Marko Švec

Les propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle nonlinéaire d'ordre n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 4, 550–557

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100802

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NONLINÉAIRE D'ORDRE n

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Reçu le 7 juillet 1966)

Soit S_{n-1} l'espace de Banach de toutes les fonctions définies sur l'intervalle $J = \langle x_0, \infty)$ et ayant sur cet intervalle la dérivée d'ordre $n - 1$ continue et bornée. Soit $\|f(x)\| = \sup_J |f^{(n-1)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-2} |f^{(i)}(x_0)|$ la norme dans S_{n-1}.

Théorème 1. *Soit $B(x, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, $n \geqq 1$, une fonction continue sur le domaine*

$$\Omega : a < x < \infty\,, \quad -\infty < u_i < \infty\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1\,.$$

Soit $F(x)$ une fonction continue sur (a, ∞) et telle que

$$|B(x, \mathbf{u})| \leqq F(x) \quad \textit{pour tout point} \quad (x, u) \in \Omega\,, \tag{1}$$

$$\int^{\infty} x^{n-1} F(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,. \tag{2}$$

Soient enfin $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ des nombres réels arbitraires. Alors l'équation

$$y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{E}$$

a une solution $u(x)$, définie au moins sur l'intervalle $J = \langle x_0, \infty)$, $x_0 > a$, telle que

$$u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k - i)!} + o(1)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1\,. \tag{4}$$

Démonstration. Soit $x_0 > a$ et soit $f(x) \in S_{n-1}$ arbitraire. D'après (1) nous avons $|B(x, \mathbf{f}(x))| \leqq F(x)$, où $\mathbf{f}(x) = (f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$, pour tout $x \in J$. Donc, en utilisant (2), nous obtenons que

$$\left| \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} B(x, \mathbf{f}(x))\, \mathrm{d}x \right| \leqq \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} F(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Définissons sur S_{n-1} l'opérateur T de la manière suivante: Si $f(x) \in S_{n-1}$, soit

$$(5) \qquad v(x) = Tf(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \int_x^\infty \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

On voit immédiatement que $v(x)$ est une fonction continue ayant sur J les dérivées continues jusqu'à l'ordre n inclus, données par les formules:

$$(6) \quad v^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + \int_x^\infty \frac{(x - t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$v^{(n)}(x) = -B(x, \mathbf{f}(x))\,,$$

et que tout point invariant de T est une solution de l'équation (E) satisfaisant aux conditions (4). Nous allons prouver l'existence d'un tel point invariant de T.

Posons

$$(7) \qquad \int_{x_0}^\infty (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t)\, \mathrm{d}t = A\,.$$

Alors, de (6), en respectant (7), nous obtenons

$$(8) \qquad |v^{(i)}(x_0)| = \left| c_i + \int_{x_0}^\infty \frac{(x_0 - t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t \right| =$$

$$\leqq |c_i| + \int_{x_0}^\infty (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t)\, \mathrm{d}t = |c_i| + A\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2\,,$$

$$|v^{(n-1)}(x)| = \left| c_{n-1} + \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t \right| \leqq |c_{n-1}| + A\,.$$

Cela signifie que $v(x) \in S_{n-1}$ et que

$$(9) \qquad \|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + nA = L\,.$$

Donc TS_{n-1} fait partie de la boule fermée

$$(10) \qquad M = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leqq L\}\,.$$

C'est pourquoi nous pouvons affirmer que $TM \subset M$.

Maintenant nous démontrons la continuité de T. Soient $f_k(x)$, $f(x) \in S_{n-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ et soit $\|f_k(x) - f(x)\| \to 0$ pour $k \to \infty$. On démontre facilement que alors $f_k^{(i)}(x)$ converge vers $f^{(i)}(x)$ pour $k \to \infty$. La fonction $B(x, \boldsymbol{u})$ étant continue sur Ω nous obtenons que $B(x, \mathbf{f}_k(x))$, $k = 1, 2, \ldots$, sont les fonctions continues sur J et convergent vers $B(x, \mathbf{f}(x))$ pour tout $x \in J$. L'application du théorème de Lebesgue sur

$$\|Tf_k(x) - Tf(x)\| = \sup_J \left| \int_x^\infty [B(t, f_k(t)) - B(t, \mathbf{f}(t)) \, dt \right| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2} \left| \int_{x_0}^\infty \frac{(x_0 - t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} [B(t, \mathbf{f}_k(t)) - B(t, \mathbf{f}(t))] \, dt \right|$$

donne la preuve de la continuité de T.

Il reste à prouver que TM est compact. Soit $\{v_k(x)\}$ une suite arbitraire de TM. Considérons tout d'abord l'ensemble des fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ D' après (6), on a

$$|v_k^{(n-1)}(x)| \leqq |c_{n-1}| + \left| \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}_k(t)) \, dt \right|,$$

d'où, en respectant (1), nous avons

$$(11) \qquad |v_k^{(n-1)}(x)| \leqq |c_{n-1}| + \int_x^\infty F(t) \, dt \leqq |c_{n-1}| + \int_{x_0}^\infty F(t) \, dt .$$

Cela signifie d'une part que les fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, sont uniformément bornées par le nombre $|c_{n-1}| + \int_{x_0}^\infty F(t) \, dt$ et d'autre part qu'elles sont équicontinues. Cette dernière affirmation découle de (11) et du fait que $\int_x^\infty F(t) \, dt < \infty$. Alors, d'après le théorème d'Arzelà, l'ensemble des fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, est compact sur l'intervalle $\langle x_0, x_1 \rangle$ au sens de la norme $\|v_k^{(n-1)}(x)\| = \sup_{\langle x_0, x_1 \rangle} |v_k^{(n-1)}(x)|$. Quant à x_1, nous le choisissons de la manière suivante: Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Alors il existe un nombre x_1 tel que $\int_x^\infty F(t) \, dt < \varepsilon/2$ pour tout $x \geqq x_1$. L'ensemble des fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$ étant compact sur $\langle x_0, x_1 \rangle$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, d'après le théorème d'Hausdorff, un ε-filet fini $v_{\alpha_1}^{(n-1)}(x), v_{\alpha_2}^{(n-1)}(x), \ldots, v_{\alpha_N}^{(n-1)}(x)$ tel que pour toute fonction $v^{(n-1)}(x)$ de la suite $\{v_k^{(n-1)}(x)\}$ il existe un entier α_s parmi les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ tel que $\sup_{\langle x_0, x_1 \rangle} |v^{(n-1)}(x) - v_{\alpha_s}^{(n-1)}(x)| < \varepsilon$. Mais pour $x \geqq x_1$ nous avons

$$|v^{(n-1)}(x) - v_{\alpha_s}^{(n-1)}(x)| \leqq \int_x^\infty |B(t, \mathbf{f}(t)) - B(t, \mathbf{f}_{\alpha_s}(t))| dt \leqq 2 \int_x^\infty F(t) \, dt < \varepsilon ,$$

où $v(x) = Tf(x)$, $v_k(x) = Tf_k(x)$. Cela signifie que $v_{\alpha_1}^{(n-1)}(x), v_{\alpha_2}^{(n-1)}(x), \ldots, v_{\alpha_N}^{(n-1)}(x)$ est un ε-filet fini pour les fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ aussi sur l'intevalle J. Donc l'ensemble des fonctions $v_k^{(n-1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, est compact sur J au sens de la norme $\|v_k^{(n-1)}(x)\| = \sup_J |v_k^{(n-1)}(x)|$. Il en résulte que nous pouvons extraire de chaque suite $\{v_j(x)\}$ des fonctions de TM une sous-suite $\{v_{k_j}(x)\}$ telle que la suite $\{v_{k_j}^{(n-1)}(x)\}$ converge vers une fonction $\varphi(x)$ au sens de $\sup_J |v_{k_j}^{(n-1)}(x) - \varphi(x)| \to 0$ pour $k_j \to \infty$. La fonction $\varphi(x)$ est continue et bornée sur J. Les fonctions $v_{k_j}(x)$ étant de M, on a $\|v_{k_j}(x)\| \leqq L$, d'où it résulte que les suites $\{|v_{k_j}^{(i)}(x_0)|\}$, $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, sont bornées par L. On peut alors extraire la sous-suite $\{v_{k_j}(x)\}$ de telle façon que $\lim_{k_j \to \infty} v_{k_j}^{(i)}(x_0) = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, et $\limsup_{k_j \to \infty\ J} |v_{k_j}^{(n-1)}(x) - \varphi(x)| = 0$. En construisant la fonction

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{n-2}}{(n - 2)!} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

on voit que $g(x) \in S_{n-1}$ et $\|v_{k_j}(x) - g(x)\| \to 0$ pour $k_j \to \infty$. Alors TM est compact au sens de la norme dans S_{n-1}.

Nous avons démontré que Test un opérateur continu sur S_{n-1} qui applique la boule fermée M de telle sorte que $TM \subset M$ et TM est compact. D'après le théorème de Schauder T a au moins un point invariant, notons-le $u(x)$, dans M. Pour ce point sont valables les relations suivantes:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{u-1} c_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \int_{x}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} B(t, \mathbf{u}(t)) \, \mathrm{d}t \,,$$

$$u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k - i)!} + \int_{x}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-i-1}}{(n - i - 1)!} B(t, \mathbf{u}(t)) \, \mathrm{d}t \,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1 \,.$$

De cela, en respectant (1) et (2), l'affirmation du théorème est évidente.

Les théorèmes suivants donnent certaines généralisations de ce théorème.

Théorème 2. *Soient $F(x, \mathbf{u})$ et $B(x, \mathbf{u})$ les fonctions continues sur le domaine Ω. Soit $F(x, \mathbf{u})$ une fonction non-décroissante en chacune de ses variables u_i, $i = 0,1, \ldots, n - 1$. Soit K un nombre positif, $x_0 > a$ et soit*

$$\varphi(x) = K \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} (x - x_0)^s \,, \tag{12}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} F(x, \varphi(x)) \, \mathrm{d}x < \infty, \ \textit{pour chaque } K \,, \tag{13}$$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0 + 1)^{n-1} F(x, \varphi(x)) \, \mathrm{d}x = 0 \,. \tag{14}$$

Soit encore

$$|B(x, \mathbf{u})| \leqq F(x, \mathbf{u}) \tag{15}$$

pour tout point $(x, u) \in \Omega$. Soient enfin $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ des nombres réels arbitraires. Alors l'équation (E) *a une solution $u(x)$, définie au moins sur $J = \langle x_0, \infty)$ pour la quelle sont valables les formules* (4).

Démonstration. Soit K un nombre positif et soit $G_K = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leqq \leqq K\}$. On déduit facilement que pour $f(x) \in G_K$ arbiraire on a

$$(16) \qquad |f^{(i)}(x)| \leqq \varphi^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

En respectant (15), la monotonie de $F(x, \mathbf{u})$ et (13), nous obtenons

$$(17) \qquad |B(x, \mathbf{f}(x))| \leqq F(x, \mathbf{f}(x)) \leqq F(x, \boldsymbol{\varphi}(x)),$$

$$(18) \qquad \left|\int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, dt\right| \leqq \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\, dt < \infty .$$

Ceci nous permet de définir l'opérateur T sur G_K par la formule (5). Pour les dérivées de $v(x) = Tf(x)$ sont valables les formules (6), d'où, en tenant compte de (17) et (18), nous obtenons

$$(19) \qquad |v^{(n-1)}(x)| \leqq |c_{n-1}| + \left|\int_x^\infty B(t, \mathbf{f}(t))\, dt\right| \leqq$$

$$\leqq |c_{n-1}| + \int_x^\infty (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\, dt = |c_{n-1}| + A(K),$$

$$|v^{(i)}(x_0)| \leqq |c_i| + A(K), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2,$$

où nous avons posé

$$(20) \qquad A(K) = \int_{x_0}^\infty (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\, dt .$$

Il s'ensuit de (19) que

$$(21) \qquad \|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n \int_{x_0}^\infty (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\, dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n\, A(K).$$

En se servant de l'hypothèse (14), nous avons

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n\, A(K)}{K} = 0 .$$

Il existe alors un nombre K_0 tel que

$$(22) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} c_i + n\, A(K_0) \leqq K_0 .$$

Envisageons maintenant au lieu de G_K la boule G_{K_0}. Les inégalités (21) et (22) donnent que $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$.

Le reste de la démonstration est le même que celui de la démonstration du théorème précédent. Le rôle de la boule M joue maintenant la boule G_{K_0} et le rôle de la fonction $F(t)$ la fonction $F(t, \varphi_0(t))$, où $\varphi_0(t) = K_0 \sum_{s=0}^{n-1} (1/s!) (x - x_0)^s$. La continuité de T se démontre sur la boule G_{K_0}.

La condition (14) sert pour assurer l'existence d'une boule G_{K_0} telle que l'opérateur T l'applique dans elle-même. Le nombre x_0 peut être arbitraire dans (a, ∞). Nous pouvons nous débarasser de cette condition aux dépens de x_0 qui ne sera plus si arbitraire.

Théorème 3. *Soient remplies toutes les conditions du théorème 2 à l'exception de la condition* (14). *Les nombres* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *étant arbitrairement choisis, il existe un nombre* $x_0 \in (a, \infty)$ *tel que l'équation* (E) *possède une solution* $u(x)$, *définie au moins sur l'intervalle* $J = \langle x_0, \infty)$, *pour laquelle sont valables les formules* (4).

Démonstration. Nous n'avons qu' à prouver l'existence d'une boule G_K telle que $TG_K \subset G_K$. Considérons l'inégalité (21). A cause de l'existence de l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) \, dt$, nous pouvons trouver un tel x_0 et tel K_0, que

$$\|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) \, dt \leqq K_0 \, .$$

On voit que pour tout $K_0 > \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|$, il existetoujours un nombre x_0 tel quel'inégalité précédante soit satisfaite. Alors $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$.

Une autre modification du théorème 3 donne le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit* $B(t, \mathbf{u})$ *une fonction continue sur le domaine* Ω. *Soit*

$$(23) \qquad |B(x, \mathbf{u})| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x) \, |u_i| + a_0(x) = F(x, \mathbf{u}) \, ,$$

pour $(x, u) \in \Omega$ *et* $a_{n-i}(x) \geqq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. *Soit*

$$(24) \quad \int^{\infty} x^{2n-j-2} \, a_{n-j}(x) \, dx < \infty \, , \quad j = 0, 1, \ldots, n - 1 \, , \quad \int^{\infty} x^{n-1} \, a_0(x) \, dx < \infty \, .$$

Soient $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *des nombres réels arbitraires. Alors il existe un nombre* $x_0 \in (a, \infty)$ *tel que l'équation* (E) *a une solution* $u(x)$, *définie au moins sur* $J = \langle x_0, \infty)$, *pour laquelle sont valables les formules* (4).

Remarque 1. Soit $\varepsilon > 0$. Si nous remplaçons la condition (2) dans le théorème 1 par

$$(2') \qquad \int^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} F(x) \, dx < \infty$$

et analoguement la condition (13) dans les théorèmes 2 et 3 par

$$(13') \qquad \int^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} F(x, \varphi(x))\, \mathrm{d}x < \infty \quad \text{pour tout} \quad K > 0\,,$$

et la condition (24) dans le théorème 4 par

$$(24') \qquad \int^{\infty} x^{2n-j-2+\varepsilon} a_{n-j}(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$\int^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} a_0(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

alors les formules (4) pour la solution $u(x)$ de (E) seront

$$(4') \qquad u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + o(x^{-\varepsilon})\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

En effet, la solution $u(x)$ et ses dérivées satisfont aux équations

$$u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, u(t))\, \mathrm{d}t\,,$$
$$i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Nous avons à prouver que

$$\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{u}(t))\, \mathrm{d}t = o(x^{-\varepsilon})\,,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to \infty} x^{\varepsilon} \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{u}(t))\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Mais nous avons

$$\left| x^{\varepsilon} \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, \mathbf{u}(t))\, \mathrm{d}t \right| \leqq \int_x^{\infty} \frac{x^{\varepsilon}(t-x)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} |B(t, \mathbf{u}(t))|\, \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \int_x^{\infty} t^{\varepsilon} t^{n-i-1} |B(t, \mathbf{u}(t))|\, \mathrm{d}t = o(1)$$

en respectant (1) et (2') ou bien (15) et (13'), ou bien (23) et (24').

Cette dernière modification du théorème 4 appliquée à une équation différentielle linéaire donne les résultats de M. ZLÁMAL [1].

Remarque 2. Le problème de l'existence globale et les formules asymptotiques des solutions de l'équation (E) données par les conditions initrales sont discutées dans [2].

Littérature

[1] *Zlámal M.:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Nachrichten, B. *10*, 1953, S. 169–174.

[2] *Švec M.*: L'existence globale et les prodriétés asymptotiques des solutions d'une équation differentiélle non-linéaire d'ordre *n*. Archivum mathematicum (Brno), T. *2* (1966), 141–151.

Adresse de l'auteur: Bratislava, Gottwaldovo nám. 2, ČSSR (Slovenská vysoká škola technická).