Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát
Über die Cantorschen Reihen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 1, 25–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100810

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

ÜBER DIE CANTORSCHE REIHEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eigegangen am 31. Januar 1966)

Die Grundlagen der Theorie der Cantorschen Reihen wurden von G. CANTOR in der Arbeit [1] gelegt. Die Grundlagen der metrischen Theorie dieser Reihen befinden sich in den Arbeiten [2], [11] und [15]. Diese Arbeit ist ein Beitrag zur metrischen Theorie der Cantorschen Reihen.

EINLEITUNG. ÜBERSICHT EINIGER ERGEBNISSE. DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

1. Wenn $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist, $q_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (solche Folge nennt man in weiterem eine Grundfolge), dann kann jede reelle Zahl x bekanntlich in der Form

$$x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k} \tag{a}$$

dargestellt werden, wobei $\varepsilon_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ ganze Zahlen sind (sogenannte Ziffern von x), $0 \leqq \varepsilon_i(x) < q_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\varepsilon_i(x) < q_i - 1$ für unendlich viele i ist (siehe [3] S. 113–115). Für $x \in \langle 0, 1)$ ist $\varepsilon_0(x) = 0$.

Eine nicht-negative ganze Zahl r nennt man eine Ziffer (in bezug auf die Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$), wenn ein k so existiert, dass $r < q_k$ ist. Wenn $q = \limsup_{k \to \infty} q_k$ und $q < +\infty$ ist, dann sind die Ziffern (in bezug auf $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$) mit den ganzen Zahlen des Intervalles $\langle 0, q - 1 \rangle$ identisch; wenn $q = +\infty$, dann ist jede ganze $r \geqq 0$ eine Ziffer in bezug auf $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Wenn wir $q_k = g > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ setzen, dann ist (a) die g-adische Entwicklung von x. Wenn wir $q_k = k + 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ setzen, dann ist (a) die Fakultätreihe von x,

$$x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{(k+1)!}\,, \tag{b}$$

$\varepsilon_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sind ganze Zahlen, $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und für unedlich viele k ist $\varepsilon_k(x) < k$.

2. Es sei $r \geqq 0$ eine Ziffer in bezug auf die Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Setzen wir $N_n(r, x) = \sum_{k \leqq n, \varepsilon_k(x) = r} 1$ (siehe (a)). Bezeichnen wir mit $s_n(r)$ die Summe $\sum_{k \leqq n, r < q_k} 1/q_k$ (hier summiert man über solche Zahlen $k \leqq n$, für welche $r < q_k$ ist, die leere Summe setzt man hier gleich 1). Die reelle Zahl x nennt man normal in bezug auf die Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$, wenn für jede Ziffer r, für welche $\lim_{n \to \infty} s_n(r) = +\infty$ ist,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{s_n(r)} = 1$$

gilt. Das Hauptergebnis der Arbeit [2] ist die Rényische Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Borel über die Verteilung der Ziffern in dyadischen Entwicklungen von reellen Zahlen. Nach diesem Satz von A. Rényi gilt für jede Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$, dass fast alle reellen Zahlen normal in bezug auf $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ sind. Bezeichnen wir in weiterem mit $N(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller in bezug auf die Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ normalen Zahlen. In weiterem, hauptsächlich im dritten Teil der Arbeit, betrachten wir $E_1 = (-\infty, +\infty)$ (und auch $\langle 0, 1)$) als einen metrischen Raum mit euklidischer Metrik.

3. Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Grundfolge. Bei festem n ist das ganze Intervall $\langle 0, 1)$ gleich der Vereinigungsmenge der Intervalle der „n-ten Ordnung"

$$i_n^{(k)} = \left\langle \frac{k}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}, \frac{k+1}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} \right) \quad (k = 0, 1, \ldots, q_1 \cdot q_2 \cdots q_n - 1) .$$

Wenn

$$\frac{k}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 \cdot q_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}$$

ist (ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sind ganze Zahlen, $0 \leqq \varepsilon_i < q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$), dann sagen wir kurz, dass das Intervall $i_n^{(k)}$ zur (endlichen) Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gehört. Offenbar gehört die Zahl $x \in \langle 0, 1)$,

$$x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_l}$$

zum Intervall $i_n^{(k)}$ dann und nur dann, wenn $\varepsilon_l(x) = \varepsilon_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ ist.

Speziell bei den Fakultätreihen haben die Intervalle $i_n^{(k)}$ die Form

$$i_n^{(k)} = \left\langle \frac{k}{(n+1)!}, \frac{k+1}{(n+1)!} \right) \quad (k = 0, 1, \ldots, (n+1)! - 1) .$$

4. Es seien l, r natürlich, $l > r$, $s \geqq 0$ sei ganz. Jeder Kobination $\{i_0, i_1, \ldots, i_{s-1}\}$ s-ter Klasse der Elemente $r, r + 1, \ldots, l$ sei die Zahl $1/i_0 \,.\, i_1, \ldots, i_{s-1}$ zugeordnet; unter (einziger) Kombination 0-ter Klasse der Elemente $r, r + 1, \ldots, l$ versteht man dabei die leere Menge. In diesem Fall (d. h. wenn $s = 0$ ist) setzt man das leere Produkt $i_0 \,.\, i_1, \ldots, i_{s-1}$ gleich 1, also der Kombination 0-ter Klasse ist nach dem vorigen die Zahl 1 zugeordnet. Die Summe aller Zahlen $1/i_0 \,.\, i_1, \ldots, i_{s-1}$ über alle Kombinationen s-ter Klasse der Elemente $r, r + 1, \ldots, l$ bezeichnen wir mit $A_r(s, l)$, also

$$A_r(s, l) = \sum_{\{i_0, \ldots, i_{s-1}\} \subset \{r, r+1, \ldots, l\}} \frac{1}{i_0 \,.\, i_1 \ldots i_{s-1}} \,.$$

Wenn $s > l - r + 1$ ist, dann haben wir rechts die leere Summe, welche wir definitorisch gleich 0 setzen.

5. Die Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ hat die Eigenschaft $V(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \,.\, q_2 \ldots q_n)^{\varepsilon}} < +\infty$$

ist. Es ist leicht einzusehen, dass jede der Grundfolgen $\{g\}_{k=1}^{\infty}$, $q > 1$; $\{k + 1\}_{k=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ hat.

6. In dieser Arbeit versteht man unter $\dim M$ die Hausdorffsche Dimension der Menge M in bezug auf das System von Massfunktionen

$$\mu^{(\alpha)}(t) = t^{\alpha}\,, \quad t \in \langle 0, +\infty)\,, \quad \alpha \in (0, 1)$$

(siehe [5]). Erwähnen wir hier die Bezeichnung, welche mit der in [5] benutzen Bezeichnung übereinstimmt. Wenn M eine Menge von reellen Zahlen und $\eta > 0$ ist, dann versteht man unter einer η – Überdeckung von M eine beliebige abzählbare Menge V von Intervallen i, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1) für jedes $i \in V$ ist $|i| \leqq \eta$ ($|i|$ bezeichnet die Länge von i),

2) $M \subset \bigcup_{i \in V} i$.

Mit $\mathscr{U}(\eta, M)$ bezeichnen wir die Menge aller η-Überdeckungen von M. Für $\alpha \in (0, 1)$ sezen wir

$$\mu_{\eta}^{(\alpha)}\{M\} = \inf_{V \in \mathscr{U}(\eta, M)} \sum_{i \in V} |i|^{\alpha} \,.$$

Dann, wie bekannt, existiert

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \lim_{\eta \to 0+} \mu_{\eta}^{(\alpha)}\{M\} \,.$$

Die Zahl $\mu^{(\alpha)}\{M\}$ nennt man α-dimensionales Hausdorffsches Mass von M. Weiter, wie bekannt, existiert zu jeder Menge M eine Zahl $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ mit den folgenden

Eigenschaften: Wenn $0 < \alpha < \delta$ ist, dann ist $\mu^{(\alpha)}\{M\} = +\infty$; wenn $\delta < \alpha < 1$ ist, dann ist $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$. Die Zahl δ nennt man die Hausdorffsche Dimension der Menge M und man bezeichnet sie mit $\dim M$.

7. In zweiten Teil der Arbeit benutzen wir dieses Ergebnis von H. G. EGGLESTON (siehe [4], [5]):

Es sei $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$; $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$, *wo* I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *aus einer endlichen Anzahl* $g_n \geqq 1$ *endlicher abgeschlossenen Intervalle* i_n^m *gleicher Länge* $\lambda_n > 0$ *besteht, so dass je zwei verschiedene Intervalle von* I_n *keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Setzen wir weiter voraus, dass jedes der Intervalle* i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ *die gleiche Anzahl* $(= g_{n+1}/g_n)$ *der Intervalle* $i_{n+1}^k \in I_{n+1}$ *enthält. Es sei* $0 < \delta \leqq 1$ *und für jedes* α, $0 < \alpha < \delta$ *sei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \lambda_n^{\alpha}} < +\infty \quad (\lambda_0 = 1) .$$

Dann ist $\dim M \geqq \delta$.

8. $|M|$ bezeichnet das Lebesguesche Mass von M.

9. $[u]$ bezeichnet den ganzen Teil der Zahl u, d. h. $[u]$ ist ganz, $[u] \leqq u < [u] + 1$.

10. Wenn A eine Menge von natürlichen Zahlen ist, dann setzen wir $A(n) = \sum_{k \leqq n, k \in A} 1$, $\delta_1(A) = \liminf_{n \to \infty} A(n)/n$ (untere asymptotische Dichte von A), $\delta_2(A) = \limsup_{n \to \infty} A(n)/n$ (obere asymptotische Dichte von A).

11. $\{a_n\}_n'$ bezeichnet die Menge aller Häufungswerte der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Auf die einzelnen Punkte dieser Einleitung werden wir uns durch Angabe der Nummern der Punkte berufen.

Diese Arbeit besteht aus vier Teilen. Im ersten Teil werden wir die Frage über die Verteilung der Ziffern in Fakultätreihen von reellen Zahlen eingehend studieren. Im zweiten Teil zeigen wir einige Anwendungen des Hausdorffschen Masses in der Theorie der Cantorschen Reihen. Im dritten Teil werden wir einige metrische Ergebnisse aus der Theorie der Cantorschen Reihen vom Standpunkt der Baireschen Kategorien von Mengen studieren. Im vierten Teil werden wir den Beweis eines Ergebnisses aus der Arbeit [16] präzisieren.

---

[1]) Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit I_n sowohl $\bigcup_{m=1}^{g_n} i_n^m$ als auch die Menge $\{i_n^1, i_n^2, \ldots \ldots, i_n^{g_n}\}$; zu einem Missverständnis kann es nicht kommen.

1. ÜBER DIE VERTEILUNG DER ZIFFERN IN DEN FAKULTÄTREIHEN VON REELLEN ZAHLEN

Die Grundergebnisse über die Verteilung der Ziffern in den Fakultätreihen von reellen Zahlen befinden sich in [2]. Dort ist auch folgendes Ergebnis bewiesen:

Es sei r ganz, $r \geqq 0$, *es sei* $N_n(r, x) = \sum_{k \leqq n, \varepsilon_k(x) = r} 1$ (siehe (*b*)). *Dann gilt für fast alle* $x \in \langle 0, 1)$

$$(1) \qquad N_n(r, x) = \log n + o(\log n) \quad (n \to \infty) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Es entsteht die Frage, ob dieses Ergebnis in solcher Richtung verschärft werden kann, dass wir eine (für alle hinreichend grossen n positive) Funktion ψ der natürlichen Veränderlichen finden so, dass $\lim_{n \to \infty} \psi(n)/\log n = 0$ gilt und für fast alle $x \in \in \langle 0, 1)$

$$N_n(r, x) = \log n + O(\psi(n)) \quad (n \to +\infty) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist.

In dieser Arbeit geben wir keine vollständige Antwort auf die formulierte Frage. Wir zeigen nur, dass eine „zu starke“ Verschärfung der Beziehung (1) unmöglich ist (siehe den Satz 1,1 und 1,3). Weiter zeigen wir, dass, wenn

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\psi(n)}{\sqrt{(\log n \log \log n)}} = +\infty$$

ist, jede der Ungleichheiten

$$|N_n(r, x) - \log n| < \psi(n) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ unendlich viele Lösungen in n hat.

Zuerst leiten wir eine obere Abschätzung für $A_r(s, l)$ ab, welche wir in weiterem benutzen (siehe 4).

Lemma 1,1. *Für alle ganzen Zahlen* r, s, l $(r, l > 0, s \geqq 0)$ *gilt*

$$A_r(s, l) \leqq \frac{(1 + \log l)^s}{s!} .$$

B e w e i s. Offensichtlich gilt für alle natürlichen r, s, l die Ungleichheit $A_r(s, l) \leqq \leqq A_1(s, l)$. Daher genügt es zu beweisen, dass die Ungleichheit

$$(2) \qquad A_1(s, l) \leqq \frac{(1 + \log l)^s}{s!}$$

für alle $s \geqq 0$ und $l > 0$ gilt.

Wenn $s = 0$ oder $s > l$ ist, dann gilt (2) offenbar für beliebiges l.

Weil für jedes l die Abschätzung

$$\log l = \sum_{k=2}^{l} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} > \sum_{k=2}^{l} \frac{1}{k}$$

gilt, haben wir

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log l \,. \tag{3}$$

Offenbar ist $A_1(1, l) = \sum_{k=1}^{l} 1/k$, daher folgt aus (3), dass für $s = 1$ die Ungleichheit (2) gilt.

Es sei jetzt $s > 1$, $s \leqq l$ und es gelte

$$A_1(s-1, l) \leqq \frac{(1 + \log l)^{s-1}}{(s-1)!} \tag{4}$$

für jedes l. Wenn wir die Summen $A_1(s-1, l)$, $A_1(s, l)$ miteinander multiplizieren, so bekommen wir jeden Bruch $1/i_0 \cdot i_1 \ldots i_{s-1}$ ($\{i_0, i_1, \ldots, i_{s-1}\}$ ist eine Kombination s-ter Klasse der Elemente $1, 2, \ldots, l$) genau s-mal, daher ist

$$A_1(s, l) \leqq \frac{1}{s} A_1(s-1, l)\, A_1(1, l) \leqq \frac{1}{s} A_1(s-1, l) \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \,. \tag{5}$$

Wenn wir jetzt in (5) die Abschätzungen (3) und (4) benutzen, bekommen wir (2). Damit ist der Beweis beendet.

Satz 1,1. *Es sei ψ eine reelle Funktion der natürlichen Veränderlichen, es sei $\psi(n) > 0$ für alle $n > n_1$ und*

$$\psi(n) = o(n) \quad (n \to +\infty)\,, \tag{i}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\psi(n)}{\sqrt{\log n}} = 0 \,. \tag{ii}$$

Dann gilt für fast alle $x \in \langle 0, 1)$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|N_n(r, x) - \log n|}{\psi(n)} = +\infty \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Folgerung. Bei den Voraussetzungen des Satzes gilt die Beziehung

$$N_n(r, x) = \log n + O(\psi(n)) \quad (n \to \infty)$$

(r ganz $\geqq 0$) nur auf einer Nullmenge.

Beweis des Satzes 1,1. Es erfülle ψ die Voraussetzungen des Satzes. Es seien l, k natürlich, r ganz, $r \geqq 0$. Bezeichnen wir mit $M_r(l, k)$ die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$, für welche $|N_l(r, x) - \log l| \leqq k\,\psi(l)$ ist.

Infolge der Voraussetzung (i) existiert $l_1 \geqq n_1$, so dass für $l \geqq l_1$ die Ungleichheit $\log l + k\,\psi(l) \leqq l - r + 1$ gilt. Für $l \geqq l_1$ ist die Menge $M_r(l, k)$ gleich der Vereinigungsmenge aller derjenigen Intervalle l-ter Ordnung, welche zu solchen Folgen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l \tag{6}$$

gehören, für welche die Anzahl $s \geqq 0$ der Ziffern r in (6) im Intervall

$$J(l, k) = \langle \log l - k\,\psi(l),\ \log l + k\,\psi(l) \rangle$$

liegt.

Schätzen wir das Mass von $M_r(l, k)$ $(l \geqq l_1)$ ab. Es sei $s \geqq 0$, $s \in J(l, k)$, es bedeute $B_r(l, k, s)$ die Vereinigungsmenge aller Intervalle l-ter Ordnung, welche zu solchen Folgen (6) gehören, für welche die Anzahl der Zahlen r in (6) s ist. Offensichtlich

$$M_r(l, k) = \bigcup_{s \in J(l,k)} B_r(l, k, s)\,. \tag{7}$$

Schätzen wir zuerst das Mass von $B_r(l, k, s)$ ab. Die Anzahl der Folgen (6), welche die Ziffer r auf genau s festen Stellen i_k, $r \leqq i_0 < i_1 < \ldots < i_{s-1} \leqq l$ enthalten (d. h. $\varepsilon_{i_k} = r$ für $k = 0, 1, \ldots, s - 1$ und $\varepsilon_i \neq r$ für $1 \leqq i \leqq l$, $i \neq i_k$ $(k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, s - 1))$, ist im Falle $r > 1$ gleich der Zahl

$$\begin{gathered} 2.3 \ldots r \,.\, r \,.\, (r + 1) \ldots (i_0 - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_0 + 1)(i_0 + 2) \ldots \\ \ldots (i_{s-1} - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_{s-1} + 1)(i_{s-1} + 2) \ldots l\,, \end{gathered}$$

wenn $i_0 > r$ ist, und der Zahl

$$\begin{gathered} 2.3 \ldots r \,.\, 1 \,.\, (r + 1)(r + 2) \ldots (i_1 - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_1 + 1) \ldots \\ \ldots (i_{s-1} - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_{s-1} + 1)(i_{s-1} + 2) \ldots l\,, \end{gathered}$$

wenn $i_0 = r$ ist. Wir haben nämlich für jedes ε_i, $1 \leqq i \leqq r - 1$, $i + 1$ Möglichkeiten (ε_i kann jeden der Werte $0, 1, \ldots, i$ annehmen) und für jedes ε_i, $r \leqq i \leqq l$, $i \neq i_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s - 1)$ haben wir i Möglichkeiten (ε_i kann jeden der Werte $0, 1, \ldots$ $\ldots, r - 1, r + 1, \ldots, i$ annehmen). Wenn $r = 0$ oder $r = 1$ ist, dann kann man ähnlich einsehen, dass die Anzahl aller Folgen (6), welche die Ziffer r $(= 0$ oder $1)$ auf genau s festen Stellen i_k, $k = 0, 1, \ldots, s - 1$, enthalten, gleich der Zahl

$$\begin{gathered} 1.2 \ldots (i_0 - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_0 + 1)(i_0 + 2) \ldots (i_{s-1} - 1) \,.\, 1 \,.\, (i_{s-1} + 1) \,. \\ .\, (i_{s-1} + 2) \ldots l \end{gathered}$$

ist. Da die Länge jedes Intervalles der l-ten Ordnung gleich $1/(l + 1)!$ ist, ist die Summe der Längen aller Intervalle l-ter Ordnung, für welche die Folge (6) die Ziffer

$r > 1$ auf den festen Stellen $i_0, i_1, \ldots, i_{s-1}$ enthält, gleich der Zahl $r/[i_0 i_1 \ldots i_{s-1}(l + 1)]$. Im Falle $r = 0$ oder $r = 1$ ist diese Summe gleich der Zahl $1/[i_0 i_1 \ldots i_{s-1}(l + 1)]$. Das vorige gilt auch im Falle $s = 0$ (bei $r \geqq 0$, siehe 4). Also

$$|B_r(l, k, s)| = \frac{r}{l + 1} \sum_{\{i_0, \ldots, i_{s-1}\} \subset \{r, r+1, \ldots, l\}} \frac{1}{i_0 \cdot i_1 \ldots i_{s-1}}$$

für $r > 1$ und

$$|B_r(l, k, s)| = \frac{1}{l + 1} A_1(s, l)$$

für $r = 0$ oder $r = 1$. Aus (7) folgt dann für jedes $r \geqq 0$

$$|M_r(l, k)| \leqq \frac{C_1'}{l} \sum_{s \in J(l,k)} A_r(s, l) ,$$

wo $C_1' = C_1'(r) = \max(1, r)$ und (durch Definition) $A_0(s, l) = A_1(s, l)$ ist. Setzen wir

$$F_s = \frac{(1 + \log l)^s}{s!} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots) ,$$

so haben wir

$$\frac{F_s}{F_{s-1}} = \frac{1 + \log l}{s} \quad (s > 0) .$$

Dieser Quotient ist für $s \leqq [1 + \log l]$ nicht kleiner als 1 und für $s > [1 + \log l]$ ist er kleiner als 1. Daraus folgt

$$\max_{s \in J(l,k)} F_s \leqq F_{[1 + \log l]} .$$

Mit Hilfe einer einfachen Abschätzung bekommt man auf Grund von Lemma 1,1

$$|M_r(l, k)| \leqq C_1' \frac{2k\,\psi(l) + 1}{l} \frac{([1 + \log l] + 1)^{[1 + \log l]}}{[1 + \log l]!} .$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel kann man sich überzeugen, dass eine natürliche Zahl $l_2 \geqq l_1$ so existiert, dass für jedes $l \geqq l_2$ die Ungleichheit

$$|M_r(l, k)| \leqq C_1 \frac{\psi(l) + 1}{l} \frac{g(l)}{h(l)}$$

gilt, wo

$$C_1 = C_1(k) = C_1' \cdot \left(\frac{2k}{\sqrt{2\pi}} + 1\right) ,$$

$$g(l) = ([1 + \log l] + 1)^{[1 + \log l]} . \exp\{[1 + \log l]\} ,$$

$$h(l) = [1 + \log l]^{[1 + \log l] + \frac{1}{2}} .$$

Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$g(l) \leqq [1 + \log l]^{[1+\log l]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[1 + \log l]}\right)^{[1+\log l]} \cdot \exp\{1 + \log l\} \leqq$$
$$\leqq C_2 l [1 + \log l]^{[1+\log l]}, \quad C_2 = e^2 .$$

Wenn wir $C_3 = C_1 \cdot C_2$ setzen, bekommen wir (für $l \geqq l_2$)

$$(8) \qquad |M_r(l, k)| \leqq C_3 \frac{\psi(l) + 1}{\sqrt{\log l}} .$$

Aus der Voraussetzung (ii) folgt die Existenz einer Folge von natürlichen Zahlen

$$\{l'_p\}_{p=1}^{\infty}, \quad l_2 \leqq l'_1 < l'_2 < \ldots < l'_p < \ldots$$

mit

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\psi(l'_p)}{\sqrt{\log l'_p}} = 0 .$$

Daher existiert zum beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $p_0 \geqq 1$ derart, dass für $p \geqq p_0$ infolge (8) $|M_r(l'_p, k)| \leqq \varepsilon$ ist.

Setzen wir bei natürlichem n $D_r(n, k) = \bigcap_{l=n}^{\infty} M_r(l, k)$. Dann ist auf Grund des vorhergehenden für jedes n $|D_r(n, k)| \leqq \varepsilon$. Weiter ist

$$D_r(1, k) \subset D_r(2, k) \subset \ldots \subset D_r(n, k) \subset \ldots$$

und so, wenn wir $D_r(k) = \lim_{n\to\infty} D_r(n, k)$ setzen, bekommen wir

$$|D_r(k)| \leqq \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Offenbar ist

$$D_r(1) \subset D_r(2) \subset \ldots \subset D_r(k) \subset \ldots$$

und so, wenn wir $D_r = \lim_{k\to\infty} D_r(k)$ setzen, bekommen wir

$$|D_r| = \lim_{k\to\infty} |D_r(k)| \leqq \varepsilon .$$

Weil ε beliebig war, folgt daraus $|D_r| = 0$. D_r ist aber offenbar die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche

$$N_n(r, x) = \log n + O(\psi(n)) \quad (n \to \infty)$$

gilt.

Setzen wir $C_r^* = \langle 0, 1) - D_r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann ist $|C_r^*| = 1$. Wenn wir jetzt $C^* = \bigcap_{r=0}^{\infty} C_r^*$ setzen, so bekommen wir $|C^*| = 1$. C^* ist aber offensichtlich die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|N_n(r, x) - \log n|}{\psi(n)} = +\infty$$

für jedes $r = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Satz 1,2. *Es sei ψ eine reelle Funktion der natürlichen Veränderlichen. Es sei $\psi(n) > 0$ für $n > n_2$ und*

$$(j) \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{\sqrt{(\log n \log\log n)}} = +\infty\,.$$

Dann gilt für fast alle $x \in \langle 0, 1)$

$$(9) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{|N_n(r, x) - \log n|}{\psi(n)} = 0$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Beweis. Es erfülle ψ die Voraussetzungen des Satzes. Es sei t eine reelle Zahl, $t > 0$, l natürlich, r ganz, $r \geqq 0$. Bezeichnen wir mit $M_r(l, t)$ die Menge aller $x \in \in \langle 0, 1)$, für welche $|N_l(r, x) - \log l| \geqq t\,\psi(l)$ gilt. Setzen wir $M_r(l, t) = M_r'(l, t) \cup \cup M_r''(l, t)$, wo $M_r''(l, t)$ $(M_r'(l, t))$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$ ist, für welche

$$N_l(r, x) \geqq \log l + t\,\psi(l)\;(N_l(r, x) \leqq \log l - t\,\psi(l))$$

gilt.

Wir können $\psi(n) = o(\log n)$ voraussetzen. Wenn nämlich die Beziehung $\psi(n) = = o(\log n)$ nicht erfüllt wäre, so könnten wir im weiteren die Funktion $\psi_2 = = \min(\psi, \log^{2/3})$ anstatt ψ nehmen. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes für diese Funktion erfüllt. Wenn (9) für die Funktion ψ_2 gilt, dann gilt es offensichtlich auch für ψ. Daraus folgt, dass ein $l_1 \geqq \max(n_2, r + 1)$ so existiert, dass für $l \geqq l_1$ die Ungleichheiten

$$l - r + 1 > \log l - t\,\psi(l) > 1$$

gelten.

Wir schätzen $|M_r'(l, t)|$ bei $l \geqq l_1$ ab. Durch eine Methode, die der bei der Abschätzung von $|M_r(l, k)|$ im Beweis des Satzes 1,1 angewandten Methode ähnlich ist, kann man feststellen, dass

$$(10) \qquad |M_r'(l, t)| \leqq \frac{C_1'}{l} \sum_{s=0}^{[\log l - t\psi(l)]} \frac{(1 + \log l)^s}{s!}$$

ist, $C'_1 = \max(1, r)$. Wenn wir wieder

$$F_s = \frac{(1 + \log l)^s}{s!} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzen, dann ist die endliche Folge $F_0, F_1, \ldots, F_{[\log l - t\psi(l)]}$ wachsend und durch eine einfache Abschätzung bekommt man (siehe (10))

$$|M'_r(l, t)| \leqq C'_1 \frac{[\log l - t\,\psi(l)] + 1}{l} \frac{(1 + \log l)^{[\log l - t\psi(l)]}}{[\log l - t\,\psi(l)]!}.$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel bekommt man für $l \geqq l_2 \geqq l_1 (l_2 = l_2(t))$

$$|M'_r(l, t)| \leqq C_1 \frac{\log l - t\,\psi(l) + 1}{\sqrt{(\log l - t\,\psi(l) - 1)}} \left(\frac{1 + \log l}{\log l - t\,\psi(l) - 1}\right)^{\log l - t\psi(l)} . \exp\{-t\,\psi(l)\},$$

wo $C_1 = C'_1(1/\sqrt{(2\pi)} + 1)$ ist. Offenbar ist

$$\frac{\log l - t\,\psi(l) + 1}{\sqrt{(\log l - t\,\psi(l) - 1)}} = O(\sqrt{(\log l)})$$

und

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1 + \log l}{\log l - t\,\psi(l) - 1} = 1,$$

daher existiert $l_3 \geqq l_2$ so, dass für $l \geqq l_3$

$$|M'_r(l, t)| \leqq C_2 \sqrt{(\log l)} \left(\frac{1 + \log l}{\log l - t\,\psi(l) - 1}\right)^{\log l - t\psi(l) - 1} . \exp\{-t\,\psi(l)\}$$

ist, wo $C_2 = C_1 + 1$. Setzen wir der Kürze halber

$$\eta(l) = \log l - t\,\psi(l) - 1, \quad \zeta(l) = 1 + \log l,$$

dann ist

$$\left(\frac{\zeta(l)}{\eta(l)}\right)^{\eta(l)} = \exp\left\{\eta(l) \log \frac{\zeta(l)}{\eta(l)}\right\} = \exp\left\{\eta(l) \log\left(1 + \frac{\tau(l)}{\eta(l)}\right)\right\},$$

$\tau(l) = \zeta(l) - \eta(l) = t\,\psi(l) + 2$ und ersichtlich $0 < \tau(l)/\eta(l) < 1$ für alle hinreichend grossen l ($l \geqq l_4 \geqq l_3$). Für $l \geqq l_4$ bekommt man mit Hilfe der Taylorschen Formel

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{(1 + \vartheta x)^2} . \frac{x^2}{2} \leqq x - \tfrac{1}{8}x^2, \quad 0 < \vartheta < 1, \quad x = \frac{\tau(l)}{\eta(l)} < 1,$$

$$\left(\frac{\zeta(l)}{\eta(l)}\right)^{\eta(l)} = \exp\left\{\eta(l)\left(\frac{\tau(l)}{\eta(l)} - \frac{1}{8}\frac{\tau^2(l)}{\eta^2(l)}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\tau(l) - \frac{1}{8}\frac{\tau^2(l)}{\eta(l)}\right\} = C_3 \exp\left\{t\,\psi(l) - \frac{1}{8}\frac{\tau^2(l)}{\eta(l)}\right\}, \quad C_3 = \exp\{2\}.$$

Wenn wir $C_4 = C_2 \,.\, C_3$ setzen, dann haben wir für $l \geqq l_4$

$$(11) \qquad |M_r'(l, t)| \leqq C_4 \sqrt{(\log l)} \exp\left\{-\frac{1}{8}\frac{\tau^2(l)}{\eta(l)}\right\}.$$

Setzen wir für $l \geqq l_5 \geqq \max(l_4, \exp\{3\})$

$$\psi(l) = \sqrt{(\log l \log\log l)}\, \psi_1(l)\,.$$

Dann ist nach der Voraussetzung (j) $\limsup_{l\to\infty} \psi_1(l) = +\infty$. Aus den Definitionen von τ und η folgt

$$-\frac{1}{8}\frac{\tau^2(l)}{\eta(l)} < -\frac{1}{8}t^2 \log\log l\, \psi_1^2(l)\,.$$

Aus (11) folgt auf Grund der letzten Ungleichheit

$$(12) \qquad |M_r'(l, t)| \leqq C_4 \sqrt{(\log l)} \exp\{-\tfrac{1}{8}t^2\, \psi_1^2(l) \log\log l\} =$$
$$= C_4 \sqrt{(\log l)}\, (\log l)^{-1/8t^2\psi_1^2(l)} = C_4(\log l)^{1/2 - 1/8t^2\psi_1^2(l)}\,.$$

Aus (j) folgt die Existenz einer unendlichen Menge

$$L = \{l_1'' < l_2'' < \ldots < l_k'' < \ldots\}$$

von natürlichen Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} \psi(l_k'')/\sqrt{(\log l_k'' \log\log l_k'')} = +\infty$ und so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $l_6 \geqq l_5$, dass wegen (12) die Beziehung $|M_r'(l, t)| \leqq \varepsilon/2$ für $l \geqq l_6$, $l \in L$ gilt.

Wir schätzen $|M_r''(l, t)|$ ab. Infolge der Voraussetzung $\psi(n) = o(\log n)$ existiert $l_6' \geqq l_6$ so, dass für $l \geqq l_6'$ $\log l + t\,\psi(l) < l - r + 1$ ist. Wir können wieder leicht einsehen, dass für $l \geqq l_6'$ die Ungleichheit

$$|M_r''(l, t)| \leqq \frac{C_1'}{l} \sum_{\log l + t\psi(l) \leqq s \leqq l - r + 1} \frac{(1 + \log l)^s}{s!}$$

mit $C_1' = \max(1, r)$ gilt. Auf Grund der Voraussetzung (j) existiert $l_7 \geqq l_6'$ so, dass für $l \geqq l_7$, $l \in L$

$$(13) \qquad \psi(l) > \frac{3}{t}$$

gilt. Wenn F_s $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ die vorige Bedeutung hat, dann bekommen wir durch eine triviale Abschätzung für $l \geqq l_7$, $l \in L$

$$|M_r''(l, t)| \leqq \frac{C_1'}{l} \sum_{s = [\log l + t\psi(l)]}^{\infty} F_s\,.$$

Setzen wir $s_0 = [\log l + t\,\psi(l)]$, dann ist für $l \geqq l_7$, $l \in L$

$$|M_r''(l, t)| \leqq \frac{C_1'}{l} F_{s_0}\left(1 + \frac{F_{s_0+1}}{F_{s_0}} + \ldots + \frac{F_{s_0+k}}{F_{s_0}} + \ldots\right),$$

dabei

$$\frac{F_{s_0+k}}{F_{s_0}} \leqq \frac{(1 + \log l)^k}{s_0^k}.$$

Bei $l \in L$, $l \geqq l_7$ gilt infolge von (13) die Ungleichheit $(1 + \log l)/s_0 < 1$ und so

$$|M_r''(l, t)| \leqq \frac{C_1'}{l} F_{s_0} \frac{\log l + t\,\psi(l)}{t\,\psi(l) - 2}.$$

Wegen der Beziehung $\psi(n) = o(\log n)$ und (13) bekommen wir (für $l \geqq l_7'$, $l \in L$)

$$|M_r''(l, t)| \leqq \frac{2C_1'}{l} F_{s_0} \log l\,. \tag{14}$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel bekommt man für $l \geqq l_8 \geqq l_7'$, $l \in L$

$$F_{s_0} \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} + 1\right) \frac{l \exp\{t\,\psi(l)\}}{\sqrt{(\log l + t\,\psi(l) - 1)}} \left(\frac{1 + \log l}{\log l + t\,\psi(l) - 1}\right)^{\log l + t\psi(l) - 1}.$$

Aus (13) und (14) folgt dann für $l \geqq l_8$, $l \in L$

$$|M_r''(l, t)| \leqq C_8 \sqrt{(\log l)} \exp\{t\,\psi(l)\} \left(\frac{1 + \log l}{\log l + t\,\psi(l) - 1}\right)^{\log l + t\psi(l) - 1} \tag{15}$$

mit $C_8 = 2C_1'(1/\sqrt{(2\pi)} + 1)$.

Setzen wir $\eta_1(l) = 1 + \log l$, $\zeta_1(l) = \log l + t\,\psi(l) - 1$, dann ist auf Grund der Wahl von l_8 und l_7 (siehe (13)) $\zeta_1(l) > \eta_1(l)$ für $l \geqq l_8$, $l \in L$. Setzen wir noch $\tau_1(l) = \zeta_1(l) - \eta_1(l)$. Dann ist für $l \geqq l_8$, $l \in L$

$$\left(\frac{\eta_1(l)}{\zeta_1(l)}\right)^{\zeta_1(l)} = \left(1 - \frac{\tau_1(l)}{\zeta_1(l)}\right)^{\zeta_1(l)} = \exp\left\{\zeta_1(l) \log\left(1 - \frac{\tau_1(l)}{\zeta_1(l)}\right)\right\}.$$

Jetzt $\tau_1(l) = t\,\psi(l) - 2$ und $\tau_1(l) < \zeta_1(l)$, daher ist auf Grund der Taylorschen Reihe für $\log(1 + x)$, $x = \tau_1(l)/\zeta_1(l)$

$$\left(\frac{\eta_1(l)}{\zeta_1(l)}\right)^{\zeta_1(l)} \leqq \exp\left\{-\tau_1(l) - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)}\right\} = C_9 \exp\{-t\,\psi(l)\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)}\right\},$$

$$C_9 = \exp\{2\}.$$

Wenn wir $C_{10} = C_8 \,.\, C_9$ setzen, bekommen wir für $l \geqq l_8$, $l \in L$ aus (15)

$$|M_r''(l, t)| \leqq C_{10} \sqrt{(\log l)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)}\right\}.$$

Wegen der Voraussetzung (j) existiert ein solches $l_9 \geqq l_8$, dass für $l \geqq l_9$, $l \in L$ die Ungleichheiten

$$\tau_1(l) > \tfrac{1}{2}t\,\psi(l)\,, \quad \zeta_1(l) < 2\log l$$

gelten. Dann ist (für $l \geqq l_9$, $l \in L$)

$$\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)} > 2v\,\frac{\psi^2(l)}{\log l}\,, \quad v = \frac{t^2}{16} > 0\,.$$

Daraus folgt

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)}\right\} < \exp\left\{-v\,\frac{\psi^2(l)}{\log l}\right\}.$$

Wegen der Voraussetzung (j) existiert jetzt ein solches $l_{10} \geqq l_9$, dass für $l \geqq l_{10}$, $l \in L$ die Ungleichheit $\psi^2(l) > (1/v)\log l \log\log l$ gilt. Daraus folgt (für $l \geqq l_{10}$, $l \in L$)

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\tau_1^2(l)}{\zeta_1(l)}\right\} < \frac{1}{\log l}\,.$$

So bekommen wir ($l \geqq l_{10}$, $l \in L$):

$$|M_r''(l, t)| \leqq C_{10}\,\frac{1}{\sqrt{(\log l)}}\,.$$

Wenn jetzt $\varepsilon > 0$ ist, dann existiert auf Grund des vorhergehenden ein $l_{11} \geqq l_{10}$ so, dass für $l \geqq l_{11}$, $l \in L$ die Ungleichheit $|M_r''(l, t)| \leqq \varepsilon/2$ gilt. Also ist $|M_r(l, t)| \leqq$ $\leqq |M_r'(l, t)| + |M_r''(l, t)| \leqq \varepsilon$ für $l \geqq l_{11}$, $l \in L$. Daraus folgt, dass bei jedem natürlichen n die Ungleichheit $\left|\bigcap_{l=n}^{\infty} M_r(l, t)\right| \leqq \varepsilon$ gilt.

Setzen wir $D_r(n, t) = \bigcap_{l=n}^{\infty} M_r(l, t)$. Dann ist die Folge $\{D_r(n, t)\}_{n=1}^{\infty}$ eine nichtabnehmende Folge von messbaren Mengen und so, wenn wir $D_r(t) = \lim_{n\to\infty} D_r(n, t)$ setzen, bekommen wir $|D_r(t)| \leqq \varepsilon$.

Es sei $t_1 > t_2 > \ldots > t_n > \ldots$, $t_n \to 0$. Offensichtlich

$$D_r(t_1) \subset D_r(t_2) \subset \ldots \subset D_r(t_n) \subset \ldots$$

und daher, wenn wir $D_r = \lim_{n\to\infty} D_r(t_n)$ setzen, bekommen wir auf Grund des vorhergehenden

$$|D_r| = \lim_{n\to\infty} |D_r(t_n)| \leqq \varepsilon\,.$$

Daraus folgt leicht die Beziehung $|D_r| = 0$.

Setzen wir noch $C_r^* = \langle 0, 1) - D_r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, dann ist $|C_r^*| = 1$ $(r =$ $= 0, 1, 2, \ldots)$ und so $|C^*| = 1$, $C^* = \bigcap_{r=0}^{\infty} C_r^*$. C^* ist aber die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$, für welche (9) gilt. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Bei der speziellen Wahl $\psi(n) = \log^\alpha n$, $0 < \alpha < 1$ der Funktion ψ bekommt man aus den Sätzen 1,1 und 1,2 folgendes Ergebnis:

Satz 1,3. *Wenn* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *ist, dann gilt für fast alle* $x \in 0, 1)$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|N_n(r, x) - \log n|}{\log^\alpha n} = +\infty \quad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wenn $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *ist, dann gilt für alle* $x \in \langle 0, 1)$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|N_n(r, x) - \log n|}{\log^\alpha n} = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. EINIGE ANWENDUNGEN DES HAUSDORFFSCHEN MASSES IN DER THEORIE DER CANTORSCHEN REIHEN

Mit Hilfe des Satzes von EGGLESTON (siehe [7]) beweisen wir den folgenden Satz, welcher eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses der Arbeit [7] ist.

Satz 2,1. *Es habe* $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ *die Eigenschaft* $V(\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$. *Es sei*

$$M_k = \{C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \ldots, C_{p_k}^{(k)}\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine nicht leere Menge von ganzen Zahlen,

$$0 \leqq C_i^{(k)} < q_k \quad (i = 1, 2, \ldots, p_k), \quad 1 \leqq p_k \leqq q_k.$$

Bezeichnen wir mit $Q = Q(M_1, M_2, \ldots)$ *die Menge aller derjenigen*

$$x = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k} \in \langle 0, 1),$$

für welche $\varepsilon_k(x) \in M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ist. Dann gilt*

$$\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = \liminf_{n\to\infty} W(n),$$

wo

$$W(n) = \frac{\log \prod_{k\leqq n} p_k}{\log \prod_{k\leqq n} q_k} = \frac{\sum_{k\leqq n} \log p_k}{\sum_{k\leqq n} \log q_k}$$

ist.

Bemerkung 2,1. Wenn wir $q_k = g > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ setzen und wenn wir

$$M_k = \{0, 1, \ldots, g - 1\} - \{C_1, C_2, \ldots, C_s\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

wählen, wo $0 \leqq C_i < g$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, C_i ganz, $1 \leqq s < g$ ist, bekommen wir aus dem Satz 2,1 das bekannte Ergebnis (siehe [8], [9]), nach dem

$$\dim H^{(g)}_{C_1,\ldots,C_s} = \frac{\log (g - s)}{\log g}$$

ist; $H^{(g)}_{C_1,\ldots,C_s}$ bedeutet die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$ in deren g-adischen Entwicklungen keine der Ziffern $C_1, \ldots, C_s$ vorkommt.

Beweis des Satzes. Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der Ungleichheit

$$\dim Q \leqq \liminf_{n \to \infty} W(n) . \tag{1}$$

Offensichtlich können wir schon $\liminf_{n \to \infty} W(n) < 1$ voraussetzen. Wählen wir ein α mit $\liminf_{n \to \infty} W(n) < \alpha < 1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass $\alpha - \varepsilon > \liminf_{n \to \infty} W(n)$. Daraus folgt, dass für unendlich viele n (für $n = n_l$, $l = 1, 2, \ldots$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_l < \ldots$)

$$\log \prod_{k=1}^{n_l} p_k - \alpha \log \prod_{k=1}^{n_l} q_k < -\varepsilon \log \prod_{k=1}^{n_l} q_k \tag{2}$$

ist. Bezeichnen wir mit I_n das System aller derjenigen Intervalle $i^{(k)}_n$ n-ter Ordnung. welche zu solchen Folgen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gehören, dass $\varepsilon_i \in M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n$ ist), Die Anzahl aller dieser Intervalle ist $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n$. Offenbar $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Ersetzen wir jedes Intervall $i \in I_n$ durch sein Inneres, so bekommen wir ein neues System I'_n anstatt I_n und wir setzen $Q' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n$. Dann ist offenbar $Q' \subset Q$ und $Q - Q'$ ist eine abzählbare Menge, daher ist $\dim Q = \dim Q'$ (siehe [5]).

Es sei $\eta > 0$, dann existiert l_0 so, dass für jedes $l > l_0$ $1/q_1 \cdot q_2 \ldots q_{n_l} < \eta$ ist. Dann bekommt man auf Grund der Beziehung (2) und der Definition von $\mu^{(\alpha)}_\eta\{Q'\}$

$$\mu^{(\alpha)}_\eta\{Q'\} \leqq \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n_l}}{(q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n_l})^\alpha} =$$

$$= \exp \{\log \prod_{k=1}^{n_l} p_k - \alpha \log \prod_{k=1}^{n_l} q_k\} < \exp \{-\varepsilon \log \prod_{k=1}^{n_l} q_k\} ,$$

bei $l \to +\infty$ bekommt man daraus

$$\mu^{(\alpha)}_\eta\{Q'\} = 0 . \tag{3}$$

(3) gilt für jedes $\eta > 0$, daher ist $\mu^{(\alpha)}\{Q'\} = 0$ und so

$$\dim Q = \dim Q' \leqq \liminf_{n \to \infty} W(n) .$$

Wir zeigen ferner, dass

(4) $$\dim Q \geqq \liminf_{n\to\infty} W(n)$$

gilt. Wir können schon $\liminf_{n\to\infty} W(n) > 0$ voraussetzen. Ersetzen wir jedes Intervall $i \in I_n$ durch seine abgeschlossene Hülle, so bekommen wir ein neues System I_n'' anstatt I_n. Setzen wir $Q'' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n''$. Dann ist $Q \subset Q''$ und $Q'' - Q$ ist abzählbar, daher ist $\dim Q = \dim Q''$.

Q'' erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Eggleston und bei den im Satz von Eggleston benutzten Bezeichnungen (siehe 7) ist $g_n = p_1 \cdot p_2 \dots p_n$ und $\lambda_n = 1/q_1 \cdot q_2 \dots q_n$. Weiter ethält jedes Intervall $i \in I_n''$ p_{n+1} Intervalle des Systems I_{n+1}''. Wählen wir α so, dass $0 < \alpha < \liminf_{n\to\infty} W(n)$ ist. Dann existiert $\varepsilon' > 0$ so, dass $\alpha + \varepsilon' < \liminf_{n\to\infty} W(n)$ ist. Daraus folgt, dass für alle hinreichend grossen n (für $n > n_1$)

$$\alpha \log \prod_{k=1}^{n} q_k - \log \prod_{k=1}^{n} p_k < -\varepsilon' \log \prod_{k=1}^{n} q_k$$

ist. Auf Grund der Voraussetzung des Satzes folgt daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \lambda_n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{q_n (q_1 \cdot q_2 \dots q_n)^{\alpha}}{p_1 \cdot p_2 \dots p_n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} q_n \exp\{\alpha \log \prod_{k=1}^{n} q_k - \log \prod_{k=1}^{n} p_k\} < \sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \dots q_n)^{\varepsilon'}} < +\infty \,.$$

Nach dem Satz von Eggleston ist

$$\dim Q = \dim Q'' \geqq \liminf_{n\to\infty} W(n) \,.$$

Aus (1) und (4) bekommt man die Behauptung des Satzes.

Beispiel 2,1. Setzen wir $q_k = g \geqq 3$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ und M_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ sei die Menge aller Primzahlen $p \leqq g - 1$. Dann ist $p_k = \pi(g - 1)$, π ist die Primzahlfunktion und $Q = Q(M_1, M_2, \dots)$ ist die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, deren alle Ziffern Primzahlen sind. Auf Grund des Satzes 2,1 bekommt man $\dim Q = \log \pi(g - 1)/\log g$ und so ist $\dim Q > 0$ für $g > 3$.

Satz 2,2. *Es seien ausser den Voraussetzungen des Satzes* 2,1 *noch diese Voraussetzungen erfüllt:*

a) *Es existiert eine Menge* $A = \{k_1 < k_2 < \dots\}$ *derart, dass* $\delta_1(A) > 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} q_{k_n} = +\infty$ *ist.*

b) *Es ist* $\liminf_{n\to\infty} p_n/q_n > 0$. *Dann ist* $\dim Q(M_1, M_2, \dots) = 1$.

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt. Nach b) können wir eine Zahl η, $0 < \eta < 1$ derart wählen, dass $p_k \geqq \eta q_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Auf Grund der Definition von $W(n)$ bekommt man daraus $W(n) \geqq 1 - T(n)$,

$$T(n) = \frac{n \log(1/\eta)}{\sum\limits_{k \leqq n} \log q_k}.$$

Es sei $K > 1$. Aus a) folgt die Existenz einer Zahl n_0 so, dass für $n > n_0$ $q_{k_n} > K$ ist. Es sei $n > k_{2n_0+1}$. Dann ist

$$\sum_{k \leqq n} \log q_k \geqq (A(n) - n_0) \log K$$

und so

$$T(n) \leqq \frac{n \log(1/\eta)}{(A(n) - n_0) \log K},$$

daraus

$$\limsup_{n \to \infty} T(n) \leqq \frac{\log(1/\eta)}{\delta_1(A) \log K}.$$

Da die letzte Ungleichheit für jedes $K > 1$ gilt, bekommen wir $\lim\limits_{n \to \infty} T(n) = 0$ und so $\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 1$.

Bemerkung 2,2. Es sei bemerkt, dass, wenn die Voraussetzung $\delta_1(A) > 0$ nicht erfüllt ist, auch bei der Erfüllung aller übrigen Voraussetzungen des Satzes 2,2 $\dim Q(M_1, M_2, \ldots)$ von 1 verschieden sein kann. Setzen wir z. B. $q_n = 2$ für $n \neq 2^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und $q_{2^k} = 2^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Die so definierte Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ hat die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Weiter setzen wir $M_n = \{0\}$ für $n \neq 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $M_{2^k} = \{1, 2, \ldots, 2^{k-1}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} (p_n/q_n) = \frac{1}{2}$, $A = \{2, 2^2, \ldots, 2^k, \ldots\}$, $\delta_1(A) = 0$ und mit Hilfe des Satzes 2,1 kann man leicht einsehen, dass $\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 0$ ist.

Satz 2,3. *Es seien ausser den Voraussetzungen des Satzes* 2,1 *noch diese Voraussetzungen erfüllt*:

a) $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = +\infty$,

b) *für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist* $p_k = o(q_k^{\varepsilon})$ $(k \to \infty)$.

Dann gilt $\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 0$.

Beweis. Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Es sei $\varepsilon > 0$. Aus b) folgt, dass für alle hinreichend grossen k (für $k > k_0$) $\log p_k < \varepsilon \log q_k$ gilt. So bekommt man

$$W(n) \leqq \frac{\sum_{k=1}^{k_0} \log q_k}{\sum_{k=1}^{n} \log q_k} + \frac{\varepsilon \sum_{k=k_0+1}^{n} \log q_k}{\sum_{k=1}^{n} \log q_k} \quad (n > k_0).$$

Da $q_k > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, existiert ein $n_1 > k_0$, so dass für $n > n_1$ der erste Summand rechts kleiner als ε ist. Weil der zweite Summand trivial kleiner als ε ist, bekommen wir $W(n) < 2\varepsilon$ für $n > n_1$, also

$$\liminf_{n\to\infty} W(n) = 0\,, \quad \dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 0\,.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Aus den Ergebnissen der Arbeit [2] folgt, dass, wenn für jede ganze Zahl $r \geqq 0$ $\lim_{n\to\infty} s_n(r) = +\infty$ ist, für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ gilt: die Folge $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ von Ziffern der Zahl x enthält jede ganze nicht-negative Zahl. Wenn also R eine nicht leere Menge von ganzen nicht-negativen Zahlen ist und wenn $M(R)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$ mit $\varepsilon_k(x) \notin R$ $(k = 1, 2, \ldots)$ bedeutet, dann ist unter den erwähnten Voraussetzungen $|M(R)| = 0$. Es ist also zweckmässig die Grösse der Hausdorffschen Dimension der Menge $M(R)$ zu studieren. In der Arbeit [7] befinden sich einige Abschätzungen für $\dim M(R)$ im Falle $q_k = k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Unter anderem ist dort bewiesen (siehe Satz 4 aus [7]), dass, wenn ein η, $0 < \eta < 1$ so existiert, dass $R(n)/n \leqq \eta$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist, dann gilt

$$\dim M(R) \geqq 1 - \delta_2(R) + \delta_1(R)\,.$$

J. Mařík bemerkte in einer (nicht publizierten) Bemerkung, dass das erwähnte Ergebnis verbessert werden kann und bei erwähnten Voraussetzungen sogar $\dim M(R) = 1$ gilt. Der folgende Satz verschärft diese Ergebnisse.

Satz 2,4. *Es habe $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es sei $R = \{r_1 < r_2 < \ldots\}$ eine nicht leere Menge von ganzen nicht-negativen Zahlen. Es habe $M(R)$ die vorige Bedeutung. Es existiere eine Menge $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$ mit $\delta_1(A) > 0$ und $\lim_{n\to\infty} q_{k_n} = +\infty$. Es existierte ferner ein η, $0 < \eta < 1$ derart, dass*

$$\frac{R(q_k)}{q_k} \leqq \eta \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Dann gilt $\dim M(R) = 1$.

Beweis. Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Bei der im Satz 2,2 benutzten Bezeichnung is $M(R) = Q(M_1, M_2, \ldots)$, wo

$$M_k = \{0, 1, \ldots, q_k - 1\} - \{r_1, r_2, \ldots, r_{R(q_k - 1)}\} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

Also $p_k \geqq q_k - R(q_k)$, woraus $p_k/q_k \geqq 1 - R(q_k)/q_k \geqq 1 - \eta > 0$. Auf Grund des Satzes 2,2 ist also $\dim M(R) = 1$.

In der Arbeit [10] ist die folgende Eigenschaft der Cantorschen Reihen bewiesen: Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$ ist, dann gilt für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ die Beziehung

$$\left\{\frac{\varepsilon_n(x)}{q_n}\right\}_n' = \langle 0, 1\rangle$$

(siehe 11). Wenn also $S(z)$, $0 \leqq z \leqq 1$, die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$ bezeichnet, für welche $z \notin \{\varepsilon_n(x)/q_n\}_n'$ ist, dann ist $|S(z)| = 0$. Aus dem folgenden Satz bekommt man die Grösse der Hausdorffschen Dimension der Menge $S(z)$.

Satz 2,5. *Es habe $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es existiere eine Menge*

$$A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\}$$

mit $\delta_1(A) > 0$ und $\lim_{n\to\infty} q_{k_n} = +\infty$. Es sei $z \in \langle 0, 1\rangle$ und $0 < \eta < \frac{1}{4}$. Bezeichnen wir mit $S^*(z, \eta)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche

$$\frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} \notin (z - \eta, z + \eta) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Dann gilt $\dim S^*(z, \eta) = 1$.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen des Satzes 2,5 ist $\dim S(z) = 1$.

Beweis des Satzes. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ sei M_k die Menge aller ganzen r, für die $0 \leqq r < q_k$ und gleichzeitig $r \notin ((z - \eta)\, q_k, (z + \eta)\, q_k)$ ist. Bei der im Satz 2,2 benutzen Bezeichnung haben wir dann $S^*(z, \eta) = Q(M_1, M_2, \ldots)$ und $p_k \geqq q_k - (2\eta q_k + 1)$, so dass

$$\frac{p_k}{q_k} \geqq 1 - 2\eta - \frac{1}{q_k} \geqq \tfrac{1}{2} - 2\eta > 0$$

und $\liminf_{k\to\infty} p_k/q_k > 0$ ist. Nach dem Satz 2,2 ist $\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 1$.

In der Arbeit [11] haben P. Erdös und A. Rényi bewiesen, dass im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < +\infty$ für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k(x) = +\infty \tag{5}$$

gilt. Bezeichnen wir mit $C(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche (5) nicht gilt. Dann ist (im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < +\infty$)

$$|C(q_1, q_2, \ldots)| = 0.$$

Der folgende Satz spricht über die Hausdorffsche Dimension der Menge $C(q_1, q_2, \ldots)$. Es sei bemerkt, dass im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ auf Grund der Arbeit [2] für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ die folgende Behauptung gilt: $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ enthält unendlich viele 0. Also ist in diesem Fall $|C(q_1, q_2, \ldots)| = 1$ und so ist das folgende Ergebnis nur im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < +\infty$ nicht trivial.

Satz 2,6. *Es habe $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist* $\dim C(q_1, q_2, \ldots) = 1$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n/(q_1 \cdot q_2 \ldots q_n)^{\varepsilon}$ folgt die Existenz eines $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass für $n > n_0$ $q_n/(q_1 \ldots q_n)^{\varepsilon} < 1$ ist. Daraus ergibt sich

$$\frac{\log q_n}{\log \prod_{k \leqq n} q_k} = \frac{\log q_n}{\sum_{k \leqq n} \log q_k} < \varepsilon .$$

Wählen wir eine solche Folge

$$1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_r < \ldots$$

von natürlichen Zahlen, dass

$$k_r > n_0(1/2^r) \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

ist. Setzen wir $M_{k_r} = \{0\}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ und $M_n = \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ für $n \neq k_r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist

$$Q(M_1, M_2, \ldots) \subset C(q_1, q_2, \ldots)$$

und so genügt es zu beweisen, dass $\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = 1$ ist.

Bei der im Satz 2,1 benutzten Bezeichnung bekommt man $p_n = q_n$ für $n \neq k_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ und $p_{k_r} = 1$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Weiter ist auf Grund des Satzes 2,1

$$\dim Q(M_1, M_2, \ldots) = \liminf_{n \to \infty} (1 - D(n)), \; D(n) = \frac{\sum_{k_i \leqq n} \log q_{k_i}}{\sum_{k \leqq n} \log q_k} .$$

Es genügt also zu beweisen, dass $\lim_{n \to \infty} D(n) = 0$ ist.

Es sei $\eta > 0$. Wählen wir eine natürliche Zahl t mit $1/2^{t-1} < \eta/2$. Wählen wir weiter $n_1 > k_{t+1}$ so, dass für $n \geqq n_1$

$$\frac{\log q_{k_i}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} < \frac{\eta}{2t} \quad (i = 1, 2, \ldots, t - 1) \tag{7}$$

gilt. Es sei jetzt $n \geqq n_1$ und es seien $k_1 < k_2 < \ldots < k_{t+s}$ alle k_i mit $k_i \leqq n$. Dann ist

$$D(n) = \frac{\log q_{k_1}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} + \ldots + \frac{\log q_{k_{t-1}}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} + \frac{\log q_{k_t}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} + \ldots + \frac{\log q_{k_{t+s}}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} \leqq$$

$$\leqq \frac{\log q_{k_1}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} + \ldots + \frac{\log q_{k_{t-1}}}{\sum_{l=1}^{n} \log q_l} + \frac{\log q_{k_t}}{\sum_{l=1}^{k_t} \log q_l} + \ldots + \frac{\log q_{k_{s+t}}}{\sum_{l=1}^{k_t+s} \log q_l}.$$

Daraus bekommt man auf Grund von (6) und (7)

$$D(n) < \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^{t+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{t+s}} < \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2^{t-1}} < \eta ,$$

also $\lim_{n \to \infty} D(n) = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Im Zusammenhang mit dem Satz 2,1 erwähnen wir noch eine Frage. Es sei A eine nicht-leere Menge von natürlichen Zahlen. Es sei $\{\varepsilon_k\}$, $k \in A$, eine Folge von ganzen Zahlen, $0 \leqq \varepsilon_k < q_k(k \in A)$. Bezeichnen wir mit $Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ die Menge aller dejenigen $x \in \langle 0, 1)$, für welche $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k$ $(k \in A)$ ist. Wir bestimmen unter einigen Voraussetzungen die Hausdorffsche Dimension der Menge $Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$.

Satz 2,7. *Es habe $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es bedeute N die Menge aller natürlichen Zahlen, es habe $Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ die vorige Bedeutung. Dann ist*

$$\dim Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \prod_{k \leqq n, k \in N - A} q_k}{\log \prod_{k \leqq n} q_k}.$$

Bemerkung 2,3. Nach dem Satz 2,7 hängt $\dim Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ nicht von der Wahl der Zahlen ε_k, $k \in A$, sondern nur von der Menge A ab.

Beweis des Satzes. Es genügt im Satz 2,1 $M_n = \{\varepsilon_n\}$ für $n \in A$ und $M_n = \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ für $n \notin A$ zu setzen. Dann ist $p_n = q_n$ für $n \notin A$ und $p_n = 1$ für $n \in A$. Die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus dem Satz 2,1.

Wenn wir uns nur auf die Fakultätreihen beschränken, bekommen wir eine einfache Beziehung zwischen der Hausdorffschen Dimension von $Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ und der oberen asymptotischen Dichte von A.

Satz 2,8. *Es sei $q_k = k + 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, es habe $Z = Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ die vorige Bedeutung. Dann gilt* $\dim Z = 1 - \delta_2(A)$.

Beweis. Wir setzen $\delta = \delta_2(A)$. Es sei $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < \delta$. Dann gilt auf Grund der Definition der Zahl δ für unendlich viele n die Beziehung

$$\frac{A(n)}{n} > \delta - \varepsilon \,. \tag{8}$$

Aus dem Satz 2,7 bekommt man $\dim Z = \liminf_{n\to\infty} W(n)$, wo

$$W(n) = \frac{\log \prod_{k \leqq n, k\in N-A} (k+1)}{\log (n+1)!}$$

ist. Dann ist

$$W(n) \leqq \frac{\log [(n+1)\, n(n-1) \ldots (n - p(n) + 2)]}{\log (n+1)!},$$

wo $p(n) = \sum_{k \leqq n, k\in N-A} 1$ ist. Benutzen wir jetzt die Stirlingsche Formel, so bekommen wir

$$W(n) \leqq \frac{n \log n - (n - p(n) + 1) \log (n - p(n) + 1) + O(n)}{n \log n + O(n)}.$$

Auf Grund von (8) gilt

$$W(n) \leqq \frac{n(1 - \delta + \varepsilon) \log n + O(n)}{n \log n + O(n)}$$

für unendlich viele n, also ist $\liminf_{n\to\infty} W(n) \leqq 1 - \delta + \varepsilon$. Auf Grund der Beliebigkeit von ε, $0 < \varepsilon < \delta$, bekommt man

$$\liminf_{n\to\infty} W(n) \leqq 1 - \delta \,. \tag{9}$$

Es genügt also noch zu beweisen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} W(n) \geqq 1 - \delta \tag{10}$$

gilt.

Wir können schon $\delta < 1$ voraussetzen. Es sei $0 < \varepsilon < 1 - \delta$. Dann gilt auf Grund der Definition der Zahl δ für alle nihreichend grossen n (für $n > n_0$)

$$\frac{A(n)}{n} < \delta + \varepsilon \,. \tag{11}$$

Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$W(n) \geqq \frac{\log (2 \,.\, 3 \ldots (p(n) + 1))}{\log (n+1)!}.$$

Wenn $n > n_0$ ist, dann ist auf Grund der Definition der Zahl $p(n)$ und auf Grund von (11) $p(n) = n - A(n) > n(1 - \delta - \varepsilon)$ und so nach der Stirlingschen Formel

$$W(n) \geqq \frac{n(1 - \delta - \varepsilon) \log n + O(n)}{n \log n + O(n)},$$

also $\liminf_{n \to \infty} W(n) \geqq 1 - \delta - \varepsilon$. Weil ε eine beliebige Zahl mit $0 < \varepsilon < 1 - \delta$ war, ist (10) bewiesen. Aus (9), (10) folgt auf Grund des Satzes 2,7 die Behauptung schon unmittelbar.

Nach einem Ergebnis aus der Zahlentheorie (siehe [12], S. 190) gilt für fast alle $A \subset N$ („fast alle" in einem natürlich definierten Sinne) $\lim_{n \to \infty} A(n)/n = \frac{1}{2}$. Also gilt $\dim Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A) = \frac{1}{2}$ für fast alle $A \subset N$.

3. ANALYSE EINIGER ERGEBNISSE DER METRISCHEN THEORIE DER CANTORSCHEN REIHEN VOM STANDPUNKT DER BAIRESCHEN KATEGORIEN VON MENGEN

In diesem Teil der Arbeit werden wir vom topologischen Standpunkt die Menge $N = N(q_1, q_2, \ldots)$ aller in bezug auf $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ normalen Zahlen und die Menge H aus der Arbeit [10] studieren.

Wenn $q_k = q > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, dann ist die Menge $N(q_1, q_2, \ldots)$ aller q-adisch normalen Zahlen nach [13] von erster Kategorie in E_1. Wir zeigen jetzt, dass dieses Ergebnis auf eine breite Klasse von Grundfolgen $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erweitert werden kann.

Satz 3,1. *Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Grundfolge, es sei $r \geqq 0$ eine Ziffer. Es sei*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(r) = \sum_{r < q_k} \frac{1}{q_k} = +\infty . \tag{1}$$

Dann gilt für alle $x \in \langle 0, 1)$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$ die Beziehung

$$\langle 0, \max(2, r + 1)\rangle \subset \left\{\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)}\right\}_n' . \tag{2}$$

Folgerung. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k$ divergiert, dann ist $N = N(q_1, q_2. \ldots)$ von erster Kategorie in E_1 (es genügt zu erwägen, dass $\lim_{n \to \infty} s_n(0) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ ist).

Bemerkung 3,1. Die Inklusion in (2) ist in solchem Sinn die beste, dass die Zahl $\max(2, r + 1)$ in dieser Inklusion durch keine grössere Zahl ersetzt werden kann. Wir zeigen das mit Hilfe zwei folgender Beispiele.

1. Setzen wir $q_k = 2$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, dann gilt im Falle $r = 0$ oder $r = 1$

$$\langle 0, \max(2, r+1)\rangle = \langle 0, 2\rangle = \left\{\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)}\right\}_n'$$

für alle $x \in \langle 0, 1)$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$ (siehe [13]).

2. Setzen wir $q_k = 2$ für $k = 1$ und zusammengesetztes k und $q_k = k + 1$, wenn k eine Primzahl ist. Dann bekommt man durch die bekannten Eigenschaften der Primzahlfunktion π (siehe [6], S. 326, 339) für $r = 0$ oder $r = 1$ und jedes $x \in \langle 0, 1)$:

$$\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)} \leqq \frac{n}{(n - \pi(n))\frac{1}{2} + \sum\limits_{p \leqq n} \frac{1}{p+1}} \sim \frac{n}{\frac{1}{2}(n - \pi(n)) + O(\log\log n)} \to 2 \quad (n \to \infty);$$

darum ist infolge des Satzes 3,1 für alle $x \in \langle 0, 1)$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$

$$\langle 0, \max(2, r+1)\rangle = \langle 0, 2\rangle = \left\{\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)}\right\}_n'.$$

Es sei bemerkt, dass bei spezieller Wahl der Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine solche „Verbesserung“ der Inklusion (2) erreicht werden kann, dass in dieser Inklusion die Zahl $\max(2, r+1)$ durch eine grössere Zahl ersetzt werden kann. Wenn man z. B. $q_k = g > 2$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ setzt, dann gilt für alle $x \in \langle 0, 1)$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$

$$\langle 0, g\rangle = \left\{\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)}\right\}_n' \quad (r = 0, 1, \ldots, g-1)$$

(siehe [13]).

Zum Beweis des Satzes benutzen wir einige Hilfssätze.

Lemma 3,1. *Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Grundfolge, $r \geqq 0$ sei eine Ziffer. Es bedeute $A = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$ die Menge aller natürlichen m, für welche $r < q_m$ ist. Es sei*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \in \langle 0, 1)$$

und für irgendein $i \geqq 1$ sei $\varepsilon_{m_{i+1}}(x) = r$. Dann gilt

$$\frac{N_{m_{i+1}}(r, x)}{s_{m_{i+1}}(r)} - \frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} < \frac{1}{s_{m_{i+1}}(r)}$$

und wenn

$$\frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} \leqq \zeta < \max(2, r+1)$$

ist, so gilt auch

$$(3) \qquad \left(1 - \frac{\zeta}{\max(2, r + 1)}\right) \frac{1}{s_{m_{i+1}}(r)} \leqq \frac{N_{m_{i+1}}(r, x)}{s_{m_{i+1}}(r)} - \frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)}.$$

Beweis. Es seien die Voraussetzungen erfüllt. Dann ist

$$N_{m_{i+1}}(r, x) = N_{m_i}(r, x) + 1 \quad \text{und} \quad s_{m_{i+1}}(r) = s_{m_i}(r) + \frac{1}{q_{m_{i+1}}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{N_{m_{i+1}}(r, x)}{s_{m_{i+1}}(r)} - \frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} = \frac{1}{s_{m_{i+1}}(r)} \left(1 - \frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} \frac{1}{q_{m_{i+1}}}\right).$$

Daraus ist der erste Teil der Behauptung ersichtlich. Es sei jetzt

$$\frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} \leqq \zeta < \max(2, r + 1).$$

Erwägen wir, dass $q_{m_{i+1}} \geqq \max(2, r + 1)$ ist. Daraus folgt

$$1 - \frac{N_{m_i}(r, x)}{s_{m_i}(r)} \frac{1}{q_{m_{i+1}}} \geqq 1 - \frac{\zeta}{\max(2, r + 1)} > 0$$

und die Richtigkeit von (3) folgt unmittelbar.

Lemma 3,2. *Es haben* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $r \geqq 0$ *und*

$$A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\}$$

dieselbe Bedeutung wie in Lemma 3,1. *Es sei* (1) *erfüllt. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{s_{m_i}(r)} = +\infty.$$

Beweis. Da (1) erfüllt ist, ist A eine unendliche Menge. Durch eine triviale Abschätzung bekommt man $s_m(r) \leqq A(m)/2$, also (für $m \geqq m_1$) $1/s_m(r) \geqq 2/A(m)$ und folglich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{s_{m_i}(r)} \geqq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A(m_i)} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty.$$

Beweis des Satzes 3,1. Bezeichnen wir mit X die Menge $\langle 0, 1) - T$, wo T die Menge aller Endpunkte aller $i_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots, q_1 . q_2 \ldots q_n - 1$) bedeutet. X betrachten wir im weiteren als einen metrischen Raum mit der euklidischen Metrik. Aus der Konstruktion der Cantorschen Reihen folgt, dass X gleich der

Menge aller $x \in \langle 0, 1)$ ist, deren Cantorsche Entwicklungen unendlich viele von Null verschiedene Glieder haben.

Es sei $\zeta \in (0, \max(2, r + 1))$. Bezeichnen wir bei natürlichem k mit $M(\zeta, r, k)$ die Menge aller $x \in X$, für welche ein $n = n(x)$ mit

$$\left|\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)} - \zeta\right| < \frac{1}{k}$$

existiert. Setzen wir $M(\zeta, r) = \bigcap_{k=1}^{\infty} M(\zeta, r, k)$. Dann ist $M(\zeta, r)$ die Menge aller $x \in X$, für welche

$$\zeta \in \left\{\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)}\right\}'_n$$

ist.

Die Menge $M(\zeta, r, k)$ ist gleich der Vereinigungsmenge einiger Mengen der Form $i_n^{(l)} \cap X$, daher ist sie in X offen und so ist die Menge $M(\zeta, r)$ eine G_δ-Menge in X.

Wir zeigen, dass $M(\zeta, r)$ in X dicht ist. Es sei $x_0 \in X$, $\delta > 0$. Wählen wir n_0 so, dass $1/q_1 \cdot q_2 \dots q_{n_0} < \delta$ ist. Definieren wir die Zahl

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x')}{q_1 \cdot q_2 \dots q_k}$$

folgendermassen: bezeichnen wir mit r' diejenige aus den Zahlen 0, 1, welche von r verschieden ist, und wenn beide Zahlen 0, 1 von r verschieden sind, dann setzen wir $r' = 1$. Es habe $A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots\}$ dieselbe Bedeutung wie in Lemma 3,1. Wir werden die Folge $\{\varepsilon_s(x')\}_{s=1}^{\infty}$ durch Induktion konstruieren.

Setzen wir $\varepsilon_s(x') = r'$ für $1 \leqq s \leqq m_1$, also

$$\frac{N_{m_1}(r, x')}{s_{m_1}(r)} = 0 < \zeta .$$

Weiter setzen wir $\varepsilon_s(x') = r'$ für $m_1 < s < m_2$ und $\varepsilon_{m_2}(x') = r$. Offensichtlich ist

$$\frac{N_{m_2}(r, x')}{s_{m_2}(r)} - \frac{N_{m_1}(r, x')}{s_{m_1}(r)} = \frac{N_{m_2}(r, x')}{s_{m_2}(r)} = \frac{1}{s_{m_2}(r)} .$$

Wenn $1/s_{m_2}(r) > \zeta$ ist, dann setzen wir $i_2 = 2$. Wenn dies nicht gilt, setzen wir $\varepsilon_s(x') = r'$ für $m_2 < s < m_3$ und $\varepsilon_{m_3}(x') = r$ und konstruieren wir den Quotienten $N_{m_3}(r, x')/s_{m_3}(r)$. Auf Grund von Lemma 3,1 gilt

$$\frac{N_{m_3}(r, x')}{s_{m_3}(r)} - \frac{N_{m_1}(r, x')}{s_{m_1}(r)} > \left(1 - \frac{\zeta}{\max(2, r + 1)}\right) \sum_{j=2}^{r} \frac{1}{s_{m_j}(r)} .$$

Wenn wir noch Lemma 3,2 in Betracht ziehen, dann sehen wir, dass wir zu solchem kleinsten $i_2 \geqq 2$ kommen, dass $\varepsilon_s(x') = r'$ für $m_1 < s < m_{i_2}$, $s \neq m_j$; $\varepsilon_s(x') = r$ für $s = m_j$ $(j = 2, 3, \ldots, i_2)$ und

$$\frac{N_{m_{i_2}}(r, x')}{s_{m_{i_2}}(r)} > \zeta$$

ist. Dann ist nach Lemma 3,1

$$0 \leqq \frac{N_{m_{i_2}}(r, x')}{s_{m_{i_2}}(r)} - \zeta \leqq \frac{N_{m_{i_2}}(r, x')}{s_{m_{i_2}}(r)} - \frac{N_{m_{i_2-1}}(r, x')}{s_{m_{i_2-1}}(r)} \leqq \frac{1}{s_{m_{i_2}}(r)}.$$

Weiter setzt man $\varepsilon_s(x') = r'$ für $m_{i_2} < s \leqq m_{i_3}$, wo i_3 eine solche kleinste natürliche Zahl $> i_2$ bedeutet, dass

$$\frac{N_{m_{i_2}}(r, x')}{s_{m_{i_3}}(r)} < \zeta$$

ist. Eine solche Zahl i_3 existiert auf Grund der Voraussetzung (1). Ersichtlich $N_{m_{i_3}}(r, x') = N_{m_{i_2}}(r, x')$ und so ist $N_{m_{i_3}}(r, x')/s_{m_{i_3}}(r) < \zeta$. Jetzt haben wir eine Situation, welche der am Anfang der Konstruktion der Folge $\{\varepsilon_s(x')\}_{s=1}^{\infty}$ ähnlich ist. Durch ein ähnliches Verfahren kann man eine solche Zahl $i_4 > i_3$ konstruieren, dass $\varepsilon_s(x') = r'$ für $m_{i_3} < s < m_{i_4}$, $s \neq m_j$ und $\varepsilon_{m_j}(x') = r$ für $i_3 < j \leqq i_4$ und $N_{m_{i_4}}(r, x')/s_{m_{i_4}}(r) > \zeta$ ist. Dann ist

$$0 < \frac{N_{m_{i_4}}(r, x')}{s_{m_{i_4}}(r)} - \zeta \leqq \frac{1}{s_{m_{i_4}}(r)}.$$

So konstruiert man durch Induktion die Folge $\{\varepsilon_s(x')\}_{s=1}^{\infty}$ und die Folge

$$m_{i_2} < m_{i_4} < \ldots < m_{i_{2l}} < \ldots,$$

welche eine Teilfolge der Folge $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist, so, dass die Beziehung

$$0 < \frac{N_{m_{i_{2l}}}(r, x')}{s_{m_{i_{2l}}}(r)} - \zeta \leqq \frac{1}{s_{m_{i_{2l}}}(r)} \tag{4}$$

gilt. Definieren wir jetzt die Zahl

$$x_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_s(x_1)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_s} \tag{5}$$

folgendermassen: Es sei $\varepsilon_s(x_1) = \varepsilon_s(x_0)$ für $s \leqq n_0$ und $\varepsilon_s(x_1) = \varepsilon_s(x')$ für $s > n_0$. Aus der Konstruktion von x' und der Definition von x_1 folgt, dass die Cantorsche

Reihe (5) der Zahl x_1 unendlich viele von Null verschiedene Glieder enthält, also $x_1 \in X$. Weiter ist offensichtlich

$$|x_1 - x_0| \leqq \frac{1}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n_0}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n_0+s}(x_1) - \varepsilon_{n_0+s}(x_0)|}{q_{n_0+1} \cdot q_{n_0+2} \cdots q_{n_0+s}} \leqq \frac{1}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n_0}} < \delta .$$

Für jedes $n > n_0$ ist $|N_n(r, x_1) - N_n(r, x')| \leqq n_0$. Daraus folgt auf Grund von (1) und (4), dass x_1 zur Menge $M(\zeta, r)$ gehört.

Also ist $M(\zeta, r)$ eine in X dichte G_δ-Menge und so ist sie residual in X (siehe [14] S. 49). Weil T abzählbar ist, ist sie residual auch in $\langle 0, 1)$.

Es sei jetzt R_r die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalles $(0, \max(2, r + 1))$. Dann ist infolge der Abzählbarkeit von R_r auf Grund des vorhergehenden die Menge $M_r = \bigcap_{\zeta \in R_r} M(\zeta, r)$ residual in $\langle 0, 1)$. Das ist aber offenbar die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche (2) gilt. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Wir zeigen jetzt, dass bei beliebiger Grundfolge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Menge $N = N(q_1, q_2, \ldots)$ zur dritten mutliplikativen Borelschen Klasse gehört.

Satz 3,2. *Es sei* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Grundfolge, es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$. *Dann ist die Menge* $N(q_1, q_2, \ldots)$ *eine* $G_{\delta\sigma\delta}$*-Menge in* E_1.

Beweis. Es sei P die Menge aller Ziffern, für welche (1) gilt. Dann gilt auf Grund der Definition der Menge $N(q_1, q_2, \ldots)$ die Beziehung

$$N(q_1, q_2, \ldots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{r \in P} \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcap_{n=s}^{\infty} A(k, r, n), \tag{6}$$

wo

$$A(k, r, n) = \left\{x \in E_1; \left|\frac{N_n(r, x)}{s_n(r)} - 1\right| < \frac{1}{k}\right\}$$

ist. Offensichtlich ist $A(k, r, n)$ gleich der Vereinigungsmenge einiger Intervalle der Form

$$\left\langle \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}, \; \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \ldots + \frac{\varepsilon_n + 1}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}\right),$$

wo n eine feste natürliche Zahl ist; ε_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sind ganze Zahlen, $0 \leqq \varepsilon_i < q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und die Anzahl p_n der Zahlen r in der (endlichen) Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ erfüllt die Bedingung

$$\left|\frac{p_n}{s_n(r)} - 1\right| < \frac{1}{k} .$$

Wenn einige aus diesen Intervallen gemeinsame Endpunkte haben, dann vereinigen wir solche Intervalle. So bekommen wir ein System von links abgeschlossenen und von rechts offenen Intervallen; zwei verschiedene Intervalle haben dabei eine Entfernung $\geqq 1/q_1 \cdot q_2 \ldots q_n$. Daraus ist ersichtlich, dass $A(k, r, n)$ eine G_δ-Menge in E_1 ist, und aus (6) folgt, dass $N(q_1, q_2, \ldots)$ eine $G_{\delta\sigma\delta}$-Menge in E_1 ist.

Der folgende Satz ergänzt ein Ergebnis der Arbeit [10].

Satz 3,3. *Es sei* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Grundfolge, es sei* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$. *Es bedeute* $H(q_1, q_2, \ldots)$ *die Menge aller* $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 \cdot q_2 \ldots q_k) \in \langle 0, 1)$, *für welche* $\langle 0, 1\rangle = \{\varepsilon_n(x)/q_n\}_n'$ *ist. Dann ist* $H(q_1, q_2, \ldots)$ *residual in* $\langle 0, 1)$.

Bemerkung 3,2. Bei den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes ist die Menge $H(q_1, q_2, \ldots)$ residual in $\langle 0, 1)$ und von Mass 1 (siehe [10]).

Beweis des Satzes. Es habe X dieselbe Bedeutung wie im Beweis des Satzes 3,1. Es sei $\zeta \in (0, 1)$, k natürlich. Bezeichnen wir mit $H_{\zeta,k}$ die Menge aller $x \in X$, für die eine natürliche Zahl $n = n(x)$ mit $|\varepsilon_n(x)/q_n - \zeta| < 1/k$ existiert. $H_{\zeta,k}$ ist offenbar gleich der Vereinigungsmenge einiger Mengen der Form $i_n^{(l)} \cap X$, daher ist sie offen in X und so ist die Menge $H_\zeta = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{\zeta,k}$ eine G_δ-Menge in $\langle 0, 1)$. Da $|H_\zeta| = 1$ ist (siehe [10], Satz 2), ist die Menge H_ζ dicht in X. Daher ist sie residual in X und also residual auch in $\langle 0, 1)$.

Es bedeute R die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalles $(0, 1)$. Dann ist offenbar $H = \bigcap_{\zeta\in R} H_\zeta$ und infolge des vorhergehenden und der Abzählbarkeit von R ist H eine residuale Menge in $\langle 0, 1)$.

4. ÜBER DIE MENGE ALLER ZAHLEN MIT BESCHRÄNKTEN FOLGEN VON ZIFFERN IN CANTORSCHEN REIHEN

Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Grundfolge, es sei

(1) $$\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty .$$

Bezeichnen wir mit $M_\infty = M_\infty(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche die Folge $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ beschränkt ist. In der Arbeit [16] ist ein Satz angeführt (siehe [16], Satz 1), nach dem für jede Grundfolge, welche die Bedingung (1) erfüllt, $|M_\infty(q_1, q_2, \ldots)| = 0$ ist. Im Beweis dieses Satzes kommt eine Ungenauigkeit vor, wenn man ein Ergebnis aus [2] benutzt. Es gilt nämlich die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(s+1, x)}{\sum_{k\leqq n, s+1<q_k} 1/q_k} = 1$$

für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ nur bei der Erfüllung der Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} s_n(s+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqq n, s+1<q_k} 1/q_k = +\infty$$

und aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ folgt diese Voraussetzung nicht.

Wir geben jetzt einen kurzen und präzisen Beweis des Satzes 1 aus [16] ohne Unterscheidung der Fälle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < +\infty$ (siehe [16]).

Satz 4,1. *Es sei* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Grundfolge, für welche* (1) *gilt. Dann gilt* $|M_\infty(q_1, q_2, \ldots)| = 0$.

Beweis. Bezeichnen wir bei natürlichem s mit $M_s = M_s(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, für welche $\varepsilon_k(x) \leqq s$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Offensichtlich ist $M_\infty = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s$ und so genügt es zu beweisen, dass $|M_s| = 0$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

Es sei s natürlich und $0 < \varepsilon < 1$. Aus (1) folgt die Existenz einer Zahl $n > 1$ so, dass $q_n > (s+1)/\varepsilon$ ist. Ferner sei I_{n-1} das System aller Intervalle $(n-1)$-ter Ordnung. Ein beliebiges Intervall $i_{n-1}^{(k)} \in I_{n-1}$, $0 \leqq k \leqq q_1 \cdot q_2 \ldots q_n - 1$ besteht aus genau q_n Intervallen n-ter Ordnung. Bezeichnen wir diese Intervalle mit $j_n^{(k,0)}$, $j_n^{(k,1)}, \ldots, j_n^{(k,q_n-1)}$. Wenn $x \in j_n^{(k,l)}$, $l > s$ ist, dann ist auf Grund der Konstruktion der Cantorschen Reihen $\varepsilon_n(x) = l > s$, also $M_s \cap j_n^{(k,l)} = \emptyset$ für $l > s$ und so $|M_s \cap i_{n-1}^{(k)}| \leqq (s+1)/q_1 \cdot q_2 \ldots q_n$. Daraus bekommt man

$$|M_s| = \sum_{k=0}^{q_1\ldots q_{n-1}-1} |M_s \cap i_{n-1}^{(k)}| \leqq$$

$$\leqq q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n-1} \frac{s+1}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = \frac{s+1}{q_n} < \varepsilon .$$

Weil ε eine beliebige Zahl aus $(0, 1)$ ist, haben wir $|M_s| = 0$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Literatur

[1] *G. Cantor:* Über die einfache Zahlensysteme, Zeitschrift für Math. und Physik *14* (1869).

[2] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle elöállításaiban, Mat. Lap. *VII* (1956), 77—100.

[3] *O. Perron:* Irrationalzahlen, Berlin—Leipzig, 1921.

[4] *H. G. Eggleston:* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory, Proc. Lond. Math. Soc. *54* (1951), 42—93.

[5] *T. Šalát:* О мере Хаусдорфа линейных множеств, Czechosl. Math. J. *11* (*86*) (1961), 24—56.

[6] *А. А. Бухштаб:* Теория чисел, Москва, 1960.

[7] *T. Šalát:* Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. *VI* (1961), 15—41.
[8] *E. Best:* On sets of fractional dimension III, Proc. Lond. Math. Soc. *47* (1942), 436—454.
[9] *A. Gierl:* Über das Hausdorffsche Mass gewisser Punktmengen in der Zifferntheorie, Jour. rein. u. angew. Math. *202* (1959), 183—195.
[10] *T. Šalát:* Eine metrische Eigenschaft der Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen und Irrationalitätskriterien, Czechosl. Math. J. *14* (*89*), (1964), 254—266.
[11] *P. Erdös - A. Rényi:* On Cantor's series with convergent $\sum(1/q_n)$, Ann Univ. Sci. Budap. de Rol. Eötvös nom. *II* (1959), 93—109.
[12] *H. H. Ostmann:* Additive Zahlentheorie I, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.
[13] *T. Šalát:* A remark on normal numbers, Revue roumaine de math. pures et appl. *XI* (1966), 53—56.
[14] *K. Kuratowski:* Topologie I, Warszawa, 1958.
[15] *P. Erdös-A. Rényi:* Some futher statistical properties of the digits in Cantor's series, Acta math. acad. sci. Hung. *X* (1959), 21—29.
[16] *T. Šalát:* Über die Hausdorffsche Dimension der Menge der Zahlen mit beschränkten Folgen von Ziffern in Cantorschen Entwicklungen, Czechosl. Math. J. *15* (*90*), (1965), 540—552.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2, ČSSR (Prírodovedecká fakulta UK).