Czechoslovak Mathematical Journal

Oleg Vladimirovič Besov; Alois Kufner

О плотности гладких функции в весовых пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 1, 178–188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100819

Чехословацкий математический журнал, т. 18 (93) 1968, Прага

О ПЛОТНОСТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. В. БЕСОВ, Москва и А. КУФНЕР (A. Kufner), Прага

(Поступило в редакцию 5 ноября 1966 г.)

Содержанием этой статьи является развитие результатов, сообщенных в статье [1], и некоторые следствия из них.

0. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ точка $(N-1)$-мерного эвклидова пространства R^{N-1} и $x = (x', x_N)$ точка из R^N. Обозначим через K единичный шар в R^{N-1}: $K = \{x' : |x'|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 < 1\}$, и Q цилиндр в R^N: $Q = K \times (0, 1)$. Обозначим еще через $\tilde{Q}$ ту часть границы цилиндра Q, где или $|x'| = 1$ или $x_N = 1$.

Пусть далее $\sigma(t) \geqq c > 0$ невозрастающая весовая функция, определенная на интервале $(0, 1)$; мы будем различать два случая $(1 \leqq p < \infty)$:

Случай I:
$$\int_0^1 \sigma^p(t)\,\mathrm{d}t < \infty\,.$$

Случай II:
$$\int_0^1 \sigma^p(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,.$$

Пусть $v = v(x', x_N)$ функция заданная на Q. Скажем, что функция v является элементом пространства $L_{p,\sigma}(Q)$ $(1 \leqq p < \infty)$, если конечен интеграл

$$\int_Q |v(x', x_N)\,\sigma(x_N)|^p\,\mathrm{d}x = \|v\|^p_{L_{p,\sigma}(Q)}\,. \tag{0.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать функции u, заданные в Q и равные нулю в окрестности множества $\tilde{Q}$. Эти функции можно доопределить нулем для $|x'| \geqq 1$ и $x_N \geqq 1$, так что они будут определены на полупространстве $\{x_N > 0\}$.

Символом $W^{(k)}_{p,\sigma}(Q)$ обозначим множество всех функций u из упомянутого класса, которые имеют обобщенные производные $D^i u$ порядка $0 \leqq |i| \leqq k$, принадлежащие пространству $L_{p,\sigma}(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_\sigma(Q)} = \Big(\sum_{|i|=0}^{k} \|D^i u\|^p_{L_{p,\sigma}(Q)}\Big)^{1/p} \tag{0.2}$$

(мы будем для простоты писать $W_\sigma(Q)$ вместо $W^{(k)}_{p,\sigma}(Q)$).

Известно (см., например, [2]), что функцию $u \in W_\sigma(Q)$ возможно изменить на множестве меры нуль так, что после этого изменения функция станет абсолютно непрерывной на почти всех прямых параллельных координатным осям и будет на этих прямых почти в каждой точке иметь производную в обычном смысле, равную обобщенной производной.

Итак, мы условимся в следующем: говоря о функции $u \in W_\sigma(Q)$, мы будем всегда имет ввиду уже измененную функцию, а говоря о значениях функции на прямых или гиперплоскостях параллельных некоторым осям, мы будем всегда иметь ввиду прямую или гиперплоскость, на которой имеет смысл говорить о значениях (следах) функции.

1. СЛУЧАЙ I

Пусть теперь весовая функция $\sigma(t)$ такова, что

$$\int_0^1 \sigma^p(t)\, \mathrm{d}t < \infty\,, \tag{1.1}$$

и пусть

$$u(x) = u(x', x_N) \in W_\sigma(Q) = W^{(k)}_{p,\sigma}(Q)\,.$$

Пусть $\tilde{u}(x', x_N)$ — усреднение для $u(x', x_N)$ по x' с бесконечно дифференцируемым ядром и достаточно малым радиусом усреднения (см. [3]). Тогда с помощью неравенства Минковского легко получаем, что для $\varepsilon > 0$ при достаточно малом радиусе усреднения

$$\|u - \tilde{u}\|_{W_\sigma(Q)} < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{1.2}$$

Поскольку $W^{(k)}_{p,\sigma}(Q) \subset W^{(k)}_p(Q)$, то имеет смысл след при $x_N = 0$ для $(\partial^s/\partial x^s_N)\, u(x', x_N)$ $(s = 0, 1, \ldots, k-1)$ и все эти функции принадлежат $L_p(K)$. Следовательно, для любого $i = (i', i_N)$, $i_N = 0, 1, \ldots, k-1$, определена функция $D^i\, \tilde{u}(x', 0)$, бесконечно дифференцируемая по x'.

Распространим функцию $\tilde{u}(x', x_N)$ на значения $x_N < 0$ формулой

$$(1.3)\qquad \tilde{u}(x', x_N) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_{\max(0,x_N)}^{\infty} (t - x_N)^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial x_N^k} \tilde{u}(x', t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Правая часть (1.3) для $x_N > 0$ обращается в $\tilde{u}(x', x_N)$ (легко получается интегрированием по частям), и для $x_N < 0$ дает равенство

$$(1.4)\qquad D^{(i',0)}\tilde{u}(x', x_N) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{x_N^s}{s!}\frac{\partial^s}{\partial x_N^s} D^{(i',0)}\tilde{u}(x', 0)\,.$$

Лемма 1.1. *Для $u \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q) = W_\sigma(Q)$ имеет место равенство*

$$(1.5)\qquad \lim_{\delta\to 0+} \|\tilde{u} - \tilde{u}_\delta\|_{W_\sigma(Q)} = 0\,,$$

где $\tilde{u}(x', x_N)$ — введенное усреднение по x' для $u(x', x_N)$, и $\tilde{u}_\delta(x', x_N) = \tilde{u}(x', x_N - \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_K \left(\int_0^\delta + \int_\delta^1\right) |\tilde{u}(x', x_N) - \tilde{u}(x', x_N - \delta)|^p \sigma^p(x_N)\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' = I_1^p(\delta) + I_2^p(\delta)\,.$$

Имеем

$$I_1(\delta) \leqq \left\{\int_K \int_0^\delta |\tilde{u}(x', x_N)|^p \sigma^p(x_N)\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x'\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_K \int_0^\delta |\tilde{u}(x', x_N - \delta)|^p \sigma^p(x_N)\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x'\right\}^{1/p} = I_1'(\delta) + I_1''(\delta)\,.$$

При $\delta \to 0+$ $I_1'(\delta) \to 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. По той же причине и

$$I_1''(\delta) \leqq c\sum_{s=0}^{k-1} \left\|\frac{\partial^s}{\partial x_N^s} \tilde{u}(x', 0)\right\|_{L_p(K)} \left\{\int_0^\delta \sigma^p(x_N)\,\mathrm{d}x_N\right\}^{1/p} \to 0\,.$$

Теперь

$$I_2(\delta) \leqq \left\{\int_K \int_\delta^1 |\tilde{u}(x', x_N)\,\sigma(x_N) - \tilde{u}(x', x_N - \delta)\,\sigma(x_N - \delta)|^p\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x'\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_K \int_\delta^1 |\tilde{u}(x', x_N - \delta)|^p\,|\sigma(x_N - \delta) - \sigma(x_N)|^p\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x'\right\}^{1/p} = I_2'(\delta) + I_2''(\delta)\,.$$

При $\delta \to 0+$ тоже $I_2'(\delta) \to 0$ в силу непрерывности в среднем функции $\tilde{u}(x', x_N)\, \sigma(x_N)$ из $L_p(Q)$, и далее

$$I_2''(\delta) \leqq \left\{ \int_K \int_0^1 |\tilde{u}(x', x_N)|^p\, \sigma^p(x_N) \left| \frac{\sigma(x_N) - \sigma(x_N + \delta)}{\sigma(x_N)} \right|^p \mathrm{d}x_N\, \mathrm{d}x' \right\}^{1/p} \to 0$$

по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Аналогично показывается, что при $|i| \leqq k$ тоже $\|D^i\tilde{u} - D^i\tilde{u}_\delta\|_{L_{p,\sigma}(Q)} \to 0$ для $\delta \to 0+$. Лемма доказана.

Мы получили тем самым при достаточно малом $\delta > 0$ функцию $\tilde{u}_\delta(x', x_N) \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$, которая определена не только на Q, но и на $K \times (-1, 0\rangle$, бесконечно дифференцируема по x' на $K \times (-1, 1)$ и

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_\delta\|_{W_\sigma(Q)} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.6}$$

Покажем, что функцию $\tilde{u}(x', x_N)$ распространенную на значения $x_N < 0$ формулой (1.3) можно с любой точностью аппроксимировать в норме $W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$ функцией, бесконечно дифференцируемой на Q вплоть до границы.

Пусть функция $\omega(t) \in C_0^\infty(R^1)$, сосредоточена на интервале $(0, 1)$ и при этом $\int_0^1 \omega(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Положим при достаточно малых $\varrho > 0$

$$\tilde{u}_{(\varrho)}(x', x_N) = \frac{1}{\varrho} \int_0^\infty \omega\left(\frac{t}{\varrho}\right) \tilde{u}(x', x_N - t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{1.7}$$

Заметим, что $\tilde{u}_{(\varrho)}(x', x_N) \in C^\infty(K \times (-1, +1))$. (Это можно установить тем же путем, что и в [3] для конкретного ядра усреднения.)

С помощью неравенства Минковского и леммы 1.1 получаем

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_{(\varrho)}\|_{L_{p,\sigma}(Q)} =$$

$$= \left\{ \int_K \int_0^1 \left| \frac{1}{\varrho} \int_0^\infty \omega\left(\frac{t}{\varrho}\right) [\tilde{u}(x', x_N) - \tilde{u}(x', x_N - t)]\, \mathrm{d}t \right|^p \sigma^p(x_N)\, \mathrm{d}x_N\, \mathrm{d}x' \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varrho} \int_0^\infty \left| \omega\left(\frac{t}{\varrho}\right) \right| \sup_{0<t<\varrho} \|\tilde{u} - \tilde{u}_t\|_{L_{p,\sigma}(Q)}\, \mathrm{d}t \leqq C \sup_{0<t<\varrho} \|\tilde{u} - \tilde{u}_t\|_{L_{p,\sigma}(Q)} \to 0$$

при $\varrho \to 0+$.

Так как производная средней функции $\tilde{u}_{(\varrho)}$ является средней функцией для соответствующей производной, т.е. $D^i\tilde{u}_{(\varrho)} = (D^i\tilde{u})_{(\varrho)}$, то мы доказали равенство

$$\lim_{\varrho \to 0+} \|\tilde{u} - \tilde{u}_{(\varrho)}\|_{W_\sigma(Q)} = 0\,. \tag{1.8}$$

Главным результатом этого пункта является

Теорема 1. *Пусть* $u \in W^{(k)}_{p,\sigma}(Q) = W_\sigma(Q)$ *и пусть для весовой функции* $\sigma(x_N)$ *имеет место* (1.1). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $v \in C^\infty(\bar{Q})$ *такая, что*

$$\|u - v\|_{W_\sigma(Q)} < \varepsilon\,.$$

Другими словами, *в случае I функции из* $C^\infty(\bar{Q})$ *плотны в* $W^{(k)}_{p,\sigma}(Q)$.

Доказательство. В качестве функции $v(x)$ можно взять при достаточно малых $\varrho > 0$ функцию $v(x) = (\tilde{u}(x))_{(\varrho)}$ и учесть (1.2), (1.6), (1.8).

Замечание к теореме 1: Если $(\partial^s/\partial x_N^s)\, u(x', 0) \equiv 0$ $(s = 0, 1, \ldots, k-1)$, то в силу (1.4) $\tilde{u}(x', x_N) \equiv 0$ для $x_N < 0$. Тогда по построению функция $v(x) = (\tilde{u}_\delta(x))_{(\varrho)}$ принадлежит множеству $C_0^\infty(Q)$, т.е. в этом случае множество $C_0^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций плотно в $W^{(k)}_{p,\sigma}(Q)$.

Приведем несколько следствий и замечаний.

1.1. Пусть Ω – конечная область с границей $\partial\Omega$, локально удовлетворяющей условию Липшица. Пусть $W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ пространство функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{W^{(1)}{}_{p,\alpha}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left[|u(x)|^p + \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p\right] \varrho^\alpha(x)\, \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

где $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ (расстояние точки x до границы области Ω). Пусть открытые множества U_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ являются покрытием границы и пусть функции $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$ (бесконечно дифференцируемые и финитные в U_i) являются разложением единицы. Границу $\partial\Omega$ возможно локально отобразить на часть гиперплоскости $x_N = 0$, а множество $\Omega \cap U_i$ на област типа Q (более точно эти рассуждения приведены в [4]). Функция $u_i = u\varphi_i$, где $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$, переходит при этом отображении в функцию v_i, которая будет элементом пространства $W^{(1)}_{p,\sigma}(Q)$ с весовой функцией $\sigma(t) = t^{\alpha/p}$. Если теперь $0 > \alpha > -1$, то весовая функция удовлетворяет условиям (1.1), так что функцию v_i, а тем самым функцию u возможно с любой точностью аппроксимировать бесконечно дифференцируемыми функциями:

Теорема 2. *Функции из* $C^\infty(\bar{\Omega})$ *плотны в пространстве* $W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ (*с весовой функцией* $\varrho^\alpha(x) = [\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)]^\alpha$) *для* $-1 < \alpha < 0$.

Эта теорема является дополнением теоремы 1 из [4], где подобное утверждение доказано для $\alpha \geqq 0$.

Замечание к теореме 2: Тоже здесь было бы возможно сделать замечание аналогичное замечанию к теореме 1. Эти же замечания относятся и к утверждениям сдедующих пунктов 1.2 и 1.3.

1.2. Аналогичная теорема имеет место для пространств $W^{(1)}_{p,\sigma}(Q)$ с нормой

$$(1.9)\qquad \left\{\int_\Omega |u(x)|^p\,\sigma^p(\varrho(x))\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} + \sum_{i=1}^N \left\{\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right|^p \sigma^p(\varrho(x))\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

если $\sigma(\varrho)$ типа (1.1) и с некоторыми постоянными $c > 1$, $c_1 > 0$ при всех $\varrho > 0$ имеет место

$$(1.10)\qquad \sigma(\varrho) \leqq c_1\,\sigma(c\varrho)\,.$$

Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с учетом эквивалентности кратчайшего расстояния до границы и расстояния до границы по определенному направлению (см. п. 2.2).

1.3. Если предположить, что граница $\partial\Omega$ области Ω локально описывается функцией, производные которой порядка $k - 1$ удовлетворяют условию Липшица, то теорема 2 будет иметь место для пространств $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ с нормой

$$(1.11)\qquad \left\{\sum_{|i|=0}^k \int_\Omega |D^i u(x)|^p\,\varrho^\alpha(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

То же относится к пространству $W^{(k)}_{p,\sigma}(\Omega)$ с нормой

$$(1.12)\qquad \left\{\sum_{|i|=0}^k \int_\Omega |D^i u(x)|^p\,\sigma^p(\varrho(x))\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

для веса $\sigma(\varrho(x))$ типа (1.1) со свойством (1.10).

1.4. В заметке [1] теорема 1 была сформулирована лишь для случая $k = 1$. Кроме того, для весовой функции $\sigma(t)$ требовалось выполнение еще одного ограничительного условия

$$\frac{1}{h\,\sigma^p(h)}\int_0^h \sigma^p(t)\,\mathrm{d}t \leqq M$$

при достаточно малых $h > 0$.

Таким образом, в настоящей работе получено обобщение упомянутого результата из [1].

1.5. При доказательстве теоремы 1 мы ввели функцию $\tilde{u}(x', x_N)$ формулой (1.3). Вместо этого можно было бы рассмотреть при $h > 0$ функцию

$$\tilde{u}^{(h)}(x', x_N) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_{\max(h,x_N)}^\infty (t - x_N)^{k-1}\,\frac{\partial^k}{\partial x_N^k}\,\tilde{u}(x', t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Функция $\tilde{u}^{(h)}(x', x_N)$ совпадает с $\tilde{u}(x', x_N)$ лишь при $x_N > h$ и определена на $K \times (-\infty, +\infty)$. При этом для $x_N < h$

$$D^{(i',0)}\,\tilde{u}^{(h)}(x', x_N) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(x_N - h)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x_N^s} D^{(i',0)}\,\tilde{u}(x', h)\,.$$

Следует иметь ввиду при этом, что поскольку $u(x', x_N) \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q) \subset W_p^{(k)}(Q)$, а $\tilde{u}(x', x_N)$ — усреднение для $u(x', x_N)$ по x', то равномерно по $h \geqq 0$ для $i = (i', i_N)$, $i_N = 0, 1, \ldots, k-1$ имеем

$$\|D^i\,\tilde{u}(x', h)\|_{L_p(K)} \leqq c_i \|u\|_{W_\sigma(Q)}\,.$$

Далее, так же, как в лемме 1.1, можно показать, что при достаточно малых $h > 0$, $\delta > 0$

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_\delta^{(h)}\|_{W_\sigma(Q)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

и с помощью усреднения (1.7) притти к теореме 1.

Указанный путь интересен тем, что, повидимому, открывает некоторые возможности для обобщения результата п. 1.3 на случай области Ω с границей $\partial\Omega$, локально удовлетворяющей условию Липшица (ср. рассуждения п. 2.2).

2. СЛУЧАЙ II

Пусть теперь вместо (1.1) имеет место условие

$$\int_0^1 \sigma^p(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,. \tag{2.1}$$

Пусть опять $u(x', x_N) \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$, $1 \leqq p < \infty$. Это значит, что $(\partial u/\partial x_N) \in L_{p,\sigma}(Q)$, и поэтому для почти всех $x' \in K$ имеем

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N)\,\sigma(x_N)\right|^p \mathrm{d}x_N < \infty\,.$$

Далее, для почти всех $x' \in K$ функция $g(x_N) = u(x', x_N)$ является абсолютно непрерывной для $x_N \in (0, 1)$. Более того, она является равномерно непрерывной, так как

$$|u(x', x_N + h) - u(x', x_N)| = \left|\int_{x_N}^{x_N+h} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\,\mathrm{d}t\right| =$$
$$= \left|\int_{x_N}^{x_N+h} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\,\sigma(t)\,\frac{1}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqq$$
$$\leqq \left\{\int_{x_N}^{x_N+h} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\,\sigma(t)\right|^p \mathrm{d}t\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_{x_N}^{x_N+h} \left|\frac{1}{\sigma(t)}\right|^{p/(p-1)} \mathrm{d}t\right\}^{(p-1)/p} \to 0$$

при $h \to 0$ равномерно по x_N вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Итак, существует предел $\lim\limits_{x_N \to 0+} u(x', x_N) = a(x')$; но так как $u \in L_{p,\sigma}(Q)$ и $\int_0^1 \sigma^p(t)\,\mathrm{d}t = \infty$, то $a(x') = 0$.

Это значит, что функция $u(x)$ имеет на гиперплоскости $x_N = 0$ нулевые следы. То же утверждение имеет место для всех производных $D^i u$ порядка $|i| \leqq k - 1$.

Доопределим функцию $u(x', x_N)$ нулем для $x_N \leqq 0$ и построим для $\delta > 0$ функцию $u_\delta(x', x_N) = u(x', x_N - \delta)$; это значит, что $u_\delta(x) = 0$ для $x \in Q_\delta = K \times (0, \delta)$.

Так как весовая функция не возрастает, то очевидно, что для $\delta > 0$

$$\|u_\delta\|_{W_\sigma(Q)} \leqq \|u\|_{W_\sigma(Q)} .$$

Лемма 2.1. *Для $u \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q) = W_\sigma(Q)$ имеет место равенство*

$$\lim_{\delta \to 0+} \|u - u_\delta\|_{W_\sigma(Q)} = 0 .$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$I(\delta) = \|u - u_\delta\|_{L_{p,\sigma}(Q)} \leqq$$
$$\leqq \left\{\int_Q |u(x', x_N)\,\sigma(x_N) - u(x', x_N - \delta)\,\sigma(x_N - \delta)|^p\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} +$$
$$+ \left\{\int_Q |u(x', x_N - \delta)|^p\,|\sigma(x_N - \delta) - \sigma(x_N)|^p\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} = I_1(\delta) + I_2(\delta) .$$

Но $I_1(\delta) \to 0$ для $\delta \to 0+$ в силу непрерывности в среднем интеграла Лебега. Далее

$$I_2^p(\delta) = \int_Q |u(x', x_N)\,\sigma(x_N)|^p \left|\frac{\sigma(x_N) - \sigma(x_N + \delta)}{\sigma(x_N)}\right|^p \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left|\frac{\sigma(x_N) - \sigma(x_N + \delta)}{\sigma(x_N)}\right|^p \int_K |u(x', x_N)\,\sigma(x_N)|^p\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x_N \to 0$$

для $\delta \to 0+$ по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Нормы разностей $D^i u - D^i u_\delta$ ($|i| \leqq k$) оцениваются тем же способом, и лемма доказана.

Пусть теперь $\delta > 0$ фиксировано. Функция u_δ является элементом пространства $W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$ и имеет одновременно компактный в Q носитель; она является также элементом пространства $W_p^{(k)}(Q)$. Пусть $(u_\delta)_{(\varrho)}$ – усреднение функции u_δ (в смысле [3]). Если $\varrho > 0$ достаточно мало, то функция $(u_\delta)_{(\varrho)}$ также финитна в Q и так как она одновременно бесконечно дифференцируема, имеем $(u_\delta)_{(\varrho)} \in \in C_0^\infty(Q)$. По известным теоремам (см. [3]) функция $(u_\delta)_{(\varrho)}$ стремится при $\varrho \to 0$ к u_δ в норме пространства $W_p^{(k)}(Q)$, и так обе функции финитны в Q, имеет место сходимость также в норме пространства $W_{p,\sigma}^{(k)}(Q) = W_\sigma(Q)$, т.е.

$$\|(u_\delta)_{(\varrho)} - u_\delta\|_{W_\sigma(Q)} \to 0 \quad \text{для} \quad \varrho \to 0+ \,. \tag{2.2}$$

Итак, имеет место

Теорема 3. *Пусть $u \in W_{p,\sigma}^{(k)}(Q) = W_\sigma(Q)$ с весовой функцией σ, удовлетворяющей условию* (2.1). *Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $v \in C_0^\infty(Q)$, что $\|u - v\|_{W_\sigma(Q)} < \varepsilon$.*

Другими словами, *в случае II функции из $C_0^\infty(Q)$ плотны в $W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$.*

Доказательство. По лемме 2.1 существует функция u_δ такая, что $\|u - u_\delta\|_{W_\sigma(Q)} < \varepsilon/2$; для этого δ существует вследствие (2.2) такое $\varrho > 0$, что $\|u_\delta - (u_\delta)_{(\varrho)}\|_{W_\sigma(Q)} < \varepsilon/2$. Взяв $v = (u_\delta)_{(\varrho)}$, приходим к доказательству теоремы.

Приведем несколько замечаний:

2.1. Пусть $\mathring{W}_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$ – замыкание множества $C_0^\infty(Q)$ в норме (0.2) пространства $W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)$. Тогда из теоремы 3 вытекает следующее утверждение:

Теорема 4. *Для весовых функций типа* (2.1) *имеет место равенство*

$$\mathring{W}_{p,\sigma}^{(k)}(Q) = W_{p,\sigma}^{(k)}(Q)\,. \tag{2.3}$$

2.2. Пусть теперь

$$\hat{K} = \{(x', x_N) : |x'|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 < \delta,\ x_N = \varphi(x')\}$$

где

$$\varphi(x') \in \operatorname{Lip} 1,\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(x') < \tfrac{1}{2}\,,$$

и пусть

$$\hat{Q} = \{(x', x_N) : |x'|^2 < \delta,\ \varphi(x') < x_N < 1\}\,,$$
$$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x_N - \varphi(x'))\,.$$

Так как при доказательстве теоремы 3 применялись лишь сдвиги вдоль оси x_N и усреднения, то теорема 4 остается верной, если Q заменить на $\hat{Q}$, а $\sigma(x)$ на $\hat{\sigma}(x)$.

Заметим, что в нашем случае $\operatorname{dist}((x', x_N), \hat{K}) \sim x_N - \varphi(x')$ для $x \in \hat{Q}$.

Это дает возможность с помощью разложения единицы получить следующий результат:

Теорема 5. *Пусть Ω — область, рассмотренная в пункте* 1.1, *и пусть* $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $\sigma = \sigma(\varrho)$ *типа* (2.1), *и с некоторыми положительными постоянными* $c > 1$, $c_1 > 0$ *при всех* $\varrho > 0$ *имеет место*

$$\sigma(\varrho) \leqq c_1\, \sigma(c\varrho)\,.$$

Тогда функции из $C_0^\infty(\Omega)$ *плотны в пространстве* $W_{p,\sigma}^{(k)}(\Omega)$ *с нормой*

$$\|u\|_{W_\sigma(\Omega)} = \left(\sum_{|i|=0}^{k} \int_\Omega |D^i u(x)|^p\, \sigma^p(\varrho(x))\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

т. е.

$$W_{p,\sigma}^{(k)}(\Omega) = \mathring{W}_{p,\sigma}^{(k)}(\Omega)\,.$$

Следствие. *Для* $\alpha \leqq -1$ *функции из* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотны в* $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ (*см.* (1.11)), *т.е.* $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) = \mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$.

Последний результат был получен другим путем не только для $\alpha \leqq -1$, но и для $\alpha > kp - 1$ в работе [1] (подробное доказательство см. в [6]).

2.3. Пусть область Ω имеет свойство конуса извне в точке $P \in \partial\Omega$ (более точное определение см. [5]). Пусть $r(x) = |x - P|$ и пусть $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ — пространство с весовой функцией $r^\alpha(x)$. Обозначим через $C_P^\infty(\Omega)$ множество всех функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности точки P. Тогда имеет место следующее утверждение:

Теорема 6. *Для* $\alpha \leqq -N$ *множество* $C_P^\infty(\Omega)$ *плотно в пространстве* $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$.

Для доказательства можно в окрестности точки P перейтти к сферическим координатам и использовать теорему 3.

Пусть, например, Ω — куб $(-1, +1) \times \ldots \times (-1, +1) \times (0, 1)$ и пусть P — начало координат; имеем тогда

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, r^\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_S \mathrm{d}\Theta \int_0^a |u(\Theta, r)|^p\, r^\alpha r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,,$$

где Θ — точка на единичной сфере, r — расстояние до начала координат и S — поверхность единичной полусферы. Таким образом, мы привели нашу задачу к функции $u(\Theta, r) \in W_{p,\sigma}^{(1)}(K \times (0, a))$ $(\Theta \in K,\ r \in (0, a))$ с весовой функцией $\sigma(r) = r^{(\alpha+N-1)/p}$. Если теперь $\alpha + N - 1 \leqq -1$ или $\alpha \leqq -N$, то функцию $u(\Theta, r)$ возможно приблизить по теореме 3 в норме $W_{p,\sigma}^{(1)}$ функциями из $C_0^\infty(K \times (0, a))$. При переходе к исходным координатам получим функцию из $C_P^\infty(\Omega)$, носитель которой не содержит окрестность точки $P = [0, 0, \ldots, 0]$.

Литература

[1] *О. В. Бесов, Я. Кадлец, А. Куфнер:* О некоторых свойствах весовых классов, ДАН СССР, 1966, т. *171*, № 3, 10—12.
[2] *J. Deny, J. L. Lions:* Les espace du type de Beppo-Levi, Ann. Inst. Fourier, *5*, 1953—54, 305—370.
[3] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.
[4] *J. Nečas:* Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, *16*, 4 (1962), 305—326.
[5] *A. Kufner:* Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion. Czech. Math. J. *15* (*90*), (1965), 597—620.
[6] *J. Kadlec, A. Kufner:* Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions I, Časopis pro pěst. matematiky, *91*, 4 (1966), 463—471.

Адресс авторов: О. В. Бесов, Москва В-333, ул. Вавилова 28, СССР (Математический институт АН СССР), Alois Kufner, Žitná 25, Praha 1, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).