Oldřich Kowalski

Über U-Homomorphismen und Homomorphismen der ganzen l-Halbgruppen auf l-Halbgruppen mit der guten Arithmetik

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 1, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100808

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *18* (*93*) ПРАГА 28. 3. 1968 г., No 1

ÜBER U-HOMOMORPHISMEN UND HOMOMORPHISMEN DER GANZEN l-HALBGRUPPEN AUF l-HALBGRUPPEN MIT DER GUTEN ARITHMETIK

OLDŘICH KOWALSKI, Brno

(Eingegangen am 26. Januar 1965)

Unter einer *l-Halbgruppe* versteht man eine Halbgruppe mit einem Einselement, die zugleich ein Verband ist und die folgende Distributivgesetze erfüllt:

$$a(b \cup c) = ab \cup ac\,, \quad (b \cup c)\,a = ba \cup ca\,.$$ [1]

Wir bezeichnen mit e das *Einselement*, mit 0 das *Nullelement* in L (d. h. ein solches Element, daß $0 \,.\, x = x \,.\, 0 = 0$ für alle $x \in L$ gilt); wir werden weiter die Zeichen $<$, $\leqq$ für die Halbordnungsrelation des Verbands L benutzen. (Siehe BIRKHOFF [1], S. 280–281.) *In folgendem werden wir ausschließlich l-Halbgruppen ohne* 0 *betrachten.*

Sind alle Elemente von L *ganz*, d. h. $\leqq e$, so nennen wir auch die l-Halbgruppe L *ganz*, in anderem Falle nennen wir L *nichtganz*. Eine l-Halbgruppe L erfüllt *die Maximalbedingung*, wenn jede Kette von der Form $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \leqq e$ in L endlich ist.

Als *Homomorphismus* bezeichnen wir eine solche Abbildung φ von zwei l-Halbgruppen L, L', daß

(1) $\varphi(ab) = \varphi(a) \,.\, \varphi(b)$

(2) $\varphi(a \cup b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$

(3) $\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$

für je zwei $a, b \in L$ gilt. Ein 1-1 Homomorphismus ist ein *Isomorphismus*. Von einem U-*Homomorphismus* spricht man dann, wenn mindestens die Regeln (1), (2) erfüllt sind.

Eine l-Halbgruppe heißt *normal*, wenn es zu je zwei Elementen $a \leqq b \in L$ genau ein Element c^* bzw. c^{**} gibt, so daß $a = bc^*$ bzw. $a = c^{**}b$ gilt.

---

[1]) In der französischen Literatur sagt man „gerbier réticulé". Vgl. DUBREIL-JACOTIN [2].

Eine ganze l-Halbgruppe ist dann und nur dann normal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I) *Zu je zwei Elementen* $a \leqq b \in L$ *gibt es Elemente* c^*, c^{**}, *so daß* $a = bc^*$, $a = c^{**}b$ *gilt.*

(II) *Aus jeder Ungleichung der Form* $ac \leqq bc$ *oder* $da \leqq db$ *folgt* $a \leqq b$. (Vgl. Dubreil-Jacotin [2].)

Ein Element $p < e$ heißt *Primelement*, wenn aus den Beziehungen $a \leqq e$, $b \leqq e$, $ab \leqq p$ immer entweder $a \leqq p$ oder $b \leqq p$ folgt. Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung erfüllt, dann gibt es zu jedem Element $a < e$ mindestens ein *maximales Element* $q < e$, so daß $a \leqq q$ gilt. Alle maximalen Elemente $q < e$ einer l-Halbgruppe L sind ihre Primelemente, welche wir *die maximalen Primelemente* der l-Halbgruppe L nennen.

Man sagt, daß in einer ganzen l-Halbgruppe L die gute Arithmetik (*kurz*: *g. A.*) *gilt, wenn sich jedes Element* $a \neq e$ *als Produkt von endlichvielen miteinander vertauschbaren maximalen Primelementen darstellen läßt, wobei diese Darstellung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt ist.*[2]) Diese Eigenschaft ist äquivalent der Gesamtheit der obigen Bedingung (I) und einer neuen Bedingung (III): *Jedes Element* $a \neq e$ *läßt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von endlichvielen Primelementen darstellen.*

Der Begriff „die gute Arithmetik" wurde von Шулгейфер eingeführt, und zwar in der zuletzt erwähnten Form. (Siehe [6].)

Es gilt

Satz A. *In einer ganzen l-Halbgruppe gilt dann und nur dann die gute Arithmetik, wenn sie normal ist und der Maximalbedingung genügt.*

Der Satz ist in meiner Arbeit [5] bewiesen.

Шулгейфер [6] hat ein anderes Axiomensystem gefunden, welches in einer ganzen l-Halbgruppe die gute Arithmetik versichert.[3]) Ein verwandtes Problem ist die Untersuchung der Homomorphismen einer ganzen l-Halbgruppe auf die l-Halbgruppen mit der g. A. Ist eine ganze l-Halbgruppe L mit der Maximalbedingung in eine nichtganze l-Halbgruppe L' mit speziellen Eigenschaften eingebettet, so kann man auf L die sogenannte *Artinsche Relation* definieren, welche einen Homomorphismus von L auf ihre bestimmte Faktor-l-Halbgruppe mit der g. A. gibt. (Für den kommutativen Fall siehe Dubreil-Jacotin [2] und FUCHS [3], für den nichtkommutativen Fall siehe meine Arbeiten [4] und [5].) In [5] habe ich zu jeder ganzen l-Halbgruppe L

---

[2]) Bei Dubreil-Jacotin [2] wird ein etwas allgemeinerer Begriff „gerbier de Dedekind" studiert. Hier wird die Eindeutigkeit der Produktdarstellung in einem etwas abgeschwächten Sinne befasst.

[3]) Die analogischen Betrachtungen über die „gerbier de Dedekind" kann der Leser im Buch [2] finden.

mit der Maximalbedingung *spezielle* Faktor-l-Halbgruppen mit der g. A. konstruiert, und zwar ohne Voraussetzung, daß sich L in etwas einbetten läßt. Überdies können die entsprechenden Homomorphismen als eine natürliche Verallgemeinerung der „Artinschen" aufgefasst werden.

Die Methoden der Arbeit [5] sind auch zu U-Homomorphismen anwendbar. Hier zeigen wir, wie man *alle verschiedenen Typen* von U-Homomorphismen und Homomorphismen von L auf l-Halbgruppen mit der guten Arithmetik konstruieren kann.

Zufolge O. Borůvka ([7]), unter einem *Gruppoid* auf einer Menge M verstehen wir eine Abbildung $G : M \times M \to M$.

Satz 1. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung erfüllt und auf einer Menge M definiert ist. Dann*

1) *Gibt es eine kanonische Abbildung $\mathfrak{f}$, welche je zweien, auf der Menge M definierten Gruppoiden ${}_MG$, G_M, einen* U-*Homomorphismus $\mathfrak{f}({}_MG, G_M)$ von L auf eine l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik zuordnet.*

2) *Jeder* U-*Homomorphismus φ von L auf eine l-Halbgruppe L' mit der guten Arithmetik läßt sich in der Form $\psi \circ \mathfrak{f}({}_MG, G_M)$ schreiben, wo die Gruppoide ${}_MG$, G_M auf kanonische Weise konstruiert werden und ψ ein Isomorphismus von l-Halbgruppen ist.*

Satz 2. *Satz* 1 *bleibt gültig, wenn wir das Wort „*U-*Homomorphismus" überall durch das Wort „Homomorphismus" ersetzen.*

Bevor wir zu den Beweisen übergehen werden, wollen wir hier eine Reihe von nützlichen Begriffen und Resultaten zusammenfassen.

Unter einer *Relation* in der l-Halbgruppe L verstehen wir jede Untermenge $\mathcal{R}$ der Produktmenge $L \times L$. Ist $\mathcal{R}$ eine Relation, so werden wir statt $(a, b) \in \mathcal{R}$ auch $a \leqq b(\mathcal{R})$ schreiben. $a \prec b(\mathcal{R})$ bedeutet, daß $(a, b) \in \mathcal{R}$ und $(b, a) \notin \mathcal{R}$ ist. Wir definieren eine symetrische Relation $\mathcal{R}^s$ durch die Bedingung $(a, b) \in \mathcal{R}^s \Leftrightarrow a \leqq b$, $b \leqq a(\mathcal{R})$. $(a, b) \in \mathcal{R}^s$ wird auch als $a \sim b(\mathcal{R})$ geschrieben. In dem Falle, wenn $\mathcal{R}^s$ eine Äquivalenzrelation ist, werden wir statt $a \sim b(\mathcal{R})$ auch $a \equiv b(\mathcal{R})$ schreiben und die Relation $\mathcal{R}^s$ selbst mit $(\equiv \mathcal{R})$ bezeichnen. Eine Relation $\mathcal{R}$ heißt

transitiv, wenn

$$a \leqq b(\mathcal{R})\,, \quad b \leqq c(\mathcal{R}) \Rightarrow a \leqq c(\mathcal{R})\,,$$

stabil, wenn

$$a \leqq b(\mathcal{R})\,, \quad x, y \in L \Rightarrow xay \leqq xby(\mathcal{R})\,,$$

regulär, wenn

$$xay \leqq xby(\mathcal{R})\,, \quad x, y \in L \Rightarrow a \leqq b(\mathcal{R})\,,$$

disjunktiv, wenn

$$a \precsim b(\mathscr{R}), \quad c \precsim d(\mathscr{R}) \Rightarrow a \cup c \precsim b \cup d(\mathscr{R}),$$

konjunktiv, wenn

$$a \precsim b(\mathscr{R}), \quad c \precsim d(\mathscr{R}) \Rightarrow a \cap c \precsim b \cap d(\mathscr{R}).$$

$\mathscr{R}$ heißt *subnormal*, wenn sie gleichzeitig transitiv, stabil, regulär und disjunktiv ist. Der Durchschnitt von allen subnormalen Relationen, welche eine bestimmte Relation $\mathscr{R}$ umfassen, ist wieder eine subnormale Relation, welche wir *die subnormale Hülle von* $\mathscr{R}$ nennen und mit $U(\mathscr{R})$ bezeichnen. Eine Relation $\mathscr{R}$ heißt *Q-Relation*, wenn sie die Ordnungsrelation $\{\leqq\}$ umfasst und wenn es zu je zwei Elementen $a \precsim b(\mathscr{R})$ Elemente c, d, gibt so daß $a \sim bc(\mathscr{R})$, $a \sim db(\mathscr{R})$ ist. Eine subnormale Q-Relation nennen wir U-*Relation* und eine konjunktive U-Relation *Normalrelation*. *Die Kongruenz* ist eine stabile, disjunktive und konjunktive Äquivalenz. Eine Relation $\mathscr{R}$ *erfüllt die Maximalbedingung*, wenn jede Folge von der Form $a_1 \prec \prec a_2 \prec a_3 \prec \ldots (\mathscr{R})$ endlich ist.

Wir werden noch folgende Resultate benützen (Vgl. [5], 2.22, 3.3).

Satz B. *Die subnormale Hülle einer Q-Relation ist wieder eine Q-Relation und folglich eine* U-Relation.

Satz C. *Erfüllt eine ganze l-Halbgruppe L die Maximalbedingung, so erfüllt jede transitive und disjunktive, die Ordnungsrelation* $\{\leqq\}$ *umfassende, Relation* $\mathscr{R}$ *in L die Maximalbedingung. Überdies, zu jedem Element* $a \in L$ *gibt es genau ein Element* $a^{\mathscr{R}}$, *so daß* $b \precsim a(\mathscr{R})$ *mit der Ungleichung* $b \leqq a^{\mathscr{R}}$ *äquivalent ist.* ($a^{\mathscr{R}}$ *ist das größte Element x mit der Eigenschaft* $x \precsim a(\mathscr{R})$.)

Lemma 1. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung erfüllt. Dann entspricht jeder* U-*Relation* $\mathscr{R}$ *in L ein* U-*Homomorphismus der l-Halbgruppe L auf eine l-Halbgruppe* $\bar{L}$ *mit der guten Arithmetik und umgekehrt. Ist die Relation* $\mathscr{R}$ *normal, so handelt sich es um einen Homomorphismus und umgekehrt. Die l-Halbgruppe* $\bar{L}$ *ist dann eine Faktor-l-Halbgruppe von L,* $\bar{L} = L/(\equiv \mathscr{R}) = L/\mathscr{R}$.

Beweis. Es sei $\mathscr{R}$ eine U-Relation in L. $\mathscr{R}$ ist transitiv und umfasst die Ordnungsrelation $\{\leqq\}$, folglich ist $\mathscr{R}^s = (\equiv \mathscr{R})$ eine Äquivalenz. Aus der Stabilität folgt, daß $(\equiv \mathscr{R})$ eine Kongruenz der Halbgruppenstruktur von L ist. Bezeichnen wir mit φ die kanonische Abbildung von L auf die Faktorhalbgruppe $L/\mathscr{R}$. Die Relation $\mathscr{R}$ bestimmt in $L/\mathscr{R}$ eine Halbordnung $\leqq'$ und zwar: für $\bar{a}, \bar{b} \in L/\mathscr{R}$ haben wir $\bar{a} \leqq' \bar{b}$ dann und nur dann, wenn für beliebige $a \in \varphi^{-1}(\bar{a})$, $b \in \varphi^{-1}(\bar{b})$, $a \precsim b(\mathscr{R})$ gilt. Wegen der Disjunktivität von $\mathscr{R}$ ist $\varphi(a \cup b)$ ein Supremum der Elemente $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ in $L/\mathscr{R}$ und $L/\mathscr{R}$ wird zu einem U-Halbverband. Nach Satz C gilt in $L/\mathscr{R}$ die Maximalbedingung und folglich ist der U-Halbverband $L/\mathscr{R}$ U-vollständig. Wegen der Ungleichungen $\varphi(a \cap b) \leqq' \varphi(a)$, $\varphi(a \cap b) \leqq' \varphi(b)$ gibt es zu je zweien Elementen $\bar{a}, \bar{b} \in L/\mathscr{R}$ eine gemeinsame untere Schranke und aus der U-Vollständigkeit folgt die Existenz eines Infimums $\bar{a} \wedge \bar{b}$ in $L/\mathscr{R}$. Hiernach ist $L/\mathscr{R}$ eine ganze l-Halbgruppe und φ ist ein U-Homomorphismus von L auf $L/\mathscr{R}$. Wegen der Regularität und der Q-Eigenschaft von $\mathscr{R}$ sind die Bedingungen (I), (II) in $L/\mathscr{R}$ erfüllt und nach Satz A gilt in $L/\mathscr{R}$ die gute Arithmetik.

Ist anderseits φ ein U-Homomorphismus von L auf eine l-Halbgruppe $\bar{L}$ mit der guten Arithmetik, so bekommen wir eine U-Relation $\mathscr{R}$ nach der Regel $a \precsim b(\mathscr{R}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi(a) \leqq' \varphi(b)$ und die l-Halbgruppen L/R und $\bar{L}$ sind isomorph.[4])

Endlich ist klar, daß $(\equiv \mathscr{R})$ dann und nur dann eine Kongruenz der l-Halbgruppe L ist, wenn die U-Relation $\mathscr{R}$ konjunktiv ist. Dann wird $L/\mathscr{R}$ natürlich zu einer Faktor-l-Halbgruppe. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes 1. Ad 1). Es sei L eine ganze l-Halbgruppe mit der Maximalbedingung, die auf der Menge M definiert ist. Bezeichnen wir mit $_MG(\circ)$, $G_M(\odot)$ zwei auf der Menge M definierte Gruppoide. Es sei $\mathscr{G}$ die Menge von allen Paaren der Form $(a, b), (a, b(a \odot b))$, $(b(a \odot b), a)$, $(a, (a \circ b)\, b)$, $((a \circ b)\, b, a)$, wo $a \leqq b \in L$. Dann ist $\mathscr{G}$ eine Q-relation. Wirklich, setzen wir voraus, daß $x \precsim y(\mathscr{G})$. Dann ist entweder $x \leqq y$ und $x \sim y(x \odot y)\,(\mathscr{G})$, $x \sim (x \circ y)\, y\,(\mathscr{G})$, oder ist (x, y) ein „abgeleitetes“ Paar, also $x \sim y(\mathscr{G})$. Die Relation $U(\mathscr{G})$ ist nach Satz B eine U-Relation und nach Lemma 1 entspricht ihr ein bestimmter U-Homomorphismus φ von L auf die l-Halbgruppe $L/U(G)$ mit der guten Arithmetik. Das ist der gesuchte U-Homomorphismus $\mathfrak{f}(_MG, G_M)$.

Ad 2). Es sei φ ein U-Homomorphismus der l-Halbgruppe L auf eine l-Halbgruppe L' mit der guten Arithmetik. Diesem U-Homomorphismus entspricht eine U-Relation $\mathscr{R}$ in L. (Lemma 1.)

Bezeichnen wir der Reihe nach mit $a : b$, $a :: b$ den *Rechts-* und *Linksquotienten von zwei Elementen* $a, b \in L$ (siehe [1], S. 281, oder [3]). Die Existenz von Quotienten ist durch die Maximalbedingung versichert. (Vgl. [5], 3.5.)

Zuerst definieren wir auf M zwei Gruppoide $_MG(\circ)$, $G_M(\odot)$ durch die Formeln

$$a \odot b = a^{\mathscr{R}} :: b\,, \quad a \circ b = a^{\mathscr{R}} : b\,, \quad a, b \in M\,.$$

Ist $\mathscr{G}$ die durch die Gruppoide $_MG(\circ)$, $G_M(\odot)$ bestimmte Q-Relation, so bleibt zu zeigen, daß $U(\mathscr{G}) = \mathscr{R}$ ist. Dazu brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma 2. *Ist $\mathscr{R}$ eine U-Relation, dann gilt $x \equiv y(x^{\mathscr{R}} :: y)\,(\mathscr{R})$, $x \equiv (x^{\mathscr{R}} : y)\, y(\mathscr{R})$ für je zwei Elemente $x \precsim y(\mathscr{R})$.*

Beweis. Es gilt $x \equiv y\, z(\mathscr{R})$ für ein passendes $z \in L$. Daraus folgt $yz \leqq x^{\mathscr{R}}$ und $z \leqq x^{\mathscr{R}} :: y$, also $yz \precsim y(x^{\mathscr{R}} :: y)\,(\mathscr{R})$ und daraus $x \precsim y(x^{\mathscr{R}} :: y)\,(\mathscr{R})$. Andererseits

[4]) In allgemeinem ist die l-Halbgruppe $L/\mathscr{R}$ keine Faktor-l-Halbgruppe von L. Siehe ein Beispiel im weiteren.

gilt $y(x^{\mathscr{R}} :: y) \leqq x^{\mathscr{R}}$, also $y(x^{\mathscr{R}} :: y) \lesseqq x(\mathscr{R})$ und endlich $x \equiv y(x^{\mathscr{R}} :: y)\,(\mathscr{R})$. Die zweite Beziehung ist eine Analogie der ersten.

Weiter *gilt* $b \sim b^{\mathscr{R}}(\mathscr{G})$ *für jedes* $b \in L$. Wirklich, nach Satz C haben wir $b \leqq b^{\mathscr{R}}$ und nach der Konstruktion von $\mathscr{G}$ folgt $b \sim (b \bigcirc b^{\mathscr{R}})\, b^{\mathscr{R}}(\mathscr{G})$, wo $b \bigcirc b^{\mathscr{R}} = b^{\mathscr{R}} : b^{\mathscr{R}} = e$.

Nun ist es möglich an die übrigen Beweise heranzugehen.

(i) *Die Inklusion* $\mathscr{R} \subseteq U(\mathscr{G})$. Es sei $a \lesseqq b(\mathscr{R})$, dann ist $a \leqq b^{\mathscr{R}}$, $a \sim (a \bigcirc b^{\mathscr{R}})\, b^{\mathscr{R}}(\mathscr{G})$. Nach $b \sim b^{\mathscr{R}}(\mathscr{G})$ bekommen wir $a \sim (a \bigcirc b^{\mathscr{R}})\, b(U(\mathscr{G}))$. Weiter haben wir $(a \bigcirc b^{\mathscr{R}})\, b \lesseqq b(\mathscr{G})$, weil $(a \bigcirc b^{\mathscr{R}})\, b \leqq b$ ist. Mit Rücksicht auf die vorstehende Äquivalenz gilt $a \lesseqq b(U(\mathscr{G}))$.

(ii) *Die Inklusion* $U(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{R}$. Es sei $a \lesseqq b(\mathscr{G})$; dann ist entweder $a \leqq b$ und $a \lesseqq b(\mathscr{R})$ oder $a \nleqq b$ und es gibt Elemente $x \leqq y$, so daß (a, b) einem der Paare $(x, y(x^{\mathscr{R}} :: y))$, $(x, (x^{\mathscr{R}} : y)\, y)$, $(y(x^{\mathscr{R}} :: y), x)$, $((x^{\mathscr{R}} : y)\, y, x)$ gleich ist. Nach Lemma 2 gilt in dem letzten Falle $a \sim b(\mathscr{R})$. Also ist $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{R}$ und da $\mathscr{R}$ subnormal ist, bekommen wir $U(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{R}$ w. z. b. w. Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

Für den Beweis des Satzes 2 brauchen wir noch einen Hilfssatz. Bezeichnen wir mit $\mathscr{E}$ die Menge von allen Paaren der Form $(ab, (a \cup b)(a \cap b))$, $((a \cup b)(a \cap b), ab)$, $a, b \in L$.

Lemma 3. *Normalrelationen sind genau diejenigen* U*-Relationen, welche die Relation* $\mathscr{E}$ *umfassen.*

Beweis. Es ist wohlbekannt, daß in jeder l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik die Regel $(a \cup b)(a \cap b) = ab$ gilt. Folglich muß jede Normalrelation die Relation $\mathscr{E}$ umfassen. Es sei $\mathscr{R}$ eine U-Relation, die $\mathscr{E}$ umfasst, und es sei φ der entsprechende U-Homomorphismus von L auf $L/\mathscr{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi((a \cup b)(a \cap b)) &= \varphi(a)\,\varphi(b) = (\varphi(a) \cup \varphi(b))\,\varphi(a \cap b) = \\ &= (\varphi(a) \cup \varphi(b))\,(\varphi(a) \cap \varphi(b))\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$, also ist φ ein Homomorphismus und $\mathscr{R}$ ist eine Normalrelation, w. z. b. w.

Sind ${}_MG$, G_M beliebige Gruppoide und $\mathscr{G}$ die zugehörige Q-Relation, die im Satze 1 benützt wurde, dann ist $U(\mathscr{G} \bigcup \mathscr{E})$ eine Normalrelation. Wirklich, die Relation $\mathscr{G} \bigcup \mathscr{E}$ [= die mengentheoretische Vereinigung von $\mathscr{G}$ und $\mathscr{E}$ in $L \times L$] ist deutlich eine Q-Relation. Damit ist der erste Teil des Satzes 2 bewiesen; der kanonische Homomorphismus $\tilde{\mathfrak{g}}({}_MG, G_M)$ ist durch $L \to L/U(\mathscr{G} \bigcup \mathscr{E})$ gegeben. Der zweite Teil des Beweises ist derselbe wie für den Satz 1.

Der Satz 2 läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Satz 2'. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung erfüllt und auf einer Menge M definiert ist. Dann gibt es eine kanonische Abbildung $\mathfrak{g}$, welche zu je zweien, auf der Menge M definierten Gruppoiden ${}_MG$, G_M, genau eine Faktor-l-Halbgruppe $\mathfrak{g}({}_MG, G_M) = \bar{L}$ von L mit der guten Arithmetik zuordnet.*

Ist $\bar{L}$ eine Faktor-l-Halbgruppe von L, in der die gute Arithmetik gilt, dann lassen sich auf kanonische Weise zwei solche Gruppoide $_MG, G_M$ bestimmen, daß $\mathfrak{g}({}_MG, G_M) \cong \bar{L}$ gilt.

Fügen wir noch einige *Bemerkungen* hinzu:

Bemerkung 1. *Sind $_MG(\bigcirc), G_M(\odot)$ solche Gruppoide, daß*

$$(*) \qquad a \odot b \leqq a :: b\,, \quad a \bigcirc b \leqq a :: b \quad \text{für je zwei} \quad a \leqq b \in L \quad \text{ist}\,,$$

dann ist der nach Satz 1 konstruierte U*-Homomorphismus ein Homomorphismus.* Wirklich, bezeichnen wir mit $_MG^0, G_M^0$ die Gruppoide, welche durch die Formeln $a \odot b = a :: b$, $a \bigcirc b = a : b$, $a, b \in L$, definiert sind und es sei $\mathscr{P}_L$ die entsprechende Q-Relation. Dann ist nach [5], 3.7 und 4.14, $U(\mathscr{P}_L)$ eine Normalrelation und nach Lemma 3 ist auch jede $\mathscr{P}_L$ umfassende U-Relation eine Normalrelation. Aber es ist leicht nachzusehen, daß jede zwei Gruppoide, welche (*) erfüllen, eben eine solche U-Relation erzeugen.

In [5] wurde die Normalrelation $U(\mathscr{P}_L)$ mit $\mathscr{W}_L$ bezeichnet. $\mathscr{W}_L$ ist gleich dem Durchschnitt von allen sog. *Waerdenschen Relationen* und ist für Anwendungen auf die multiplikative Idealtheorie nützlich.

Bemerkung 2. *Erfüllt die l-Halbgruppe L die Regel $(a \cup b)(a \cap b) = ab$, dann ist jeder* U*-Homomorphismus von L auf eine l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik ein Homomorhismus.* Der Beweis ist demjenigen von Lemma 3 ähnlich. Beispiele:

a) *l*-Halbgruppen mit der guten Arithmetik.

b) Einfach geordnete *l*-Halbgruppen.

c) Die *l*-Halbgruppe *L* aus dem Beispiel 1, [5].

Bemerkung 3. Wir zeigen nun ein Beispiel, aus dem hervorgeht, daß in einer ganzen *l*-Halbgruppe mit der Maximalbedingung nicht alle U-Relationen normal zu sein brauchen. Betrachten wir einen Verband, der dem folgenden Schema nach gebildet wird:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & A_1 \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dr] & & A_3 \ldots \\
E \arrow[r] & P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & B_1 \arrow[ur] & & B_2 \arrow[ur] & & B_3 \ldots
\end{tikzcd}$$

Die Pfeile ersetzen dabei die Zeichen $\geqq$.

Der Verband L wird zu einer ganzen *l*-Halbgruppe mit der Maximalbedingung, wenn wir darin die folgende kommutative Multiplikation einführen:

$$A_r \,.\, B_s = A_r \,.\, P_s = B_r \,.\, P_s = P_r \,.\, P_s = P_{r+s}\,, \quad A_r \,.\, A_s = A_{r+s}\,, \quad B_r \,.\, B_s = B_{r+s}$$
$$E \,.\, X = X \,.\, E = X$$

für ein beliebiges $X \in L$. (Die l-Halbgruppe L ist offensichtlich endlich erzeugbar.) Die Abbildung $\varphi : \varphi(E) = E$, $\varphi(A_k) = \varphi(B_k) = \varphi(P_k) = P_k$ ist ein U-Homomorphismus von L auf ihre zyklische Unter-l-Halbgruppe, aber kein Homomorphismus.

Nun wollen wir noch eine andere Definition der kanonischen Abbildung $\mathfrak{g}$ von Satz 2′ geben. Diese neue Definition erfordert die Hilfsätze 1,3 und Satz B nicht.

Lemma 4. *Es sei $\mathscr{R}$ eine Q-Relation und $\mathscr{H} \supseteq \mathscr{R}$ eine transitive und konjunktive Relation. Dann ist $\mathscr{H}$ eine Q-Relation.*

Beweis. Es sei $a \lesssim b(\mathscr{H})$. Wegen $a \cap b \leqq b$ folgt $a \cap b \lesssim b(\mathscr{R})$ und daraus $a \cap b \sim bc(\mathscr{R})$, $a \cap b \sim db(\mathscr{R})$ für passende $c, d \in L$. Nach der Konjunktivität von $\mathscr{H}$ gilt $a \cap b \lesssim a \lesssim a \cap b(\mathscr{H})$ und nach der Transitivität folgt $a \equiv a \cap b \equiv \equiv bc \equiv db(\mathscr{H})$, w. z. b. w.

K-Relation nennen wir jede subnormale und konjunktive Relation. (Man sieht leicht, daß eine K-Äquivalenz dasselbe wie eine reguläre Kongruenz der l-Halbgruppe L ist.) Der Durchschnitt $K(\mathscr{R})$ aller K-Relationen, welche eine Relation $\mathscr{R}$ umfassen, ist wieder eine K-Relation, welche wir die *K-Hülle von $\mathscr{R}$* nennen. Aus Lemma 4 folgt unmittelbar der

Satz D. *Die K-Hülle einer Q-Relation ist wieder eine Q-Relation und folglich eine Normalrelation.*

Sind ${}_MG$, G_M zwei Gruppoide auf M und $\mathscr{G}$ die entsprechende Q-Relation, dann haben wir $K(\mathscr{G}) = U(\mathscr{G} \bigcup \mathscr{E}) =$ *die kleinste, $\mathscr{G}$ umfassende, normale Relation.* Nach unserer neuen Definition haben wir $\mathfrak{g}({}_MG, G_M) : L \to L/K(\mathscr{G})$.[5]).

*

Nun wollen wir noch zeigen, wie die kanonische Abbildung $\mathfrak{g}$ auf den Kongruenzen von L operiert, und das System von Normalkongruenzen in L näher beschreiben. Setzen wir wieder die Maximalbedingung in L voraus. Es sei $\mathscr{R}$ eine transitive und disjunktive Relation, welche die Ordnungsrelation $\{\leqq\}$ enthält. Dann ist die zugehörige symetrische Relation $\mathscr{R}^s$ eine Äquivalenz, $\mathscr{R}^s = (\equiv\mathscr{R})$. Bei dem Übergang von $\mathscr{R}$ zu $(\equiv\mathscr{R})$ wird die Disjunktivität, Stabilität, Regularität oder Konjunktivität nicht gestört. Andererseits sei $\mathscr{K}$ eine disjunktive Äquivalenz in L und bezeichen wir mit $(\leqq\mathscr{K})$ eine solche Relation, daß $a \lesssim b(\leqq \mathscr{K})$ genau dann gilt, wenn $a \cup b \equiv \equiv b(\mathscr{K})$ ist.

---

[5]) Im kommutativen Falle ist der Ausdruck $U(\mathscr{G} \bigcup \mathscr{E})$ in einem gewissen Sinne einfacher als der Ausdruck $K(\mathscr{G})$, denn die subnormale Hülle einer Relation läßt sich durch endlichviele „elementare“ Erweiterungen bilden (vgl. [5]).

Lemma 5. *Es sei $\mathscr{K}$ eine disjunktive Äquivalenz. Dann gilt:*

a) Die Relation $(\leqq\mathscr{K})$ umfasst die Ordnungsrelation $\{\leqq\}$.
b) $(\leqq\mathscr{K})$ ist transitiv.
c) $(\leqq\mathscr{K})$ ist disjunktiv.
d) Ist $\mathscr{K}$ stabil, so ist $(\leqq\mathscr{K})$ stabil.
e) Ist $\mathscr{K}$ regulär, so ist $(\leqq\mathscr{K})$ regulär.
f) Ist $\mathscr{K}$ konjunktiv, so ist $(\leqq\mathscr{K})$ konjunktiv.

Beweis. *a*), *c*), *d*), *e*) sind fast trivial.

ad *b*): ist $a \cup b \equiv b(\mathscr{K})$, $b \cup c \equiv c(\mathscr{K})$, dann ist $a \cup c \equiv a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \equiv b \cup c \equiv c(\mathscr{K})$.

ad *f*): Es sei $a \lesssim b(\leqq\mathscr{K})$, $c \in L$. Dann gilt $a \cup b \equiv b(\mathscr{K})$, $(a \cap c) \cup (b \cap c) \equiv (a \cap c) \cup [(a \cup b) \cap c] = (a \cup b) \cap c \equiv b \cap c(\mathscr{K})$ und folglich $a \cap c \lesssim b \cap c(\leqq\mathscr{K})$.

Lemma 6. *Vorausgesetzt, daß $\mathscr{R}$ und $\mathscr{K}$ dieselbe Bedeutung wie oben haben, gilt:*

a) die Operationen $\mathscr{R} \to (\equiv\mathscr{R})$, $\mathscr{K} \to (\leqq\mathscr{K})$ sind inklusions-erhaltend,
b) es gilt $(\equiv(\leqq\mathscr{K})) = \mathscr{K}$, $(\leqq(\equiv\mathscr{R})) = \mathscr{R}$.

Der Beweis ist leicht und wird dem Leser übergelassen.

Normalkongruenz nennen wir eine solche Kongruenz $\mathscr{N}$ der l-Halbgruppe L, daß in der Faktor-l-Halbgruppe $L/\mathscr{N}$ die gute Arithmetik gilt. Ist $\mathscr{N}$ eine Normalkongruenz, dann ist $(\leqq\mathscr{N})$ eine Normalrelation, und ist $\mathscr{R}$ eine Normalrelation, dann ist $(\equiv\mathscr{R})$ eine Normalkongruenz (Satz A). Jede Normalkongruenz ist offenbar eine K-Relation. Das System $\mathfrak{N}$ von allen Normalkongruenzen werden wir immer als eine der Inklusion nach geordnete Menge betrachten.

Es sei $\varphi : L \to L'$ ein Homomorphismus von l-Halbgruppen. Bezeichnen wir mit φ^* die induzierte Abbildung $L \times L \to L' \times L'$, wo $\varphi^*(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b))$ für $a, b \in L$ ist. Dann gehört zu jeder Relation $\mathscr{R} \subseteq L \times L$ ihr Bild $\varphi^*(\mathscr{R}) \subseteq L' \times L'$ und zu jeder Relation $\mathscr{R}' \subseteq L' \times L'$ gehört ihr (volles) Urbild $\varphi^{*-1}(\mathscr{R}') \subseteq L \times L$.

Satz 3. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, die der Maximalbedingung genügt.*

(i) *Die kanonische Abbildung $\mathfrak{g}$ aus dem Satze 2′ induziert eine kanonische Abbildung $\mathfrak{h}$, die jeder Kongruenz $\mathscr{E}$ von L eine Normalkongruenz $\mathfrak{h}(\mathscr{E}) \supseteq \mathscr{E}$ zuordnet.*

(ii) *Die Beschränkung von $\mathfrak{h}$ auf das Teilsystem $\mathfrak{N}$ aller Normalkongruenzen von L ist eine identische Abbildung.*

(iii) *Es sei $\mathscr{E}$ eine Kongruenz in L und φ der kanonische Homomorphismus $\varphi : L \to L/\mathscr{E} = L^\wedge$. Dann ist $\mathfrak{h}(\mathscr{E}) = \varphi^{*-1}(\equiv\mathscr{W}_{L^\wedge})$. ($\mathscr{W}_{L^\wedge} = U(\mathscr{P}_{L^\wedge})$ ist der Durchschnitt von allen Waerdenschen Relationen von $L^\wedge$; siehe Bemerkung* 1).

Wir senden einige Hilfssätze voraus.

Lemma 7. *Es sei* $\mathscr{E}^0$ *eine Kongruenz in* L, $\varphi : L \to L/\mathscr{E}^0$ *der kanonische Homomorphismus. Dann ist für jede Kongruenz* $\mathscr{E} \supseteq \mathscr{E}^0$ $\varphi^{*-1}(\varphi^*\mathscr{E}) = \mathscr{E}$.

Lemma 8. *Ist unter gleichen Voruassetzungen wie in Lemma 7.* $\mathscr{E} \supseteq \mathscr{E}^0$ *eine Normalkongruenz, so ist* $\varphi^*(\mathscr{E})$ *eine Normalkongruenz in* $L/\mathscr{E}^0$. *Ist* $\mathscr{E}'$ *eine Normalkongruenz in* $L/\mathscr{E}^0$, *so ist* $\varphi^{*-1}(\mathscr{E}') \supseteq \mathscr{E}^0$ *eine Normalkongruenz in* L.

Beweise werden dem Leser übergelassen. Das Lemma 8 muß man zuerst für *Normalrelationen* beweisen und dann können die Operatoren aus dem Lemma 6 benutzt werden.

Lemma 9. *Es sei* $\mathscr{E}^0$ *eine Kongruenz in* L, $\varphi : L \to L/\mathscr{E}^0$ *der kanonische Homomorphismus; setzen wir* $\mathscr{H} = (\leqq \mathscr{E}^0)$. *Dann gilt für je zwei Elemente* $a, b \in L$

$$\varphi(a^{\mathscr{H}} : b) = \varphi(a) : \varphi(b)\,, \quad \varphi(a^{\mathscr{H}} :: b) = \varphi(a) :: \varphi(b)\,.$$

Beweis. Setzen wir $u = a^{\mathscr{H}} : b$, $\bar{v} = \varphi(a) : \varphi(b)$. Da u und $\bar{v}$ Quotienten sind, haben wir $x \leqq u \Leftrightarrow xb \leqq a^{\mathscr{H}}$ in L, $\bar{x} \leqq \bar{v} \Leftrightarrow \bar{x}\,\varphi(b) \leqq \varphi(a)$ in $L/\mathscr{E}^0$. Einerseits ist $\varphi(u)\,\varphi(b) = \varphi(ub) \leqq \varphi(a^{\mathscr{H}}) = \varphi(a)$, also ist $\varphi(u) \leqq \bar{v}$. Andererseits sei $v \in L$, $\varphi(v) = \bar{v}$. Dann ist $\varphi(vb) = \varphi(v)\,\varphi(b) = \bar{v}\,\varphi(b) \leqq \varphi(a)$ und daraus $vb \lesssim a(\mathscr{H})$, also ist $vb \leqq \leqq a^{\mathscr{H}}$ und $v \leqq a^{\mathscr{H}} : b = u$. Hieraus folgt $\bar{v} \leqq \varphi(u)$. Damit ist die erste Formel bewiesen; die andere folgt der Symmetrie nach.

Beweis des Satzes 3. Definieren wir zuerst eine kanonische Abbildung $\mathfrak{m}$, welche jeder Kongruenz $\mathscr{E}$ von L ein Paar von Gruppoiden ${}_MG(\bigcirc)$, $G_M(\odot)$ zuordnet. Zu diesem Zwecke setzen wir $\mathscr{H} = (\leqq \mathscr{E})$, $a \bigcirc b = a^{\mathscr{H}} : b$, $a \odot b = a^{\mathscr{H}} :: b$, für je zwei $a, b \in L$. (Vgl. die zweite Hälfte des Beweises von Satz 1.) Es sei $\mathfrak{j}$ die kanonische Abbildung, welche jeder Faktor-l-Halbgruppe von L die zugehörige Kongruenz zuordnet. Dann wird die kanonische Abbildung $\mathfrak{h}$ durch $\mathfrak{h} = \mathfrak{j} \circ \mathfrak{g} \circ \mathfrak{m}$ definiert. Ähnlich wie im Beweise des Satzes 1 (vgl. die Punkte (i) und (ii) am Ende des erwähnten Beweises auf der Seite 6) bekommen wir die Inklusion $h(\mathscr{E}) \supseteq \mathscr{E}$ und auch den zweiten Teil des Satzes 3.

Es bleibt die Behauptung (iii) zu beweisen. Setzen wir $\mathscr{H} = (\leqq \mathscr{E})$. Es sei $\mathscr{G}$ die Relation aller Paare der Form (a, b), $(a, b(a^{\mathscr{H}} :: b))$, $(b(a^{\mathscr{H}} :: b), a)$, $(a, (a^{\mathscr{H}} : b)\, b)$, $((a^{\mathscr{H}} : b)\, b, a)$, wo $a \leqq b \in L$ ist. Dann haben wir offenbar $\mathfrak{h}(\mathscr{E}) = (\equiv K(\mathscr{G}))$ (siehe Satz D). Bemerken wir weiter, daß die Relation $\mathscr{P}_{L^\wedge}$ genau durch alle Paare der Form $(\hat{a}, \hat{b})$, $(\hat{a}, \hat{b}(\hat{a} :: \hat{b}))$, $(\hat{b}(\hat{a} :: \hat{b}), \hat{a})$, $(\hat{a}, (\hat{a} : \hat{b})\, \hat{b})$, $((\hat{a} : \hat{b})\, \hat{b}, \hat{a})$, $\hat{a} \leqq \hat{b} \in L^\wedge$ gebildet wird. Wir führen den Beweis in einigen Schritten durch.

a) Es gilt $\varphi^{*-1}(\mathscr{P}_{L^\wedge}) \subseteq K(\mathscr{G})$. Wirklich, es seien $a, b \in L$ solche Elemente, daß $\varphi(a) \lesssim \varphi(b)\,(\mathscr{P}_{L^\wedge})$. Dann ist entweder $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$, also $a \lesssim b(\mathscr{H})$ und $a \lesssim b(K(\mathscr{G}))$, oder gibt es Elemente $\hat{c} \leqq \hat{d} \in L^\wedge$ so daß, z. B., $\varphi(a) = \hat{c}$, $\varphi(b) = \hat{d}(\hat{c} :: \hat{d})$ ist.

Wählen wir $c \in \varphi^{-1}(\hat{c})$, $d \in \varphi^{-1}(\hat{d})$. Dann ist $\varphi(c) \leqq \varphi(d)$, also $c \precsim d(\mathscr{H})$ und $c \leqq \leqq d^{\mathscr{H}} \in \varphi^{-1}(\hat{d})$. Nach dem Lemma 9 folgt $\varphi(c^{\mathscr{H}} :: d^{\mathscr{H}}) = \hat{c} :: \hat{d}$, also $\varphi(a) = \varphi(c)$, $\varphi(b) = \varphi(d^{\mathscr{H}})\,\varphi(c^{\mathscr{H}} :: d^{\mathscr{H}}) = \varphi[d^{\mathscr{H}}(c^{\mathscr{H}} :: d^{\mathscr{H}})]$. Wegen $c \leqq d^{\mathscr{H}}$ haben wir $c \sim \sim d^{\mathscr{H}}(c^{\mathscr{H}} :: d^{\mathscr{H}})\,(\mathscr{G})$ und aus der Äquivalenz $a \equiv c(\mathscr{E})$, $b \equiv d^{\mathscr{H}}(c^{\mathscr{H}} :: d^{\mathscr{H}})\,(\mathscr{E})$ folgt $a \equiv b(K(\mathscr{G}))$. Gleichfalls werden die anderen Möglichkeiten erörtert.

b) *Es gilt* $\varphi^{*-1}(\mathscr{P}_{L^{\wedge}}) \supseteq \mathscr{G}$. Wirklich, es seien $a \precsim b(\mathscr{G})$, dann ist entweder $a \leqq b$, also $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$; oder gibt es Elemente $c \leqq d$ so daß, z. B., $a = c$, $b = = d(c^{\mathscr{H}} : d)$ ist. (Der Verlauf des Beweises ist in den übrigen Fällen derselbe.) Dann ist $\varphi(a) = \varphi(c)$, $\varphi(b) = \varphi(d)\,\varphi(c^{\mathscr{H}} : d) = \varphi(d)\,[\varphi(c) : \varphi(d)]$ (Lemma 9). Hieraus bekommen wir $\varphi(a) \sim \varphi(b)\,(\mathscr{P}_{L^{\wedge}})$. In jedem Falle bekommen wir $\varphi(a) \precsim \varphi(b)\,(\mathscr{P}_{L^{\wedge}})$, w. z. b. w.

Nach a) bekommen wir $\varphi^*(K(\mathscr{G})) \supseteq \mathscr{P}_{L^{\wedge}}$. Also ist $\varphi^*(K(\mathscr{G}))$ eine $\mathscr{P}_{L^{\wedge}}$ enthaltende Normalrelation und hieraus folgt $\varphi^*(K(\mathscr{G})) \supseteq \mathscr{W}_{L^{\wedge}}$. Nach Lemma 7 folgt $K(\mathscr{G}) \supseteq \varphi^{*-1}(\mathscr{W}_{L^{\wedge}})$. Andererseits haben wir nach b) $\mathscr{G} \subseteq \varphi^{*-1}(\mathscr{P}_{L^{\wedge}})$, also $\mathscr{G} \subseteq \varphi^{*-1}(\mathscr{W}_{L^{\wedge}})$ und $K(\mathscr{G}) \subseteq \varphi^{*-1}(\mathscr{W}_{L^{\wedge}})$, da $\varphi^{*-1}(\mathscr{W}_{L^{\wedge}})$ eine Normalrelation ist (vgl. Lemma 8). Damit ist die Gleichheit $K(\mathscr{G}) = \varphi^{*-1}(\mathscr{W}_{L^{\wedge}})$ bewiesen, woraus die Behauptung (iii) folgt.

Bemerkung 4. Wenn $\mathscr{E}^0$ die Gleichheitsrelation in L ist, d. h. $a \equiv b(\mathscr{E}^0) \Leftrightarrow a = b$, so haben wir $\mathfrak{h}(\mathscr{E}^0) = (\equiv \mathscr{W}_L)$.

Bemerkung 5. Die Abbildung $\mathfrak{h}$ ist im allgemeinen nicht monoton. Wirklich, im Beispiel 1 von [5] wurde eine ganze l-Halbgruppe L konstruiert, so daß a) die Relation $\mathscr{W}_L$ trivial ist, $\mathscr{W}_L = L \times L$, b) es nicht-triviale Normalrelationen in L gibt. Nun genügt es die Bemerkung 4 und Satz 3, Punkt (ii), benützen.

Satz 4. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe mit der Maximalbedingung. Dann ist das System $\mathfrak{N}$ aller Normalkongruenzen ein vollständiger $\cup$-Halbverband.*

Beweis. Es sei $\{\mathscr{N}_\alpha\}$, $\alpha \in I$, eine Menge von Normalkongruenzen, dann sind $(\leqq \mathscr{N}_\alpha)$, $\alpha \in I$, Normalrelationen und $\mathscr{S} = \bigcup_{\alpha \in I} (\leqq \mathscr{N}_\alpha)$ ist offenbar eine Q-Relation. Nach dem Satz D ist $K(\mathscr{S})$ eine Normalrelation und folglich ist $(\equiv K(\mathscr{S}))$ eine Normalkongruenz. Mit Rücksicht auf Lemma 6 ist $(\equiv K(\mathscr{S}))$ die kleinste Normalkongruenz, welche die Vereinigung $\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{N}_\alpha$ enthält, w. z. b. w.

Bemerkung 6. *Das System $\mathfrak{N}$ ist im allgemeinen kein Verband* – vgl. Beispiel 1 aus [5].

Es sei nun $\{\mathscr{K}_\delta\}$, wo δ eine Indexmenge I durchläuft, ein System von Äquivalenzen in L. *Das transitive Produkt* $\prod \mathscr{K}_\delta$ der Äquivalenzen $\mathscr{K}_\delta$ ist eine Äquivalenz $\mathscr{K}$, die fogendermaßen bestimmt ist: $a \equiv b(\mathscr{K})$ dann und nur dann, wenn es Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in L$ und Äquivalenzen $\mathscr{K}_{\delta_1}, \ldots, \mathscr{K}_{\delta_n}$ mit $\delta_i \in I$ gibt, so daß

$$a \equiv c_1(\mathscr{K}_{\delta_1}), \ldots, c_{i-1} \equiv c_i(\mathscr{K}_{\delta_i}), \ldots, c_{n-1} \equiv b(\mathscr{K}_{\delta_n})$$

ist. Das System $\mathfrak{E}$ aller Äquivalenzen in L bildet hinsichtlich seiner Anordnung nach der Inklusion in $L \times L$ einen vollständigen Verband, wobei (vgl. [2])

$$(4) \qquad \inf_{\mathfrak{E}} \{\mathscr{K}_\delta\} = \bigcap \mathscr{K}_\delta\,, \quad \sup_{\mathfrak{E}} \{\mathscr{K}_\delta\} = \prod \mathscr{K}_\delta\,, \quad \delta \in I\,,$$

ist.

Es sei L eine l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik und $\mathscr{N}$ eine ihre Normalkongruenz. Bezeichnen wir mit φ die natürliche Abbildung $L \to L/\mathscr{N} = \bar{L}$. Es sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller Primelemente von L, setzen wir weiter $\alpha(\mathscr{N}) = \mathfrak{P} \cap \varphi^{-1}(\bar{e})$, $\beta(\mathscr{N}) = \mathfrak{P} - \alpha(\mathscr{N})$, $\bar{e}$ bedeutet das Einselement der l-Halbgruppe $\bar{L}$. Wenn $p_1, p_2 \in \beta(\mathscr{N})$ ist, dann sind $\bar{p}_1 = \varphi(p_1)$, $\bar{p}_2 = \varphi(p_2)$ Primelemente in $\bar{L}$. Aus $p_1 \cup p_2 = e$ folgt $\bar{p}_1 \cup \bar{p}_2 = \bar{e}$, also $p_1 \neq p_2$ gibt $\bar{p}_1 \neq \bar{p}_2$. Ist umgekehrt $\varphi(a)$ ein Primelement in $\bar{L}$, dann ist $a^{\mathscr{N}} \in \beta(\mathscr{N})$. ([5], 4.11.) Wie sich hieraus leicht erkennen läßt, ist φ ein Isomorphismus der l-Halbgruppe $L' \subseteq L$, die durch die Primelemente $p \in \beta(\mathscr{N})$ erzeugt ist, auf die Faktor-l-Halbgruppe $\bar{L}$. Es gilt offensichtlich $a \equiv b(\mathscr{N})$ genau dann, wenn $ap_1^{k_1}p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} = bp_1'^{m_1}p_2'^{m_2} \ldots p_s'^{m_s}$ für passende Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $p_1', p_2', \ldots, p_s' \in \alpha(\mathscr{N})$ gilt oder genau dann, wenn jedes Primelement $p \in \beta(\mathscr{N})$ in derselben Potenz in der Primfaktorzerlegung von a und b auftritt. Hieraus sieht man, daß für zwei Normalkongruenzen die Inklusionen $\mathscr{N}_1 \subseteq \mathscr{N}_2$ und $\alpha(\mathscr{N}_1) \subseteq \alpha(\mathscr{N}_2)$ gleichbedeutend sind. α ist dann ein Isomorphismus zwischen der halbgeordneten Menge $\mathfrak{N}$ von allen Normalkongruenzen und zwischen der vollständigen Boolschen Algebra aller Teilmengen der Menge $\mathfrak{P}$, daher ist $\mathfrak{N}$ eine vollständige Boolsche Algebra.

Wir wollen weiter zeigen, daß für jede Menge $\{\mathscr{N}_\delta\}$, $\delta \in I$ von Normalkongruenzen in L $\alpha^{-1}[\bigcap \alpha(\mathscr{N}_\delta)] = \bigcap \mathscr{N}_\delta$, $\alpha^{-1}[\bigcup \alpha(\mathscr{N}_\delta)] = \prod \mathscr{N}_\delta$ gilt. Vorerst sind die Formeln $\bigcap \mathscr{N}_\delta \supseteq \alpha^{-1}[\bigcap \alpha(\mathscr{N}_\delta)]$, $\prod \mathscr{N}_\delta \subseteq \alpha^{-1}[\bigcup \alpha(\mathscr{N}_\delta)]$ klar. Ist nun $a \equiv b(\bigcap \mathscr{N}_\delta)$, dann treten alle Primelemente $p \in \bigcup \beta(\mathscr{N}_\delta) = \mathfrak{P} - \bigcap \alpha(\mathscr{N}_\delta)$ in derselben Potenz in der Primfaktorzerlegungen von a und b auf, folglich ist $a \equiv b(\alpha^{-1}[\bigcap \alpha(\mathscr{N}_\delta)])$. Es sei $a \equiv b[\alpha^{-1} \bigcup \alpha(\mathscr{N}_\delta)]$, d. h. $ap_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} = bp_{r+1}'^{k_{r+1}} \ldots p_s'^{k_s}$ für passende $p_1, \ldots, p_{r+s} \in \bigcup \alpha(\mathscr{N}_\delta)$. Setzen wir voraus, daß $p_i \in \alpha(\mathscr{N}_{\delta_i})$ für $i = 1, 2, \ldots, r + s$ ist. Dann gilt offenbar $a \equiv b(\prod \mathscr{N}_{\delta_i})$, $i = 1, \ldots, r + s$, also $a \equiv b(\prod \mathscr{N}_\delta)$, $\delta \in I$. Damit ist der Beweis beendet. Wir bekommen das

Lemma 10. *Es sei L eine l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik. Dann ist das System $\mathfrak{N}$ aller Normalkongruenzen in L eine vollständige Boolsche Algebra, wobei*

$$(5) \qquad \inf_{\mathfrak{N}} \{\mathscr{N}_\delta\} = \bigcap \mathscr{N}_\delta\,, \quad \sup_{\mathfrak{N}} \{\mathscr{N}_\delta\} = \prod \mathscr{N}_\delta$$

für jedes Teilsystem $\{\mathscr{N}_\delta\}$, $\delta \in I$, von $\mathfrak{N}$ ist.

Es sei L wieder eine ganze l-Halbgruppe mit der Maximalbedingung.

Lemma 11. *Sind $\mathscr{N}' \supseteq \mathscr{N}$ zwei Normalkongruenzen in L, welche dieselbe Einheitsklasse haben, dann ist $\mathscr{N}' = \mathscr{N}$.*

Beweis. Bezeichnen wir φ den kanonischen Homomorphismus $L \to L/\mathcal{N}$. Dann ist $\varphi^*(\mathcal{N}')$ eine Normalkongruenz in $L/\mathcal{N}$ (Lemma 8), welche dieselbe Einheitsklasse wie $\varphi^*(\mathcal{N})$, die Gleichheitsrelation von $L/\mathcal{N}$, hat. Also haben wir $\alpha[\varphi^*\mathcal{N}'] = \alpha[\varphi^*\mathcal{N}] = \emptyset$ und daher $\varphi^*(\mathcal{N}') = \varphi^*(\mathcal{N})$, denn α ist ein-eindeutig. (Vgl. den Beweis von Lemma 10.) Nach Lemma 7 haben wir $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$, w. z. b. w.

Ganz einfach lassen sich die folgenden Formeln ableiten: ist $\{\bar{N}_\delta\}$, $\delta \in I$, eine Menge von Normalkongruenzen in $\bar{L}$, dann gilt

$$\varphi^{*-1}[\bigcap \overline{\mathcal{N}}_\delta] = \bigcap \varphi^{*-1}(\overline{\mathcal{N}}_\delta) \tag{6}$$

$$\varphi^{*-1}[\prod \overline{\mathcal{N}}_\delta] = \prod \varphi^{*-1}(\overline{\mathcal{N}}_\delta) \tag{7}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(\mathcal{N})$ das System von allen Normalkongruenzen, welche eine feste Normalkongruenz $\mathcal{N}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{N}(\mathcal{N}) = \mathfrak{N}'$, wie die Formeln (5), (6), (7) zeigen, ein vollständiger Verband, wobei gilt: $\inf_{\mathfrak{N}'} \{\mathcal{N}_\delta\} = \bigcap \mathcal{N}_\delta$, $\sup_{\mathfrak{N}'} \{\mathcal{N}_\delta\} = \prod \mathcal{N}_\delta$ für jedes Teilsystem $\{\mathcal{N}_\delta\}$, $\delta \in I$, von $\mathfrak{N}'$. Nach Lemma 10 und nach der Formel (4) bekommen wir den folgenden Satz:

Satz 5. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, in der die Maximalbedingung gilt und es sei $\mathfrak{E}$ der vollständige Verband aller Äquivalenzen in L. Es sei $\mathcal{N}$ eine Normalkongruenz in L und $\mathfrak{N}(\mathcal{N})$ das halbgeordnete System von allen Normalkongruenzen, die $\mathcal{N}$ umfassen. Dann ist $\mathfrak{N}(\mathcal{N})$ eine Boolsche Algebra und gleichzeitig ein vollständiger Teilverband des Verbands $\mathfrak{E}$. Verschiedene Normalkongruenzen aus $\mathfrak{N}(\mathcal{N})$ haben verschiedene Einheitsklassen.*

Folgerung 1. *Ist das System $\mathfrak{N}$ aller Normalkongruenzen in L nach unten gerichtet (d. h. in dem Durchschnitt von je zwei Normalkongruenzen liegt eine dritte Normalkongruenz), so ist $\mathfrak{N}$ ein Teilverband des Verbands $\mathfrak{E}$ und verschiedene Normalkongruenzen haben verschiedene Einheitsklassen.*

Folgerung 2. *Gibt es in L eine kleiste Normalkongruenz, so ist $\mathfrak{N}$ eine Boolsche Algebra und ein vollständiger Teilverband des Verbands $\mathfrak{E}$.*

Bemerkung 7. Nach Satz 4 ist $\mathfrak{N}$ immer ein vollständiger U-Halbverband, aber *im allgemeinen ist $\mathfrak{N}$ kein U-Teilhalbverband von $\mathfrak{E}$.* Nehmen wir z. B. die Normalrelationen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ aus dem Beispiel 1, [5]; die Äquivalenz $\prod(\equiv\mathcal{N}_1, \equiv\mathcal{N}_2)$ erzeugt auf L die Klasseneinteilung $\{e\}$, $L - \{e\}$, folglich ist $\prod(\equiv\mathcal{N}_1, \equiv\mathcal{N}_2)$ keine Normalkongruenz.

Man sagt, *daß in einer l-Halbgruppe die eingeschränkte Minimalbedingung gilt,* wenn jede absteigende Kette der Form $a_1 > a_2 > \ldots \geqq a$ endlich ist. (Bemerken wir, daß L der Voraussetzung nach kein Nullelement enthält.) Eine äquivalente Forderung besagt, daß *jede nach unten beschränkte Kette von Elementen von L wohlgeordnet ist.*

Satz 6. *Es sei L eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung und die eingeschränkte Minimalbedingung erfüllt. Dann enthält jede Normalkongruenz $\mathcal{N}$ von L eine minimale Normalkongruenz. Das System $\mathfrak{N}$ aller Normalkongruenzen in L ist eine Vereinigung von maximalen Verbänden $\mathfrak{S}_\delta$, welche den Minimalelementen des Systems $\mathfrak{N}$ eindeutig entsprechen. Jeder Verband $\mathfrak{S}_\delta$ ist eine Boolsche Algebra und dabei ein vollständiger Teilverband des vollständigen Verbandes $\mathfrak{E}$ aller Äquivalenzen.*

Beweis. Es sei I eine einfach geordnete Menge von Indexen und $\{\mathscr{R}_\delta\}$, $\delta \in I$, eine Menge von Normalrelationen, so daß für $\alpha > \beta \in I$ immer $\mathscr{R}_\alpha \supset \mathscr{R}_\beta$ gilt. Setzen wir $\hat{\mathscr{R}} = \bigcap_{\delta \in I} \mathscr{R}_\delta$. Dann ist $\hat{\mathscr{R}}$ eine K-Relation, welche die Ordnungsrelation $\{\leqq\}$ enthält. Es seien $a \leqq b(\hat{\mathscr{R}})$. Für $\alpha \geqq \beta \in I$ gilt $a^{\mathscr{R}_\alpha} \geqq a^{\mathscr{R}_\beta} \geqq a$ und *die Menge der Elementen der Familie* $\langle a^{\mathscr{R}_\delta} \rangle$, $\delta \in I$, ist eine nach unten beschränkte Kette. Nach der eingeschränkten Minimalbedingung gibt es einen Index $\varepsilon \in I$ so, daß $a^{\mathscr{R}_\varepsilon} \leqq a^{\mathscr{R}_\delta}$ für alle $\delta \in I$ ist. Da die Relationen $\mathscr{R}_\delta$ normal sind, haben wir nach Lemma 2

$$a \equiv b(a^{\mathscr{R}_\delta} :: b)(\mathscr{R}_\delta)\,, \quad a \equiv (a^{\mathscr{R}_\delta} : b)\, b(\mathscr{R}_\delta)\,, \quad \delta \in I\,.$$

Betrachten wir die Äquivalenzen

$$(\Delta_\delta) \qquad a \equiv b(a^{\mathscr{R}_\varepsilon} :: b)(\mathscr{R}_\delta)\,, \quad a \equiv (a^{\mathscr{R}_\varepsilon} : b)\, b(\mathscr{R}_\delta)\,, \quad \delta \in I\,.$$

(Δ_ε) ist offensichtlich erfüllt. Für $\delta > \varepsilon$ haben wir nun $\mathscr{R}_\delta \supset \mathscr{R}_\varepsilon$ und für $\delta < \varepsilon$ $a^{\mathscr{R}_\delta} = a^{\mathscr{R}_\varepsilon}$ wegen der Minimaleigenschaft von $a^{\mathscr{R}_\varepsilon}$. Daher sehen wir schon leicht, daß (Δ_δ) *für jedes* $\delta \in I$ *gültig ist*; also ist $a \equiv b(a^{\mathscr{R}_\varepsilon} :: b)(\hat{\mathscr{R}})$, $a \equiv (a^{\mathscr{R}_\varepsilon} : b)\, b(\hat{\mathscr{R}})$. Folglich ist $\hat{\mathscr{R}}$ eine Q-Relation und damit eine Normalrelation.

Wenn wir zu Normalkongruenzen übergehen, so folgt aus dem vorhergehenden, daß jede Kette von $\mathfrak{N}$ nach unten beschränkt ist. Nach dem Lemma von Kuratowski-Zorn hat das System $\mathfrak{N}$ und auch jedes seiner Ordnungsideale ein minimales Element. Besonders gilt: jede Normalkongruenz enthält eine minimale Normalkongruenz.

Die Boolsche Algebra von allen Normalkongruenzen, welche eine gegebene minimale Normalkongruenz enthalten (Satz 5), ist offenbar ein maximaler Verband. Die letzte Behauptung folgt nun nach Satz 5, w. z. b. w.

Bemerkung 8. Die Sätze 4, 5, 6 und ihre Beweise bleiben auch für U-Kongruenzen, d. h. für durch U-Relationen erzeugte Äquivalenzen, gültig. Man muß dabei nur das Lemma 5 und das folgende Ergebnis benutzen: In einer l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik sind alle U-Relationen Normalrelationen.

Literatur

[1] *Г. Биркгоф:* Теория структур. ИЛ, Москва, 1952.

[2] *Dubreil-Jacotin M.-L., Lesieur, Croisot:* Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géometriques (Paris 1953), Partie II.

[3] *L. Fuchs:* Partially ordered algebraic systems, Pergamon Press, 1963.

[4] *O. Kowalski:* K teorii o-ideálů v nekomutativních okruzích. Časopis pro pěst. matem., *87* (1962), Praha.

[5] *O. Kowalski:* Zum Begriff der Quasiteilbarkeit in ganzen l-Halbgruppen. Časopis pro pěst. matem., *89* (1964), Praha.

[5] *Е. Г. Шулгейфер:* Разложение на простые множители в структурах с умножением. Украинский математический журнал, том II, № 3, 1950, 100—114.

[7] *O. Borůvka:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin VEB, 1960.

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).