23, à l'élément $a_i = a_3 = 4$. Nous trouvons que c'est l'élément $a_j = a_6 = \bar{a}_6 = 1$. On a ensuite $a_s = a_1 = \bar{a}_1 = 4$, avec $|i - s| = 2 < |i - j| = 3$, mais $a_i \neq a_s + |s - i|$.

Théorème 2.29. *La suite* (2.25) *et la classe associée* (2.26) *des suites fondamentales sont liées par la relation*

$$\mathrm{cl}\, K_i' = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\mathrm{cl}\, K_j + |j - i|)\,. \tag{2.27}$$

La démonstration découle immédiatement du théorème 2.3 et de la relation (2.18).

Corollaire 2.30. *Il résulte immédiatement de la formule* (2.27) *que l'on a toujours*

$$\mathrm{cl}\, K_i' \leqq \mathrm{cl}\, K_i\,. \tag{2.28}$$

Théorème 2.31. *Soit* (2.26) *une classe de suites fondamentales. Toutes les suites* (2.25) *pour lesquelles* (2.26) *est la classe associée de suites fondamentales sont caractérisées par les relations*

$$\mathrm{cl}\, K_i = \mathrm{cl}\, K_i' \quad \text{pour} \quad \mathrm{cl}\, K_i' = \overline{\mathrm{cl}\, K_i'}\,, \tag{2.29a}$$

$$\mathrm{cl}\, K_j \geqq \mathrm{cl}\, K_j' \quad \text{pour} \quad \mathrm{cl}\, K_j' \neq \overline{\mathrm{cl}\, K_j'}\,, \tag{2.29b}$$

Démonstration. Tout d'abord, il faut se rendre compte de la relation

$$\mathrm{cl}\, K_i' = \overline{\mathrm{cl}\, K_i'} \Leftrightarrow a_i' = \overline{a_i'}$$

où $a_i' = \mathrm{cl}\, E_{1\ldots i}'$. L'équivalence en question résulte de (2.18).

a) Les conditions données par les relations (2.29) sont nécessaires.[23]) En effet, (2.29b) n'est qu'une autre forme de (2.28), et (2.29a) peut être démontré comme suit: En vertu de (2.23), pour tout i tel que $\mathrm{cl}\, K_i' = \overline{\mathrm{cl}\, K_i'}$ on aura d'après (2.3)

$$\mathrm{cl}\, E_{1\ldots i} < \mathrm{cl}\, E_{1\ldots j} + |j - i| \leqq \mathrm{cl}\, K_j + |j - i| + 1 \quad \text{pour} \quad j \neq i$$

donc toujours d'après (2.3)

$$\mathrm{cl}\, E_{1\ldots i} = \mathrm{cl}\, K_i + 1\,,$$

donc, en vertu de (2.18),

$$\mathrm{cl}\, K_i = \mathrm{cl}\, K_i'\,.$$

b) Les conditions données par les relations (2.29) sont suffisantes. Soit (2.19) la matrice correspondant à (2.25); soit

$$\|a_0', a_1', \ldots, a_{n-1}'\|$$

la matrice correspondant au représentant, choisi arbitrairement, de la classe (2.26). Nous supposons maintenant que la suite (2.25) et la classe (2.26) sont liées par les

[23]) Nous supposons maintenant satisfaites les relations $\mathrm{cl}\, E_{1\ldots i} = \mathrm{cl}\, E_{1\ldots i}'$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$, $\mathrm{cl}\, X = \mathrm{cl}\, X'$, et nous voulons démontrer (2.29).

relations (2.29) et nous voulons démontrer que

$$a_i' = a_i\,, \quad 0 \leqq i \leqq n - 1\,.$$

b$_1$) Soit $a_i' = \bar{a}_i'$. En vertu de (2.3) et du théorème 2.22 nous avons

$$a_i' = \operatorname{cl} K_i' + 1 < \operatorname{cl} K_j' + |j - i| + 1\,, \quad j \neq i\,.$$

Comme d'après (2.29) $K_i' = K_i$, $K_j' \leqq K_j$, nous avons également

$$\operatorname{cl} K_i + 1 < \operatorname{cl} K_j + |j - i| + 1\,, \quad j \neq i\,,$$

donc d'après (2.3)

$$a_i = \operatorname{cl} K_i + 1 = \operatorname{cl} K_i' + 1 = a_i'\,.$$

b$_2$) Soit $a_i' \neq \bar{a}_i'$. Il existe alors, en vertu du théorème 2.23 un élément a_j' tel que l'on ait

$$a_j' = \bar{a}_j'\,, \quad a_i' = a_j' + |j - i|\,.$$

D'après b$_1$) on a $a_j = a_j'$, donc, en vertu de (2.20), on a

(2.30) $$a_i \leqq a_j + |j - i| = a_j' + |j - i| = a_i'\,.$$

D'autre part, il résulte de (2.29) que

(2.31) $$a_i = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\operatorname{cl} K_j + |j - i|) + 1 \geqq \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\operatorname{cl} K_j' + |j - i|) + 1 = a_i'\,.$$

En combinant (2.30) et (2.31) nous trouvons dans ce cas-ci également

$$a_i' = a_i\,.$$

Cela achève la démonstration du théorème 2.31.

Remarque 2.32. La définition 2.28 et le théorème 2.31 permettent de voir pourquoi les premiers membres des tableaux (3.8), (5.12), (5.12′) et (5.12″) du travail [1] de E. Čech ont précisément la forme qu'ils ont.

3. DÉTERMINATION DE LA CLASSE DIFFÉRENTIELLE DES ÉLÉMENTS SECONDAIRES DU REPÈRE DE FRENET

En ce qui concerne les éléments secondaires du repère de Frenet, la situation est analogue à celle du paragraphe 2, mais la formulation du théorème correspondant et sa démonstration sont un peu plus compliquées. Nous introduisons d'abord la

Définition 3.1. Nous appellerons indice inférieur remarquable u de l'espace $E_{i_1 \ldots i_k}$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, $1 \leqq i_p \leqq n$ pour $1 \leqq p \leqq k$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, tout indice u tel que la suite

$$(3.1) \qquad (0, i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

contienne u sans contenir $u + 1$.[24]

Nous appellerons indice supérieur remarquable tout indice v tel que la suite (3.1) continue $v + 1$ sans contenir v.

Les coefficients K_u et K_v correspondants seront appelés coefficients remarquables; l'ensemble des indices remarquables de l'espace $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sera noté par $I_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Ayant introduit ces notions, nous pouvons énoncer le

Théorème 3.2

$$(3.2) \qquad \operatorname{cl} E_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\operatorname{cl} K_j + \min_{\alpha \in I_{i_1 \ldots i_k}} |j - \alpha|) + 1 .$$

Pour pouvoir démonter notre théorème 3.2, nous présenterons d'abord quelques lemmes et nous adopterons deux conventions.

Convention 3.3. Chaque fois que nous énonçons un théorème pour un coefficient K_u, $2 \leqq u \leqq n - 2$ et qu'un théorème analogue est valable pour $u = 1$ et $u = n - 1$ avec la modification évidente (due au fait qu'il y manque un „indice voisin") nous nous contenons d'énoncer et de démontrer le théorème pour les indices „intérieurs" seulement, en laissant au lecteur le soin d'adapter lui-même la démonstration aus cas des indices „extrèmes".[25] La même convention s'appliquera aux termes intérieurs et extérieurs des suites

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k), \quad i_j < i_{j+1}, \quad k \leqq n - 1 .$$

Convention 3.4. Pour éviter, dans le texte à suivre, l'emploi d'indices composés, nous convenons de noter par des lettres latines (différentes ou munies d'indices) les indices „ordinaires", les indices remarquables considérés seront notés par la lettre grecque α (au besoin avec indice). Ainsi p. ex. dans le produit extérieur

$$[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_p e_q e_r \ldots e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_2} \ldots e_{i_k}]$$

$i_1, i_2, \ldots, p, q, r, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_2, \ldots, i_k$ sont tous des entiers positifs; on a $i_1 < i_2 < \ldots < p < q < r < \ldots < \alpha_1 < \ldots < \alpha_2 < \ldots < i_k$, $k \leqq n - 1$, les indices α_1, α_2 sont remarquables et les indices p, q, r suivent immédiatement l'un l'autre dans l'ordre naturel de l'ensemble des indices.

---

[24]) Le nombre 0 peut donc également être un indice inférieur remarquable.

[25]) Ici, u est un entier arbitraire vérifiant les inégalités $1 \leqq u \leqq n - 1$; ce n'est pas nécessairement un terme de la suite (3.1).

Lemme 3.5.

a) *Si, en différentiant l'expression*

$$[e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}] \tag{2.4}$$

le coefficient K_u, $1 \leqq u \leqq n-1$, *apparaît comme un nouveau facteur, alors dans la dérivée deuxième de* (2.4) *apparaît toujours* K_{u-1} (*si* $u \neq 1$) *et* K_{u+1} (*si* $u+1 \neq n$).

b) *Si le coefficient* K_{u-1}, *ou* K_{u+1}, *ne figure pas, en tant qu'un des facteurs, déjà dans la dérivée première, il apparaît, à la dérivée du deuxième ordre, comme le coefficient de l'expression qu'on obtient en différentiant le terme de la dérivée première de* (2.4) *qui contient le coefficient* K_u *en tant qu'un facteur scalaire.*

Démonstration. Pour que le coefficient K_u apparaisse dans la dérivée de l'expression (2.4), cette dernière doit être, en vertu du lemme 2.5, soit de la forme

$$1)\quad [e_{i_1}\dots e_pe_ue_q\dots e_{i_k}]\,,\qquad p \leqq u-1\,,\quad q \geqq u+2 \tag{3.3}$$

soit

$$2)\quad [e_{i_1}\dots e_re_{u+1}e_s\dots e_{i_k}]\,,\quad r \leqq u-1\,,\quad s \geqq u+2\,. \tag{3.4}$$

Considérons d'abord le cas 1). Nous avons encore plusieurs possibilités:

Si $p = u-1$, la dérivée de l'expression (3.3) contient entre autres (sans tenir compte des coefficients scalaires) l'expression

$$[e_{i_1}\dots e_{u-1}e_{u+1}e_q\dots e_{i_k}]$$

dont le coefficient scalaire contient K_u en tant que facteur; une nouvelle différentiation donne ensuite le produit extérieur

$$[e_{i_1}\dots e_ue_{u+1}e_q\dots e_{i_k}]\,,$$

dont le coefficient scalaire contient le facteur K_{u-1}.

Si $p \leqq u-2$, la différentiation de l'expression (3.3) donne l'expression

$$[e_{i_1}\dots e_pe_{u-1}e_q\dots e_{i_k}]\,,$$

dont le coefficient scalaire contient K_{u-1}; en continuant la différentiation nous obtenons entre autres

$$[e_{i_1}\dots e_pe_ue_q\dots e_{i_k}]$$

avec un coefficient où figure K_{u-1} de nouveau.

En ce qui concerne K_{u+1}, nous avons ou bien $q = u+2$ et la différentiation de (3.3) donne

$$[e_{i_1}\dots e_pe_ue_{u+1}e_h\dots e_{i_k}]\,,\quad h \geqq u+3$$

et le coefficient scalaire correspondant contient K_{u+1}; une nouvelle différentiation donne ensuite entre autres

$$[e_{i_1} \dots e_p e_u e_{u+2} e_h \dots e_{i_k}]$$

avec un coefficient contenant K_{u+1}; si par contre $q \geqq u + 3$, la dérivée première de l'expression (3.3) contient

$$[e_{i_1} \dots e_p e_{u+1} e_q \dots e_{i_k}] ,$$

et le coefficient scalaire correspondant contient K_u, une nouvelle différentiation donne

$$[e_{i_1} \dots e_p e_{u+2} e_q \dots e_{i_k}]$$

avec un coefficient contenant K_{u+1}.

Notre énoncé est donc démontré dans les cas a) et b). Le cas 2) peut se discuter d'une manière analogue.

Lemme 3.6. *Supposons que le coefficient K_u, $1 \leqq u \leqq n - 1$, apparaisse pour la première fois dans la dérivée m-ème de (2.4), $m \geqq 2$. Alors, dans la dérivée de l'ordre $m - 1$, un des produits extérieurs dont elle est composée doit contenir comme un nouveau coefficient soit K_{u-1}, soit K_{u+1}; ce coefficient apparaît comme coefficient de l'expression dont la dérivée contient entre autres le terme dont le coefficient scalaire contient K_u.*

Démonstration. Tout, comme à la démonstration du lemme 3.5, on trouve qu'un au moins des produits extérieurs dont se compose la dérivée $(m - 1)$-ème considérée, doit être soit de la forme (3.3), soit de la forme (3.4). Considérons p. ex. l'expression (3.3). En tenant compte des formules de Frenet et des règles sur la différentiation des produits extérieurs, nous trouvons ceci:

Le produit extérieur figurant dans la dérivée d'ordre $m - 2$, et d'ont la dérivée donne entre autres l'expression (3.3) – nous allons noter ce produit extérieur par la lettre $\mathscr{A}$ – diffère de l'expression (3.3) seulement en ce que, au passage de l'expression $\mathscr{A}$ à (3.3), un des indices croît ou décroît d'une unité. Or, si les deux indices u, q figuraient déjà dans $\mathscr{A}$, ou bien encore, si l'expression $\mathscr{A}$ avait la forme $[e_{i_1} \dots e_p e_u e_h \dots \dots e_{i_k}]$, avec $h \geqq u + 2$, alors le coefficient K_u apparaîtrait déjà dans la dérivée d'ordre $m - 1$, ce qui est contradictoire à nos hypothèses. Pour la même raison, il n'est pas possible que l'expression $\mathscr{A}$ ait la forme $[e_{i_1} \dots e_p e_{u+1} e_q \dots e_{i_k}]$. Les seuls cas possibles sont donc $q = u + 2$ et l'expression $\mathscr{A}$ a la forme

$$(3.5) \qquad [e_{i_1} \dots e_p e_u e_{u+1} e_h \dots e_{i_k}] , \quad h \geqq u + 3$$

ou bien $p < u - 1$ et l'expression $\mathscr{A}$ a la forme

$$(3.6) \qquad [e_{i_1} \dots e_p e_{u-1} e_q \dots e_{i_k}] .$$

Or, la dérivée de (3.5) contient le coefficient K_{u+1}, celle de (3.6) contient K_{u-1}.
Il en va de même de l'expression (3.4). Notre lemme 3.6 est donc démontré.

Convention 3.7. Soit α_1 le premier (dans l'ordre naturel) indice remarquable de l'espace $E_{i_1 \dots i_k}$. Sauf avis contraire, nous supposons d'abord $\alpha_1 \neq 0$.

Convention 3.8. Nous appellerons écart de deux indices la valeur absolute de leur différence. Par analogie, nous appellerons écart de deux coefficients l'écart de leurs indices.

Lemme 3.9. *Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_z)$ tous les indices remarquables de l'espace $E_{i_1 \dots i_k}$ (voir la définition 3.1), $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_z$. L'indice u soit situé entre les indices remarquables α_j, α_{j+1}, c'est-à-dire $\alpha_j \leqq u \leqq \alpha_{j+1}$. Soit*

$$\min(u - \alpha_j, \alpha_{j+1} - u) = \beta \, . \tag{3.7}$$

Alors le coefficient K_u apparaîtra pour la première fois dans la dérivée d'ordre $\beta + 1$ de l'expression (2.4).

Démonstration. Il résulte du lemme 2.5 et de la définition 3.1 que la dérivée première de (2.4) fait apparaître tous les coefficients remarquables, et ceux-ci seulement, chacun une fois. Il résulte de nos lemmes 3.5 et 3.6 que la deuxième dérivée fait apparaître précisément tous les coefficients dont les indices diffèrent d'une unité des indices des coefficients remarquables[26]; le reste de la démonstration se fait par récurrence, à l'aide de nos lemmes 3.5 et 3.6.

Lemme 3.10. *Soient $K_{j_1}, K_{j_2}, \dots, K_{j_p}$ tous les coefficients distincts pour lesquels le minimum du second membre de (3.2) est atteint, soient $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p}$ les indices remarquables correspondants (qui peuvent déjà être égaux).*[27]

Puis

$$\mathrm{cl}\, K_{j_1} + |j_1 - \alpha_{j_1}| = \mathrm{cl}\, K_{j_2} + |j_2 - \alpha_{j_2}| = \dots = \mathrm{cl}\, K_{j_p} + |j_p - \alpha_{j_p}| = \gamma \, . \tag{3.8}$$

La démonstration est évidente.[28]

[26]) Si le coefficient voisin d'un coefficient remarquable est lui-même remarquable, il apparaît dès la première différentiation, mais cela ne restreint pas la validité de nos raisonnements.

[27]) Le minimum de (3.2) peut être atteint pour différentes paires qui diffèrent par l'un des éléments ou par les deux. L'indice j étant fixé, le minimum peut être obtenu pour deux valeurs différentes de α. Dans ce cas, nous prendrons pour α_j l'un quelconque des deux indices remarquables considérés.

[28]) La relation (3.8) est en principe une généralisation de (2.11). Tout comme la relation (2.11) a défini le symbole α (introduit au paragraphe 2 où il ne désigne pas, par opposition au paragraphe 3, un indice remarquable), la relation (3.8) définit la signification du symbole γ — c'est la valeur commune des expressions données.

Lemme 3.11. *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme* 3.9 *et soit*

$$\beta = u - \alpha_j \tag{3.9}$$

Si α_j est un indice inférieur remarquable, alors un des termes dont est composée la dérivée de l'ordre $\beta + 1$ de l'expression (2.4) *a la forme*

$$\begin{aligned} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_u [e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{\alpha_j+\beta+1} e_{\alpha_{j+1}+1} \dots e_{i_k}] = \\ = K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_u [e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{u+1} e_{\alpha_{j+1}+1} \dots e_{i_k}] , \quad i_h \leqq \alpha_j - 1 . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si α_j est un indice supérieur remarquable, alors la dérivée de l'ordre $(\beta + 1)$, β étant défini par (3.9), *renferme un terme de la forme*

$$(-1)^{\beta+1} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_u [e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{\alpha_j+1} \dots e_u e_{i_h} \dots e_{i_k}] , \tag{3.11}$$

avec $i_h \geqq u + 2$.

Si

$$\beta = \alpha_{j+1} - u \tag{3.12}$$

et que α_{j+1} soit un indice inférieur remarquable, alors la dérivée $(\beta + 1)$-ème renferme un terme de la forme

$$K_{\alpha_{j+1}} K_{\alpha_{j+1}-1} \dots K_u [e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{u+1} e_{u+2} \dots e_{\alpha_{j+1}+1} \dots e_{i_k}] , \tag{3.13}$$

avec $i_h \leqq u - 1$.

Si (3.12) *a lieu et α_{j+1} est une indice supérieur remarquable, la dérivée $(\beta + 1)$-ème renferme un terme de la forme*

$$(-1)^{\beta+1} K_{\alpha_{j+1}} K_{\alpha_{j+1}-1} \dots K_u [e_{i_1} \dots e_u e_{i_h} \dots e_{i_k}] \tag{3.14}$$

avec $i_h \geqq \alpha_{j+1} + 2$.

Si la relation (3.9) *est vérifiée et* (3.12) *ne l'est pas, alors* (3.10), *ou* (3.11) *respectivement, sont les seules expressions dans la dérivée de l'ordre $\beta + 1$, dont le coefficient scalaire contienne le coefficient K_u (en ce sens que les autres termes de la dérivée en question ne contiennent ni K_u ni ses dérivées). Si* (3.12) *est vérifiée et* (3.9) *ne l'est pas, alors K_u apparaît dans une, et dans une seule, des expressions* (3.13), *ou* (3.14) *respectivement. Si* (3.9) *et* (3.12) *sont vérifiées les deux, alors les seules expressions dans la dérivée de l'ordre $\beta + 1$, qui contiennent K_u sont soit* (3.10) *et* (3.14), *soit* (3.11) *et* (3.13).

Démonstration.

a) Nous prouvons la validité de la formule (3.10) comme suit: α_j étant un indice inférieur remarquable, la suite (3.1) contient α_j sans contenir $\alpha_j + 1$ et le terme suivant de la suite (3.1) est évidemment $\alpha_{j+1} + 1$ avec $\alpha_{j+1} - \alpha_j \geqq 1$. Il est évident que la première différentiation de l'expression (2.4) fait apparaître un terme de la forme

$$K_{\alpha_j}[e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{\alpha_j+1} e_{\alpha_{j+1}+1} \dots e_{i_k}] ,$$

où $i_h \leqq \alpha_j - 1$. Le cas de $\beta = 0$ est donc résolu.

Soit maintenant $\beta \geqq 1$; alors en vertu de (3.7) et (3.9) on a

$$\beta = u - \alpha_j \leqq \alpha_{j+1} - u$$

$$\alpha_j + \beta = u \leqq \alpha_{j+1} - u + \alpha_j = \alpha_{j+1} - \beta \leqq \alpha_{j+1} - 1$$

$$\alpha_j + \beta + 1 \leqq \alpha_{j+1} . \tag{3.15}$$

A l'aide des formules de Frenet, nous pouvons déjà démontrer facilement par récurrence que la dérivée d'ordre $m + 1$ de l'expression (2.4) contient un terme de la forme

$$K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_{\alpha_j+m}[e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{\alpha_j+m+1} e_{\alpha_{j+1}+1} \dots e_{i_k}]$$

avec $1 \leqq m \leqq \beta$, c. q. f. d.

b) D'une manière analogue nous démontrons la validité de (3.11). En vertu de nos hypothèses, la suite (3.1) contient $\alpha_j + 1$ sans contenir α_j; ensuite elle contient un m arbitraire pour lequel

$$\alpha_j + 1 \leqq m \leqq \alpha_{j+1} , \tag{3.16}$$

α_{j+1} étant l'indice remarquable suivant. La première différentiation de l'expression (2.4) fournit donc un terme de la forme

$$-K_{\alpha_j}[e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{i_h} \dots e_{i_k}]$$

avec $i_h > \alpha_j + 2$ si et seulement si $\alpha_j + 1 = \alpha_{j+1}$. Or, dans ce cas-là, on doit avoir $\beta = 0$ en vertu de (3.7), mais la relation (3.11) est déjà démontrée pour ce cas. Si $\beta > 0$, on a $i_h = \alpha_j + 2$ et nous démontrons par récurrence que la dérivée d'ordre $(\overline{m} + 1)$ de l'expression (2.4), $1 \leqq \overline{m} < \beta$, contient un terme de la forme

$$(-1)^{\overline{m}+1} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_{\alpha_j+\overline{m}}[e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{\alpha_j+1} \dots e_{\alpha_j+\overline{m}} e_{i_{h'}} \dots e_{i_k}] ,$$

où $i_{h'} = \alpha_j + \overline{m} + 2$, car on a (3.15), c'est-à-dire

$$\alpha_j + \overline{m} < \alpha_j + \beta \leqq \alpha_{j+1} - 1 ,$$

ce qui signifie que, d'après (3.16), l'indice $\alpha_j + \overline{m} + 2 \leqq \alpha_{j+1}$ était un terme original de la usite (3.1) et jusqu'à présent n'a pas pu être remplacé par un autre à la suite des différentiations effectuées. Pour $\overline{m} = \beta - 1$ en particulier, nous obtenons ainsi un terme de la forme

$$(-1)^{\beta} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_{\alpha_j+\beta-1}[e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{\alpha_j+1} \dots e_{\alpha_j+\beta-1} e_{\alpha_j+\beta+1} \dots e_{i_k}] ,$$

et enfin dans la dérivée d'ordre β nous trouvons un terme de la forme

$$(-1)^{\beta+1} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+j} \dots K_{\alpha_j+\beta}[e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{\alpha_j+1} \dots e_{\alpha_j+\beta} \dots e_{i_k}] =$$
$$= (-1)^{\beta+1} K_{\alpha_j} K_{\alpha_j+1} \dots K_u[e_{i_1} \dots e_{\alpha_j} e_{\alpha_j+1} \dots e_u \dots e_{i_k}] .$$

Cela achève la démonstration de la relation (3.11).

c) Pour démontrer (3.13) et (3.14) on procède d'une manière analogue.

d) Le reste de notre lemme se démontre comme suit: Le cas de $\beta = 0$ a été discuté déjà au début de la démonstration du lemme 3.9. Soit donc $\beta \geqq 1$, c'est-à-dire $\alpha_{j+1} - \alpha_j \geqq 2$ et supposons que nous ayons

(3.17) $$\beta = u - \alpha_j < \alpha_{j+1} - u .$$

Supposons ensuite que $m < \beta$ et que le coefficient K_{α_j+m} apparaît pour la première fois, et une fois seulement, dans la dérivée de l'ordre $m + 1$ de l'expression (2.4) le coefficient K_{α_j+m+1} ne figurant pas encore dans cette dérivée de l'ordre $m + 1$. Alors, à la différentiation suivante, il apparaîtra à partir de l'expression correspondante, un et un seul terme contenant le coefficient K_{α_j+m+1} (voir nos lemmes 2.5 et 3.5). Autrement, le coefficient K_{α_j+m+1} pourrait apparaître seulement dans la dérivée d'un terme dont le coefficient scalaire contient K_{α_j+m+2} (voir notre lemme 3.6). Mais il résulte de (3.17) que l'on a

$$u < \tfrac{1}{2}(\alpha_{j+1} + \alpha_j) ,$$

donc

$$\beta = u - \alpha_j < \tfrac{1}{2}(\alpha_{j+1} - \alpha_j)$$

et comme $m < \beta$, on a

$$m < \tfrac{1}{2}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) - 1 = \tfrac{1}{2}(\alpha_{j+1} - \alpha_j - 2) ,$$

donc

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j - 2 > 2m , \quad \alpha_{j+1} - (\alpha_j + m + 2) > m .$$

Nous voyons donc que l'écart de K_{α_j+m+2} des coefficients K_{α_j} et $K_{\alpha_{j+1}}$ est $> m$, son écart des autres coefficients remarquables étant encore plus grand. En vertu de notre lemme 3.9 K_{α_j+m+2} ne peut donc figurer dans la dérivée de l'ordre $m + 1$. Il en résulte que K_{α_j+m+1} n'apparaîtra qu'une seule fois dans la dérivée de l'ordre $m + 2$. Par récurrence, on en déduit que, dans le cas (3.17), il y a un et un seul terme dans la dérivée de l'ordre $\beta + 1$ dont le coefficient scalaire contient $K_{\alpha_j+\beta} = K_u$. Nous avons déjà démontré plus haut que ce terme a la forme (3.10) ou (3.11). D'une manière analogue, on peut démontrer aussi les autres énoncés analogues donnés à la fin du lemme 3.11, si l'on tient encore compte du fait que de deux indices remarquables voisins, l'un doit toujours être supérieur et l'autre inférieur.

Lemme 3.12. *Soit γ donné par la formule* (3.8). *Soient*

$$j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \dots, j_{p_1}^{(1)} , \quad \text{évent.} \quad j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, \dots, j_{p_2}^{(2)}$$

tous les indices de (3.8) *auxquels peut*[29]), *en* (3.8), *correspondre un indice remarquable supérieur ou inférieur, lié à eux par les relations*

$$j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}} \geqq 0\,, \quad 1 \leqq m \leqq p_1\,, \quad \textit{évent.} \quad j_m^{(2)} - \alpha_{j_m^{(2)}} \geqq 0\,, \quad 1 \leqq m \leqq p_2\,.$$

Soient ensuite

$$j_1^{(3)}, j_2^{(3)}, \ldots, j_{p_3}^{(3)}\,, \quad \textit{évent.} \quad j_1^{(4)}, j_2^{(4)}, \ldots, j_{p_4}^{(4)}$$

tous les indices auxquels peut en (3.8) *correspondre un indice remarquable supérieur ou inférieur lié par les relations*

$$j_m^{(3)} - \alpha_m^{(3)} \leqq 0\,, \quad 1 \leqq m \leqq p_3\,, \quad \textit{évent.} \quad j_m^{(4)} - \alpha_{j_m^{(4)}} \leqq 0\,, \quad 1 \leqq m \leqq p_4\,.^{30})$$

Alors dans la dérivée de l'ordre $\gamma - r + 1$ *de l'expression* (2.4), *les coefficients scalaires qui ont la classe différentielle r sont précisément ceux qui sont d'une des quatre formes suivantes*

$$(3.18) \qquad (-1)^{j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}} + 1} K_{\alpha_{j_m^{(1)}}} K_{\alpha_{j_m^{(1)}} + 1} \ldots K_{j_m^{(1)} - 1} \frac{\mathrm{d}^{\varrho_{j_m^{(1)}} - r} K_{j_m^{(1)}}}{\mathrm{d}t^{\varrho_{j_m^{(1)}} - r}}$$

$$(3.19) \qquad K_{\alpha_{j_m^{(2)}}} K_{\alpha_{j_m^{(2)}} + 1} \ldots K_{j_m^{(2)} - 1} \frac{\mathrm{d}^{\varrho_{j_m^{(2)}} - r} K_{j_m^{(2)}}}{\mathrm{d}t^{\varrho_{j_m^{(2)}} - r}}$$

$$(3.20) \qquad (-1)^{\alpha_{j_m^{(3)}} - j_m^{(3)} + 1} K_{\alpha_{j_m^{(3)}}} K_{\alpha_{j_m^{(3)}} - 1} \ldots K_{j_m^{(3)} + 1} \frac{\mathrm{d}^{\varrho_{j_m^{(3)}} - r} K_{j_m^{(3)}}}{\mathrm{d}t^{\varrho_{j_m^{(3)}} - r}}$$

$$(3.21) \qquad K_{\alpha_{j_m^{(4)}}} K_{\alpha_{j_m^{(4)}} - 1} \ldots K_{j_m^{(4)} + 1} \frac{\mathrm{d}^{\varrho_{j_m^{(4)}} - r} K_{j_m^{(4)}}}{\mathrm{d}t^{\varrho_{j_m^{(4)}} - r}}$$

où toujours $1 \leqq m \leqq p_i$, $1 \leqq i \leqq 4$, *et où nous avons posé* $\varrho_{j_m^{(i)}} = \mathrm{cl}\, K_{j_m^{(i)}}$, *pour* $1 \leqq i \leqq 4$. *Tous les autres coefficients scalaires qui figurent dans la dérivée de l'ordre* $(\gamma - r + 1)$ *ont une classe différentielle supérieure.*

Démonstration. Considérons l'expression (3.18). Comme pour le coefficient $K_{j_m^{(1)}}$ le minimum du second membre de (3.2) est réalisé, on a évidemment

$$\mathrm{cl}\, K_{\alpha_{j_m^{(1)}} + k} + \alpha_{j_m^{(1)}} + k - \alpha_{j_m^{(1)}} \geqq \mathrm{cl}\, K_{j_m^{(1)}} + j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}}\,,$$

donc

$$\mathrm{cl}\, K_{\alpha_{j_m^{(1)}} + k} > \mathrm{cl}\, K_{j_m^{(1)}} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}}\,,$$

il en résulte que la classe différentielle de l'expression (3.18) est

$$\mathrm{cl} \frac{\mathrm{d}^{\varrho_{j_m^{(1)}} - r} K_{j_m^{(1)}}}{\mathrm{d}t^{\varrho_{j_m^{(1)}} - r}} = \varrho_{j_m^{(1)}} - (\varrho_{j_m^{(1)}} - r) = r\,.$$

---

[29]) Voir la remarque [27]), p. 338.

[30]) Compte tenu de la remarque [27]), p. 338, on a $\sum_{i=1}^{4} p_i \geqq p$.

Or, il découle du lemme 3.11 que l'expression (3.18) apparaîtra dans la dérivée de l'ordre $(\beta + 1) + \varrho_{j_m^{(1)}} - r$. Mais

$$\beta + 1 + \varrho_{j_m^{(1)}} - r = j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}} + 1 + \operatorname{cl} K_{j_m^{(1)}} - r = \gamma - r + 1 .$$

Il en est de même des expression (3.19)−(3.21), et nous avons ainsi pris en considération tous les coefficients pour lesquels le minimum de (3.2) est réalisé.

Il nous reste donc à démontrer que tous les autres coefficients ont une classe différentielle supérieure. Il résulte du lemme 3.11 que (3.18)−(3.21) sont les seules expressions qui contiennent les dérivées de l'ordre maximum figurant dans la dérivée de l'ordre $\gamma - r + 1$ des coefficients pour lesquels le minimum du second membre de (3.2) est réalisé. Soit ensuite K_ε un coefficient arbitraire pour lequel le minimum de (3.2) ne soit pas réalisé, c'est-à-dire que $\operatorname{cl} K_\varepsilon + |\varepsilon - \alpha_\varepsilon| > \gamma$ où α_ε est le coefficient remarquable le plus proche. Supposons que la dérivée de l'ordre maximum de K_ε qui figure dans la dérivée d'ordre $\gamma - r + 1$ de l'expression (2.4) soit de l'ordre γ_ε.[31]) Nous avons alors

$$\gamma_\varepsilon = \gamma - r + 1 - (|\varepsilon - \alpha_\varepsilon| + 1) < \operatorname{cl} K_\varepsilon - r ,$$

$$\operatorname{cl} \frac{\mathrm{d}^{\gamma_\varepsilon} K_\varepsilon}{\mathrm{d}t^{\gamma_\varepsilon}} = \operatorname{cl} K_\varepsilon - \gamma_\varepsilon > \operatorname{cl} K_\varepsilon - \operatorname{cl} K_\varepsilon + r = r$$

c. q. f. d.

Lemme 3.13. *Les produits extérieurs correspondants, associés aux expressions* (3.18)−(3.21) *ont respectivement une des formes*

$$[e_{i_1} \dots e_{\alpha_{j_m^{(1)}}} e_{\alpha_{j_m^{(1)}}+1} \dots e_{j_m^{(1)}} \dots e_{i_k}] , \tag{3.22}$$

$$[e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{j_m^{(2)}+1} \dots e_{i_k}] , \quad i_h \leqq \alpha_{j_m^{(2)}} - 1 , \tag{3.23}$$

$$[e_{i_1} \dots e_{j_m^{(3)}} e_{i_h} \dots e_{i_k}] , \quad i_h \geqq \alpha_{j_m^{(3)}} + 2 , \tag{3.24}$$

$$[e_{i_1} \dots e_{i_h} e_{j_m^{(4)}+1} e_{j_m^{(4)}+2} \dots e_{\alpha_{j_m^{(4)}}+1} \dots e_{i_k}] , \quad i_h \leqq j_m^{(4)} - 1 . \tag{3.25}$$

Toutes ces expressions diffèrent l'une de l'autre.

Démonstration. La première partie de l'énoncé découle de notre lemme 3.11. Pour démontrer la seconde partie, on procède comme suit:

Les expressions de la forme (3.22) s'obtiennent à partir de l'expression $[e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}]$ lorsqu'on y diminue $j_m^{(1)} - \alpha_{j_m^{(1)}} + 1$ indices successifs d'une unité chacun; pour les expressions de la forme (3.25) il faut faire accroître $\alpha_{j_m^{(4)}} - j_m^{(4)} + 1$ indices successifs d'une unité chacun; pour les expressions (3.23) ou (3.24) il faut faire accroître ou abaisser un seul indice de $j_m^{(2)} - \alpha_{j_m^{(2)}} + 1$ ou de $\alpha_{j_m^{(3)}} - j_m^{(3)} + 1$ unités. Il s'agit

[31]) Nous supposons ici implicitement que l'expression K_ε ou ses dérivées figurent dans cette dérivée en question. Mais si elles n'y figurent pas, cela ne nous empêche nullement dans nos raisonnements.

donc de modifications différentes dans les différents groupes; les modifications dans un même groupe mais pour différentes valeurs de m sont, bien entendu, différentes également.

Notre lemme 3.13 est ainsi démontré complètement.

A l'aide des lemmes énoncés ci-dessus, on peut démontrer le théorème 3.2; comme cette démonstration serait analogue à celle du théorème 2.3, nous ne le ferons pas ici en détails.

Théorème 3.14. *Soit* $(K_0, K_1, \ldots, K_{n-1})$ *une suite quelconque de coefficients de Frenet. Alors les classes différentielles de tous les éléments du repère de Frenet sont déterminées par la classe correspondante des suites fondamentales* $[K'_0, K'_1, \ldots$ $\ldots, K'_{n-1}]$ (voir la définition 2.8).

Démonstration. Soient $K_{j_s}, j_s, \alpha_{j_s}$ des valeurs arbitraires vérifiant (3.8). Nous allons montrer que

a) $\mathrm{cl}\, K_{j_s} = \mathrm{cl}\, K'_{j_s}$,

b) Pour tout indice u on a

$$\mathrm{cl}\, K'_u + |u - \alpha| \geqq \gamma \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in I_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

(voir la définition 3.1).

Ad a). L'inégalité $\mathrm{cl}\, K_{j_s} < \mathrm{cl}\, K'_{j_s}$ est impossible (voir (2.28)). Soit donc $\mathrm{cl}\, K'_{j_s} <$ $< \mathrm{cl}\, K_{j_s}$. Il existe alors un indice ε tel que

$$\mathrm{cl}\, K'_{j_s} = \mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - j_s|$$

(voir (2.27)). Mais alors

$$\mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - \alpha_{j_s}| \leqq \mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - j_s| + |j_s - \alpha_{j_s}| =$$
$$= \mathrm{cl}\, K'_{j_s} + |j_s - \alpha_{j_s}| < \mathrm{cl}\, K_{j_s} + |j_s - \alpha_{j_s}| = \gamma\,,$$

γ étant donné par la relation (3.8). Mais voilà une contradiction, car α_{j_s} est un indice remarquable, donc

$$\mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - \alpha_{j_s}| \geqq \gamma\,.$$

Ad b). Supposons qu'il existe un indice u et un indice remarquable α tels que

$$\mathrm{cl}\, K'_u + |u - \alpha| < \gamma\,.$$

Nous pouvons toujours écrire

$$\mathrm{cl}\, K'_u = \mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - u|\,.$$

Nous avons alors

$$\mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - \alpha| \leqq \mathrm{cl}\, K_\varepsilon + |\varepsilon - u| + |u - \alpha| =$$
$$= \mathrm{cl}\, K'_u + |u - \alpha| < \gamma\,,$$

ce qui est une nouvelle contradiction.

Corollaire 3.15. *Les classes différentielles des éléments principaux du répère de Frenet déterminent les classes différentielles de tous les éléments du repère de Frenet.*

Démonstration. Les classes différentielles des éléments principaux du repère de Frenet déterminent la classe correspondante des suites fondamentales de coefficients de Frenet (voir le théorème 2.17) et cette classe détermine à son tour, d'après le théorème 3.14, la classe différentielle de tous les éléments du repère.

Remarque 3.16. Soit n un entier $\geqq 2$ et soit $\min_{0 \leqq i \leqq n-1} (\text{cl}\, K_i) = r \geqq 0$. Il existe alors toujours un élément du repère dont la classe différentielle est $r + 1$ quel que soit le coefficient de Frenet pour lequel le minimum donné est réalisé. Si n est impaire, c'est l'espace $E_{24\ldots n-1}$ qui jouit de cette propriété, si n est pair, c'est l'espace $E_{24\ldots n}$. Cela découle immédiatement du théorème 3.2. (Voir le tableau de la page 4(94) du travail [2] et le tableau X à la fin du travail [7].) Pour les valeurs des classes différentielles des autres éléments du repère, il y a dans ces tableux plusieurs possibilités. Les valeurs maxima peuvent être atteintes par cl X et cl $E_{12\ldots n-1}$. La classe différentielle de ces éléments prend toutes les valeurs de $r + 1$ à $r + n$.

4. ETUDE DES VALEURS DE $\text{cl}\,(k_i/k_j)$, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, $i \neq j$, PAR RAPPORT AU SYSTÈME DE PARAMÈTRES σ_i, $0 \leqq i \leqq n-1$.[32]

Dans le paragraphe qui suit, nous étudierons les conditions que doit remplir une matrice carrée de type $n \times n$ pour qu'il existe une courbe C dans l'espace E_n, ayant cette matrice pour son type différentiel. Pour pouvoir obtenir des résultats dans cette direction, nous devrons nous appuyer sur quelques théorèmes concernant les valeurs de $\text{cl}\,(k_i/k_j)$, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, $i \neq j$, rapportées au système de paramètres σ_i, $0 \leqq i \leqq n-1$.

Convention 4.1. En tenant compte de la relation (1.4) où $K_u(t) \neq 0$ pour $0 \leqq u \leqq n-1$, t étant un paramètre régulier de départ, nous pouvons considérer n'importe quelle des grandeurs σ_u, $0 \leqq u \leqq n-1$, comme une fonction de la grandeur σ_v, $0 \leqq v \leqq n-1$. Si, dans la suite, nous écrivons, pour être plus court,

$$\varphi(\sigma_u) = f(\sigma_v)\,, \tag{4.1}$$

cela signifiera que le premier membre de (4.1) est une fonction composée, pour laquelle on a

$$\varphi[\sigma_u(\sigma_v)] = f(\sigma_v)$$

[32]) Voir la définition 1.2 et les formules (1.4) et (1.6).

ou bien nous pourrons interpréter (4.1) aussi de la façon suivante comme

$$\varphi(\sigma_u) = f[\sigma_v(\sigma_u)] .$$

Remarque 4.2. Les démonstrations des théorèmes qui suivent sont faites sous l'hypothèse $0 < \mathrm{cl}\,(k_i/k_j) < \infty$, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, $i \neq j$. Le lecteur peut voir aisément que ces théorèmes restent valables même si nous admettons $\mathrm{cl}\,(k_i/k_j) = 0$, ou $\mathrm{cl}\,(k_i/k_j) = \infty$ pour certaines, ou même pour toutes les paires d'indices.

Théorème 4.3. *On a*

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j}(k_i/k_j) = \mathrm{cl}_{\sigma_i}(k_i/k_j) .$$ [33]

Démonstration. Posons

$$\mathrm{cl}_{\sigma j}\frac{k_i}{k_j} = m \tag{4.2}$$

et prenons σ_j pour le paramètre de départ de la formule (1.4). Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_j}\left(\frac{k_i}{k_j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}\sigma_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot K_i(\sigma_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot\frac{k_i}{k_j}\,[\sigma_j(\sigma_i)] \tag{4.3}$$

(voir (1.5)). Le second membre de (4.3), pris comme une fonction du paramètre σ_i, a la classe différentielle $m-1$ où m est donné par (4.2). Nous calculons les dérivées suivantes comme les dérivées d'une fonction de fonction ce qui fait apparaître chaque fois le facteur k_i/k_j de classe différentielle m; cela nous conduit à la relation

$$n = \mathrm{cl}_{\sigma_j}\left(\frac{k_i}{k_j}\right) \geqq m . \tag{4.4}$$

De l'autre côté,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_i}{k_j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_j}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_j}{\mathrm{d}\sigma_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_j}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot\frac{k_j}{k_i}. \tag{4.5}$$

Mais d'après (4.4) on a

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_j}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)\cdot\frac{k_j}{k_i}\right] = n-1 ,$$

[33]) Par le symbole cl_{σ_i}, $0 \leqq i \leqq n-1$, nous entendrons dans la suite toujours la classe différentielle par rapport au paramètre σ_i.

d'où en vertu de (4.5) nous déduisons, comme tout à l'heure, que

$$m \geqq n\,. \tag{4.6}$$

En comparant (4.4) avec (4.6) nous obtenons l'énoncé.

Théorème 4.4. *Soit* $\mathrm{cl}_{\sigma_i}\,\varphi(\sigma_i) = m$, $\mathrm{cl}_{\sigma_i}\,(k_i/k_j) = m_1 \geqq m$, $k_i/k_j \neq 0$. *Si nous posons* $\varphi[\sigma_i(\sigma_j)] = \psi(\sigma_j)$, alors

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j}\,\psi(\sigma_j) = m\,.$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}\psi(\sigma_j)}{\mathrm{d}\sigma_j} = \frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma_i)}{\mathrm{d}\sigma_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}\sigma_j} = \frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma_i)}{\mathrm{d}\sigma_i}\cdot\frac{k_i}{k_j}$$

d'où il résulte (tout comme en 4.3) que

$$n = \mathrm{cl}_{\sigma_j}\,\varphi(\sigma_j) \geqq m\,. \tag{4.7}$$

De l'autre côté

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma_i)}{\mathrm{d}\sigma_i} = \frac{\mathrm{d}\psi(\sigma_j)}{\mathrm{d}\sigma_j}\cdot\frac{k_j}{k_i}\,,$$

d'où

$$m - 1 \geqq \min\left(n - 1, m_1\right).$$

Or comme $m - 1 < m_1$, il faut que l'on ait

$$m - 1 \geqq n - 1\,. \tag{4.8}$$

L'énoncé découle de (4.7) et (4.8).

Théorème 4.5. *Soit*

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i}\,\frac{k_i}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_j}\,\frac{k_i}{k_j} = m\,,\quad \mathrm{cl}_{\sigma\delta_i}\,\frac{k_i}{k_k} = \mathrm{cl}_{\sigma_k}\,\frac{k_i}{k_k} = n \neq m\,.$$

Alors

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j}\,\frac{k_j}{k_k} = \mathrm{cl}_{\sigma_k}\,\frac{k_j}{k_k} = \min\left(m, n\right).$$

Démonstration. Comme

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i}\,\frac{k_j}{k_k} = \mathrm{cl}_{\sigma_i}\left(\frac{k_j/k_i}{k_k/k_i}\right) = \mu = \min\left(m, n\right)$$

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i}\,\frac{k_i}{k_j} \geqq \mu\,,$$

il résulte immédiatement du théorème 4.4 que

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_j}{k_k} = \mu ,$$

c. q. f. d., car le reste du théorème est une conséquence du théorème 4.3.

Théorème 4.6. *Soit*

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_i}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_i}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_i}{k_k} = \mathrm{cl}_{\sigma_k} \frac{k_i}{k_k} = m .$$

Alors

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_k}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_k} \frac{k_k}{k_j} \geqq m .$$

Démonstration. Nous avons

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_k}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_i} \left(\frac{k_k/k_i}{k_j/k_i}\right) \geqq m .$$

Posons

$$\psi(\sigma_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_j}\left(\frac{k_k}{k_j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_k}{k_j}\right) . \frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}\sigma_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_i}\left(\frac{k_k}{k_j}\right) . \frac{k_i}{k_j}\, \varphi(\sigma_i) .$$

Nous avons évidemment

$$n = \mathrm{cl}_{\sigma_i} \varphi(\sigma_i) \geqq m - 1 .$$

Dans le cas où $n = m - 1$ ou $n = m$ nous obtenons tout de suite à partir du théorème 4.4 l'inégalité

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \psi(\sigma_j) \geqq m - 1 . \tag{4.9}$$

Il est aisé de voir que la relation (4.9) subsite même si $n \geqq m + 1$. Or (4.9) est équivalente à la relation

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \left(\frac{k_k}{k_j}\right) \geqq m ,$$

c. q. f. d.

Les théorèmes 4.5 et 4.6 pris ensemble sont évidemment équivalents au théorème 4.7 suivant.

Théorème 4.7. *Soit*

$$\mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_i}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_i}{k_j} = m , \quad \mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_i}{k_k} = \mathrm{cl}_{\sigma_k} \frac{k_i}{k_k} = n .$$

Alors

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_k}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_k} \frac{k_k}{k_j} \geqq \min(m, n).$$

Voici les raisons pour lesquelles nous avons énoncé les théorèmes 4.3, 4.5, 4.6 et 4.7: Dans la suite, nous étudierons le type différentiel d'une courbe régulière C (voir la définition 1.3), en nous intéressant aux valeurs des classes différentielles des expressions k_i/k_j, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, $i \neq j$, par rapport à un système de paramètres σ_u, $0 \leqq u \leqq n-1$. La classe différentielle des expressions k_i/k_j dépend, bien entendu, du choix des paramètres, mais la situation est plus simple qu'elle ne paraît au premier coup d'oeil. Le coefficient k_i/k_j ou k_j/k_i devient important (voir (1.5)) seulement si nous considérons les classes différentielles par rapport au paramètre σ_i ou σ_j. Or, d'après notre théorème 4.3, nous avons

$$\mathrm{cl}_{\sigma_j} \frac{k_i}{k_j} = \mathrm{cl}_{\sigma_i} \frac{k_j}{k_i}.$$

Cela nous permet d'énoncer la

Définition 4.8. Nous appellerons paramètre associé au coefficient k_i/k_j l'un et l'autre des paramètres σ_i, σ_j.[34])

Convention 4.9. En écrivant cl k_i/k_j, nous entendrons dans la suite toujours la classe différentielle par rapport aux paramètres associés; nous ne signalerons donc plus explicitement de quel paramètre il s'agit.

Théorème 4.10. *Si nous interprétons l'écriture* cl k_i/k_j *au sens de la définition* 4.8 *et de la convention* 4.9, *les théorèmes* 2 *et* 3 *du travail* [7] *sont toujours vrais.*

La démonstration découle de nos théorèmes 4.5 et 4.6.

Comme nous ne nous intéresserons pas, dans la suite, à la classe différentielle du quotient k_i/k_j par rapport à un autre paramètre que les deux paramètres associés, nous voyons que le théorème 4.10 nous donne un outil effectif, pour obtenir d'autres résultats.

Théorème 4.11. *Soit* $r = \min(\mathrm{cl}\, k_0, \mathrm{cl}\, k_1, \ldots, \mathrm{cl}\, k_{n-1})$[35]) *où* $k_0 = 1$, *et soit* $\mathcal{J} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. *La relation*

$$\mathrm{cl} \frac{k_i}{k_j} \geqq r + \alpha, \quad \alpha \geqq 1, \quad \textit{entier} \tag{4.10}$$

---

[34]) Cette correspondance n'est univoque en aucun sens, mais la définition donnée convient à nos buts.

[35]) Par cl k_i nous entendons ici la classe différentielle par rapport au paramètre s, ce qui est d'après la définition 4.8 un des deux paramètres associés au coefficient $k_i/k_0 = k_i$.

considérée comme une relation existant entre les indices correspondants i et j, est une relation d'équivalence qui engendre une partition de l'ensemble $\mathscr{I}$.

Démonstration. La réflexivité et la symétrie de la relation (4.10) sont évidentes; la transitivité découle immédiatement de la convention 4.9 et du théorème 4.7.

Définition 4.12. Les composantes de l'ensemble $\mathscr{I}$, correspondant à la relation (4.10), seront appelées composantes d'ordre α.

Théorème 4.13. *Soit $\mathscr{I}^\alpha$ une quelconque des composantes d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$, et soient $i_\alpha, j_\alpha \in \mathscr{I}^\alpha$. Alors la relation*

$$\mathrm{cl}\left(\frac{k_{i_\alpha}}{k_{j_\alpha}}\right) \geqq r + \alpha + \beta\,, \quad \beta \geqq 1 \quad \textit{entier}\,, \quad i_\alpha, j_\alpha \in \mathscr{I}^\alpha \tag{4.11}$$

est de nouveau une relation d'équivalence qui engendre une partition de l'ensemble $\mathscr{I}^\alpha$. Les composantes d'ordre β qui se produisent à cette partition sont également partitions d'ordre $\alpha + \beta$ de l'ensemble $\mathscr{I}$.[36]

Démonstration. La première partie du théorème est évidente. Pour démontrer la deuxième partie, désignons par $(\mathscr{I}^\alpha)^\beta$ une quelconque des composantes d'ordre β de l'ensemble $\mathscr{I}^\alpha$. Il est évident que

$$(\mathscr{I}^\alpha)^\beta \subseteq \mathscr{I}^{\alpha+\beta} \tag{4.12}$$

où $\mathscr{I}^{\alpha+\beta}$ est une des composantes d'ordre $\alpha + \beta$ de l'ensemble $\mathscr{I}$. Ensuite on aura, en vertu de la définition de $(\mathscr{I}^\alpha)^\beta$,

$$(\mathscr{I}^\alpha)^\beta \subseteq \mathscr{I}^\alpha \tag{4.13}$$

en combinant (4.12) et (4.13) on en obtient

$$\mathscr{I}^{\alpha+\beta} \cap \mathscr{I}^\alpha \supseteq (\mathscr{I}^\alpha)^\beta \neq \emptyset\,.\text{[37]} \tag{4.14}$$

Or

$$\mathrm{cl}\left(\frac{k_u}{k_v}\right) \geqq r + \alpha + \beta \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\frac{k_u}{k_v}\right) \geqq r + \alpha\,,$$

où $u, v \in \mathscr{I} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et c'est pourquoi tous les éléments de l'ensemble $\mathscr{I}^{\alpha+\beta}$ se trouvent dans la même composante d'ordre α. En vertu de (4.14) nous avons donc

$$\mathscr{I}^{\alpha+\beta} \subseteq \mathscr{I}^\alpha\,.$$

---

[36]) Comme $\mathrm{cl}\,(k_i/k_i) = \infty$, il existe des composantes non vides des ordres arbitrairement élevés.

[37]) Voici ce que nous voulons dire par là: $(\mathscr{I})^{\alpha+\beta}$ est une composante d'ordre $\alpha + \beta$, qui a une intersection non vide avec une certaine composante $\mathscr{I}^\alpha$ d'ordre α, tout à fait déterminée. Autrement, la relation en question serait triviale.

Donc, $\mathscr{I}^{\alpha+\beta}$ contient les éléments de l'ensemble $\mathscr{I}^{\alpha}$ pour lesquels (4.11) est valable, c'est-à-dire

$$\mathscr{I}^{\alpha+\beta} \subseteq (\mathscr{I}^{\alpha})^{\beta} \tag{4.15}$$

est vrai. A partir de (4.12) et (4.15) on déduit déjà $\mathscr{I}^{\alpha+\beta} = (\mathscr{I}^{\alpha})^{\beta}$, donc la deuxième partie de notre théorème 4.13.

Définition 4.14. Soit $\mathscr{I}^{\alpha}$ une des composantes d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$. Nous appellerons partition d'ordre β de l'ensemble $\mathscr{I}^{\alpha}$ le système des ensembles contenant d'une part l'ensemble $\mathscr{I}^{\alpha}$, et d'autre part toutes ses composantes de cet ensemble qui sont d'ordres $1, 2, \ldots, \beta$.[38][39]) Une partition d'ordre β de l'ensemble $\mathscr{I}$ sera définie d'une manière analogue[40]).

Définition 4.15. Nous dirons qu'une partition d'ordre ω d'une composante $\mathscr{I}^{\alpha}$ (ou de l'ensemble $\mathscr{I}$) est une parition complète de la composante $\mathscr{I}^{\alpha}$ (de l'ensemble $\mathscr{I}$), lorsque chaque composante d'ordre ω contient un point et un seul.

Remarque 4.16. Nous montrerons plus tard que, pour nos buts du moins, il est possible de se limiter à envisager seulement les cas où cl $k_i/k_j < \infty$ pour $0 \leqq i \leqq \leqq n - 1$, $0 \leqq j \leqq n - 1$, $i \neq j$. Dans ces cas, il existe toujours un entier positif ω tel que la partition d'ordre ω de l'ensemble $\mathscr{I}$ soit une partition complète de l'ensemble $\mathscr{I}$. Nous parlerons alors de partition complète finie de l'ensemble $\mathscr{I}$. Mais en général il faut admettre la possibilité de $\omega = \infty$.[41])

Définition 4.17. Soit $\mathscr{R}$ une partition d'ordre β d'une composante $\mathscr{I}^{\alpha}$ (ou de l'ensemble $\mathscr{I}$). Nous dirons alors qu'une partition $\mathscr{R}_1$ d'ordre $\beta + \gamma$, $\gamma \geqq 1$, est un prolongement de la partition $\mathscr{R}$, lorsque toute composante d'ordre δ, $\delta \leqq \beta$, qui fait

---

[38]) Il faut comprendre cette définition ainsi: une quelconque des composantes du système donné n'est pas déterminée seulement par ses éléments, mais aussi par une indication de l'ordre duquel il s'agit. Il peut arriver alors que certaines des composantes diffèrent seulement par cette indication de l'ordre mais non pas par leurs éléments. Ainsi p. ex. $\mathscr{I}^2 = \{0, 1, 3\}$ signifie qu'il s'agit d'une composante d'ordre 2, dont les éléments sont les nombres 0, 1, 3. Mais en même temps nous dirons p. ex., au sens de notre théorème 4.13, qu'une composante d'ordre β par rapport à l'ensemble $\mathscr{I}^{\alpha}$ est identique à une composante d'ordre $\alpha + \beta$ de l'ensemble $\mathscr{I}$; ici il n'y a pas de malentendu à craindre. En parlant de l'ensemble $\mathscr{I}^2$ nous comprendrons par cela, dans notre cas p. ex., l'ensemble ayant pour ses éléments les nombres 0, 1, 3, — cette fois-ci sans tenir compte de l'ordre de la composante correspondante. C'est dans ce sens aussi qu'il faut comprendre toutes les formules du théorème 4.13 bien qu'on y ait parlé de composantes.

[39]) L'ensemble $\mathscr{I}$ sera appelé aussi composante d'ordre 0.

[40]) Pour faciliter l'expression, nous parlerons parfois aussi d'une partition de l'ensemble $\mathscr{I}$ en composantes d'ordres $1, 2, \ldots, \beta$.

[41]) Si une partition d'ordre ω, ω entier positif, est complète, il en sera évidemment de même de toute partition d'ordre $\omega_1 > \omega$. D'habitude, nous comprenons par l'expression partition complète une partition complète avec ω minimal.

partie de $\mathscr{R}$ fait également partie de $\mathscr{R}_1$. Dans ce cas-là, nous parlons du prolongement de la partition $\mathscr{R}$ d'ordre β en partition $\mathscr{R}_1$ d'ordre $\beta + \gamma$. D'une manière analogue, nous définissons le prolongement d'une partition $\mathscr{R}$ d'ordre β en partition complète $\bar{\mathscr{R}}$ d'ordre ω.

Définition 4.18. Soit $\mathscr{I}^\alpha$ une composante de l'ensemble $\mathscr{I}$, faisant partie d'une partition $\mathscr{R}$ d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$ et soit $\mathscr{R}_1$ une partition de l'ensemble $\mathscr{I}^\alpha$ en composantes d'ordre 1 (par rapport à la composante $\mathscr{I}^\alpha$, donc en composantes d'ordre $\alpha + 1$ par rapport à l'ensemble $\mathscr{I}$). Nous dirons alors que la partition $\mathscr{R}_2$ d'ordre $\alpha + 1$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ est une extension de la partition $\mathscr{R}_1$ lorsque

a) toute composante d'ordre $\leqq \alpha$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ qui fait partie de $\mathscr{R}$ fait également partie de $\mathscr{R}_2$,

b) toute composante d'ordre 1 de la composante $\mathscr{I}^\alpha$ donnée qui fait partie de $\mathscr{R}_1$ fait également partie de $\mathscr{R}_2$.

Dans ce cas-ci, nous parlerons de l'extension de la partition $\mathscr{R}_1$ en partition $\mathscr{R}_2$. D'une manière analogue, nous définissons l'extension d'une partition $\mathscr{R}_1$ de la composante $\mathscr{I}^\alpha$ en une partition complète $\mathscr{R}_\omega$ de l'ensemble $\mathscr{I}$, ou encore l'extension d'une partition complète $\mathscr{R}_\omega$ de la composante $\mathscr{I}^\alpha$ en une partition complète $\mathscr{R}_\omega$ de l'ensemble $\mathscr{I}$.

Définition 4.19. Soit $\mathscr{R}_\alpha$ une partition d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$ et soient $(\mathscr{R}_1^\alpha)_1$, $(\mathscr{R}_2^\alpha)_1, \ldots, (\mathscr{R}_q^\alpha)_1$, des partitions d'ordre 1 de toutes les q composantes distinctes d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$. Nous dirons alors qu'une partition $\mathscr{R}_{\alpha+1}$ d'ordre $\alpha + 1$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ est une composition des partitions $(\mathscr{R}_1^\alpha)_1, \ldots, (\mathscr{R}_q^\alpha)_1$, lorsque

a) toute composante d'ordre $\leqq \alpha$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ qui fait partie de $\mathscr{R}_\alpha$ fait également partie de $\mathscr{R}_{\alpha+1}$,

b) toute composante d'ordre $\alpha + 1$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ qui fait partie de $\mathscr{R}_{\alpha+1}$ fait (en tant que composante d'ordre 1) partie d'une des partitions $(\mathscr{R}_i^\alpha)_1$, $1 \leqq i \leqq q$, et réciproquement.

D'une manière analogue nous définissons la composition de partitions $(\mathscr{R}_i^\alpha)_1$, $1 \leqq i \leqq q$, dans le cas où nous partons d'une composante $\mathscr{I}^\beta$ d'ordre β au lieu de l'ensemble $\mathscr{I}$.

Définition 4.20. a) Soit donnée une partition complète $\mathscr{R}$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ et soit $\mathscr{I}^\alpha$ une composante fixée d'ordre α, faisant partie de $\mathscr{R}$. Considérons maintenant le système des composantes d'ordres $\alpha + \beta$, $\beta \geqq 0$, qui font partie de la partition $\mathscr{R}$ et qui, en tant qu'ensembles de points (c'est-à-dire sans tenir compte de l'ordre de la composante en question; voir la remarque[38]) p. 351) sont sous-ensembles de l'ensemble $\mathscr{I}^\alpha$. Le système de composantes correspondantes forme évidemment une partition complète $\mathscr{R}_1$ de l'ensemble $\mathscr{I}^\alpha$. Dans ce cas-là, nous dirons que la partition $\mathscr{R}$ implique la partition $\mathscr{R}_1$.

b) Supposons qu'une partition complète $\mathscr{R}$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ soit de l'ordre ω, $\omega \leqq \leqq \infty$, et soit $\mathscr{R}_2$ le système de toutes les composantes d'ordres $\leqq \beta$, $0 < \beta < \omega$. Alors, comme dans le cas a), nous dirons que la partition $\mathscr{R}$ implique la partition $\mathscr{R}_2$.

Théorème 4.21. *Soit $\mathscr{R}_\alpha$ une partition d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$. Alors pour les paires d'indices i, j qui ne vérifient pas la relation* (4.10) *la partition $\mathscr{R}_\alpha$ donnée détermine exactement la valeur de*

$$\mathrm{cl}\left(\frac{k_i}{k_j}\right). \tag{4.16}$$

Si $\mathscr{R}_{\alpha+\beta}$, $\beta \geqq 1$, est un prolongement arbitraire de la partition $\mathscr{R}_\alpha$, ce prolongement laisse la valeur (4.16) *sans changement.*

Si deux éléments i_1, j_1 vérifient la relation (4.10) *pour la partition $\mathscr{R}_\alpha$, ils la vérifient pour $\mathscr{R}_{\alpha+\beta}$ également.*

Démonstration. Dans le cas où la relation (4.10) n'est pas vérifiée, les indices i, j n'appartiennent pas à la même composante d'ordre α, déterminée par la partition $\mathscr{R}_\alpha$. Il existe alors évidemment un nombre $\gamma < \alpha$ tel que i et j sont éléments d'un même ensemble $\mathscr{I}^\gamma$, mais qu'il n'existe aucune composante d'ordre $\gamma + 1$ qui contienne les deux éléments i, j. Mais alors, on a manifestement $\mathrm{cl}\,(k_i/k_j) = \gamma$, la même relation étant valable pour toute partition $\mathscr{R}_{\alpha+\beta}$, $\beta \geqq 1$, prolongement de $\mathscr{R}_\alpha$.

Le fait que, dans le cas contraire, l'inégalité (4.10) reste valable, découle immédiatement du fait que toute composante d'ordre α, qui fait partie de la partition $\mathscr{R}_\alpha$, fait d'après la définition 4.17 partie de $\mathscr{R}_{\alpha+\beta}$ aussi.

Théorème 4.22. *Une partition complète de l'ensemble $\mathscr{I}$ détermine la valeur de* 4.16 *pour n'importe quelle paire d'éléments i, j.*

Si $i \neq j$, la démonstration suit le même cours que pour le théorème 4.21, si $i = j$, on a évidemment $\mathrm{cl}\,(k_i/k_i) = \infty$.

Théorème 4.23. *Soit n la dimension de l'espace, soit $\mathscr{I} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On peut toujours choisir un système de coefficients k_i, $1 \leqq i \leqq n-1$, $k_0 = 1$, de telle manière qu'il corresponde à une partition finie complète de l'ensemble $\mathscr{I}$, choisie arbitrairement.*

Démonstration. Les coefficients peuvent être choisis p. ex. de la façon suivante: Soit $\mathscr{I}_0^\alpha$, $\alpha \geqq 0$, la composante d'ordre α qui contient l'élément $k_0 = 1$. Dans tous les cas où c'est possible, choisissons dans chaque composante $\mathscr{I}_0^\alpha$ un élément qui n'appartient pas à $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$.[42]) Désignons par i_α cet élément et choisissons le coeffi-

[42]) Ce n'est pas possible dans le cas où tous les éléments de la composante $\mathscr{I}_0^\alpha$ sont également éléments de $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$.

cient k_{i_α} de façon à avoir

$$k_{i_\alpha} = f_\alpha(s) \in \langle \tfrac{1}{2}, 1 \rangle \quad \text{pour} \quad s \in \langle 0, s_0 \rangle \text{ [43]}$$
$$\mathrm{cl}_s f_\alpha(s) = r + \alpha\,,$$

et puis posons

$$\sigma_{i_\alpha} = \int k_{i_\alpha}\, \mathrm{d}s\,.$$

Il s'ensuit alors du théorème 4.3 $(i \sim i_\alpha,\ j \sim 0,\ k_0 = 1,\ \sigma_0 = s)$ que l'on a aussi $\mathrm{cl}_{\sigma_{i_\alpha}} k_{i_\alpha} = r + \alpha$.

Soit maintenant α un nombre fixe tel qu'on puisse trouver un élément i_α. Dans toutes les composantes d'ordre 1 de l'ensemble $\mathscr{I}_0^\alpha$ qui ne contiennent pas i_α, et à l'exception de la composante $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$, choisissons un représentant de chacune d'elles. L'élément i_α soit le représentant de la composante qui le contient. Posons $i_\alpha = i_{\alpha_1}$. Le système de représentants donné soit

(4.17) $$i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_m}\,. \text{ [44]}$$

Posons

$$k_{i_{\alpha_u}}(\sigma_{i_{\alpha_1}}) = k_{i_{\alpha_1}}(\sigma_{i_{\alpha_1}}) + u - 1\,, \quad 2 \leqq u \leqq m$$
$$\sigma_{i_{\alpha_u}} = \int k_{i_{\alpha_u}}\, \mathrm{d}s\,.$$

Alors on a évidemment

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha_1}}} (k_{i_{\alpha_u}} / k_{i_{\alpha_v}}) = r + \alpha \quad \text{pour} \quad u \neq v\,,$$
$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha_1}}} (k_{i_{\alpha_u}} / k_0) = \mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha_1}}} k_{i_{\alpha_u}} = r + \alpha\,,$$

et d'après le théorème 4.4 on a aussi

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha_u}}} k_{i_{\alpha_u}} = r + \alpha\,.$$

Le reste de la démonstration sera fait par récurrence. Supposons que nous ayons déjà déterminé les représentants de toutes les composantes d'ordre $\beta \geqq 1$ de la composante $\mathscr{I}_0^\alpha$ (à l'exception de celles qui font partie de la partition d'ordre arbitraire de l'ensemble $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$) et que nous ayons fixé les coefficients d'une telle façon qu'ils soient en accord avec la partition complète donnée de l'ensemble $\mathscr{I}$, et que nous ayons introduit les paramètres correspondants. Soit $(\mathscr{I}_0^\alpha)^\beta$ une composante arbitraire

[43]) L'intervalle $\langle 0, s_0 \rangle$ est le domaine où la courbe C est définie.

[44]) Nous laissons toujours de côté la composante $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$; son représentant (choisi éventuellement déjà antérieurement) ne fait pas partie du système (4.17).

— à l'exception citée près — mais fixe, d'ordre β de la composante $\mathscr{I}_0^\alpha$ et notons $i_{\alpha\beta}$ son représentant. Choisissons les représentants des composantes d'ordre 1 de la composante $(\mathscr{I}_0^\alpha)^\beta$. Supposons que ce soient les éléments $i_{\alpha\beta} = i_{\alpha\beta_1}, i_{\alpha\beta_2}, \ldots, i_{\alpha\beta_h}$. Choisissons ensuite une fonction $f_{\alpha\beta}(\sigma_{i_{\alpha\beta}})$ telle que l'on ait

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha\beta}}} f_{\alpha\beta}(\sigma_{i_{\alpha\beta}}) = r + \alpha + \beta\,,$$

nous pouvons demander de plus que l'on ait p. ex.

$$f_{\alpha\beta}(\sigma_{i_{\alpha\beta}}) \in \langle 0, 1\rangle\,,$$

et posons

$$k_{i_{\alpha\beta_z}} = k_{i_{\alpha\beta_1}} \cdot f_{\alpha\beta}(\sigma_{i_{\alpha\beta_1}}) + z - 1\,, \quad 2 \leqq z \leqq h\,.$$

On a alors évidemment

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha\beta_1}}} k_{i_{\alpha\beta_z}} = r + \alpha\,,$$

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha\beta_1}}} (k_{i_{\alpha\beta_z}} / k_{i_{\alpha\beta_v}}) = r + \alpha + \beta \quad \text{pour} \quad z \neq v\,,$$

et d'après le théorème 4.4 on a aussi

$$\mathrm{cl}_{\sigma_{i_{\alpha\beta_z}}} k_{i_{\alpha\beta_z}} = r + \alpha\,.$$

Nous traitons de la même manière les autres composantes d'ordre β de la composante $\mathscr{I}_0^\alpha$. Comme la partition complète donnée de l'ensemble $\mathscr{I}$ est, d'après nos hypothèses, finie, nous arrivons forcément après un nombre de pas fini aux composantes qui ne contiennent qu'un seul point chacune; il en résulte que tout point de l'ensemble $\mathscr{I}_0^\alpha$ qui n'appartient pas à $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$, deviendra nécessairement représentant d'une composante d'un ordre suffisamment élevé. Si nous appliquons le procédé en question à toutes les composantes originales $\mathscr{I}_0^\alpha$ qui satisfont à la condition qu'il est possible d'y trouver un élément i_α n'appartenant pas à $\mathscr{I}_0^{\alpha+1}$, nous aboutirons à un système de coefficients qui, en vertu de notre théorème 4.5 et de la convention 4.9 vérifient l'énoncé du théorème 4.23.

Pour terminer ce paragraphe, nous adoptons encore la

Convention 4.24. Soit $(\mathscr{I}^\alpha)^\beta$ une composante d'ordre β de la composante $\mathscr{I}^\alpha$. Alors, sauf avis contraire, nous en parlerons comme d'une composante d'ordre $\alpha + \beta$, c'est-à-dire que l'ordre de toute composante sera, dans ce qui suit, toujours rapporté à l'ensemble de base $\mathscr{I}$.

(*Continuation*)