Zbyněk Nádeník

Les courbes gauches de largeur constante

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 4, 540–549

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100801

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

LES COURBES GAUCHES DE LARGEUR CONSTANTE

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 5 juillet 1966)

L. EULER en 1778, dans son ouvrage *De curvis triangularibus*[1]) sur les développantes des courbes planes à trois rebroussements, a le premier pris en considération les courbes de largeur constante; il les a nommées les orbiformes. En 1860, suivant le point de vue des probabilités géométriques, particulièrement du problème du comte G. L. L. DE BUFFON (de 1777), E. BARBIER a fait les recherches des orbiformes dans sa *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*[2]); le théorème bien connu que toutes les orbiformes de même largeur B ont la même longueur πB est dû à lui. F. REULEAUX en 1875, dans son oeuvre *Theoretische Kinematik*[3]) a fait revivre l'intérêt pour ces courbes dans ses considérations cinématiques dans lesquelles il a découvert les orbiformes qui se composent d'arcs de cercle. Dans ce siècle, le premier travail concernant les orbiformes a été le mémoire, depuis classique, de A. HURWITZ *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*[4]). Ce mémoire a été suivi de travaux de MINKOWSKI et d'autres auteurs (pour la bibliographie détaillée voir [4], p. 132, 134, 135).

En ce qui concerne la bibliographie des dernières années nous rappelons seulement les publications suivantes: P. C. HAMMER et A. SOBCZYK [11] ont présenté en 1953 la détermination générale des orbiformes; ils ont trouvé les quasi-faisceaux des diamètres[5]) dont les trajectories orthogonales sont les courbes de largeur constante. A l'aide de cette description, P. C. Hammer [8] a donné une représentation analytique complète des orbiformes. Au cours de symposion sur la convexité, tenu à Washington en 1961, il a tracé dans son exposé [9] un programme étendu concernant les recherches sur les courbes planes et les surfaces de largeur constante. Il a commencé à le réaliser dans son travail [9] sur les orbiformes dans la géométrie rélative de Minkowski. Pour d'autres applications des „quasi-faisceaux" des diamètres, voir [10]. Sans doute, la découverte de P. C. Hammer et A. Sobczyk, ci-dessus mentionnée, appartient aux plus beaux et aux plus importants théorèmes de la théorie des courbes de largeur constante.

Il est à remarquer que les domaines convexes plans, limités par les courbes de largeur constante, ont trouvé des applications techniques; rappelons seulement l'appareil de projection (du film) et le moteur rotatif à explosion.

Naturellement, les généralisations spatiales des orbiformes ont été aussi souvent traitées. Ici,

---

[1]) Acta Acad. Sci. Petropolitanea *2* (1778), 3—30.

[2]) Journal de Mathématiques pures et appliquées (2) *5* (1860), 273—286.

[3]) Tom I, Braunschweig 1875. Voir p. 136 et suivantes.

[4]) Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (3) *19* (1902), 357—408. Voir p. 386 et suivantes.

[5]) Conformément à [18], p. 12, les diamètres sont ici les droites joignant les couples des points opposés.

nous ne considérons que les courbes gauches qui jouissent d'une propriété analogue à celle de l'orbiforme. M. FUJIWARA [6], le premier, a formulé, en 1914, la définition suivante: Soit K une courbe fermée gauche, dont la tangente varie continûment. Si le plan normal à chaque point de la courbe K la coupe encore dans un seul point et si la distance de ces points en question est égale à une constante d, alors K s'appelle la courbe de largeur constante d. Les courbes de cette espèce ont été étudiées en détail par W. BLASCHKE [1], et plus tard, encore par M. Fujiwara [7]. W. Blaschke [2] a également pris en considération les orbiformes sur la sphère. Leur représentation complète a été donnée par. H. J. REBASSOO[6]).

D'autres définitions des „orbiformes gauches" sont données dans [3] et [13]. Soit C une courbe fermée suffisamment différentiable, plongée dans l'espace euclidien à dimension arbitraire. Si l'indicatrice sphérique des vecteurs unitaires de la tangente ou de la dernière normale de C est centrée, on peut définir sur la courbe C (de façon naturelle) les points opposés; cela étant, si les hyperplans rectifiants ou osculateurs aux points opposés de C ont une distance constante, nous pouvons considérer C comme une analogie spatiale d'une orbiforme.[7])

Les considérations suivantes se rattachent très étroitement aux travaux [14] et [15] qui précèdent de près. En nous servant des désignations et des suppositions de l'introduction à [14] (p. 363) lesquelles ont été récapitullées dans [15] (p. 447), nous allons étudier, ci-dessous, une telle analogie des orbiformes dans l'espace euclidien à nombre pair $2n > 2$ de dimensions, laquelle analogie appartient au dernier type pré-cité. C'est-à-dire, Γ étant une hypercirconférence unitaire fermée et centrée (avec l'arc β et la longueur b) — ses équations dans un système des coordonnées rectangulaires convenablement choisies peuvent donc s'écrire comme suit

$$(1) \qquad z_{2i-1} = r_i \sin l_i\beta\,, \quad z_{2i} = r_i \cos l_i\beta \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

où les nombres r_i, l_i sont assujétis aux conditions (2) dans [14] ou [15] et tous les nombres

$$(2) \qquad \lambda_i = \frac{b}{2\pi} l_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sont impairs — nous allons traiter les courbes C au paramètrage $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\beta)$ pour lesquelles l'hypercirconférence Γ est l'indicatrice sphérique des opposés des vecteurs unitaires $\boldsymbol{n}(\beta)$ de la dernière normale de C. Vu la symétrie

$$(3) \qquad \boldsymbol{n}(\beta + \tfrac{1}{2}b) = -\boldsymbol{n}(\beta)$$

les hyperplans osculateurs aux points opposés $\boldsymbol{x}(\beta)$ et $\boldsymbol{x}(\beta + \frac{1}{2}b)$ de C sont parallèles.[8]) La distance entre ces hyperplans est la largeur

$$(4) \qquad B = h(\beta) + h(\beta + \tfrac{1}{2}b)$$

[6]) Dans sa thèse de doctorat; d'après [9], p. 291. Ce travail de H. J. Rebassoo est resté inconnu à l'auteur de cette note.

[7]) Cf. la remarque [2]) dans [13], la définition des courbes de largeur constante et des orbiformes exprimée ci-dessous et la remarque[10]).

[8]) Voir les remarques [1]) et [2]) dans [15].

de C en direction du vecteur $\mathbf{n}(\beta)$; la fonction

$$h(\beta) = -\mathbf{x}(\beta) \,.\, \mathbf{n}(\beta) \tag{5}$$

dite fonction d'appui de C. Mais, comme nous avons déjà fait remarquer, nous ne prendrons en considération ici que *les courbes C de largeur constante,* c'est-à-dire les courbes C qui ont, en direction de chaque vecteur $\mathbf{n}(\beta)$, la même largeur constante B définie d'après (4). Parmi ces courbes gauches de largeur constante, nous réservons la dénomination *orbiformes gauches* pour celles, dont l'indicatrice sphérique Γ se projette dans son $i^{\text{ième}}$ plan axial — c'est le plan des axes coordonnées z_{2i-1} et z_{2i} dans (1) — suivant la circonférence $(2i-1)$-fois comptée; donc, dans (2),

$$\lambda_i = 2i - 1\,. \tag{6}$$

Car, d'après la partie b) du théorème 1 dans [15], nous savons que, dans ce cas (6), la courbe C est entièrement contenue dans la bande limitée par les hyperplans osculateurs au couple arbitraire des points opposés.

Les plus simples exemples de nos courbes de largeur constante sont les hypercirconférences dans la classe des courbes C; voir [15], le n° 7.

Maintenant, nous allons énoncer les théorèmes concernant une courbe C gauche de largeur constante ou, plus spécialement, une orbiforme C gauche. Les démonstrations de ces propositions sont données successivement aux n$^{\text{os}}$ 1—7.

Le premier théorème n'est qu'une analogie spatiale de la relation de Barbier bien connue:

I. *Toutes les courbes C de largeur constante ont la même longueur*

$$L = \tfrac{1}{2}bB \,.\, \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{l_i}{r_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{l_j^2}{l_j^2 - l_i^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux théorèmes suivants déterminent la position mutuelle des points opposés:

II. *Soit $\mathbf{n}_i(\beta)$ la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{n}(\beta)$ dans le $i^{\text{ième}}$ plan axial de l'hypercirconférence Γ. Puis, pour une courbe C de largeur constante B, on a*

$$\mathbf{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) = \mathbf{x}(\beta) + B\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i^2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{l_j^2}{l_j^2 - l_i^2}\right)\mathbf{n}_i(\beta)\,. \tag{7}$$

L'espace des vecteurs $\mathbf{n}_1(\beta), \ldots, \mathbf{n}_n(\beta)$, issus du point $\mathbf{x}(\beta)$, est identique à l'espace des vecteurs $\mathbf{n}_1(\beta + \frac{1}{2}b), \ldots, \mathbf{n}_n(\beta + \frac{1}{2}b)$, issus du point opposé $\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b)$. En outre, ces espaces sont orthogonaux aux tangentes en $\mathbf{x}(\beta)$ et $\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b)$.

III. *Si $k_1(\beta), \ldots, k_{2n-1}(\beta)$ sont les courbures et si $\mathbf{t}_1(\beta), \ldots, \mathbf{t}_{2n-1}(\beta)$ et $\mathbf{t}_{2n}(\beta) = \mathbf{n}(\beta)$ désignent les vecteurs unitaires de la tangente et de la première jusque de la $(2n-1)^{\text{ième}}$ normale d'une courbe C* [9]) *de largeur constante B, on obtient*

$$\mathbf{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) = \mathbf{x}(\beta) + B\sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{k_{2j+1}}{k_{2j}}\right)\mathbf{t}_{2i}(\beta) + B\mathbf{n}(\beta)\,. \tag{8}$$

Si nous convenons d'appeler (conformément à [17]) *espace normal* au point $\mathbf{x}(\beta)$ l'espace des vecteurs $\mathbf{t}_2(\beta), \mathbf{t}_4(\beta), \ldots, \mathbf{t}_{2n}(\beta) = \mathbf{n}(\beta)$, nous pouvons encore dire que *les points opposés ont l'espace normal commun.*

Cette dernière propriété (cf., pour les hypercirconférences, [5], p. 12) nous rappelle que les diamètres d'une orbiforme sont aussi ses normales doubles.

Dans [14], nous avons désigné par $\mathscr{C}_i$ la projection orthogonale de la courbe C dans le $i^{\text{ième}}$ plan axial de l'hypercirconférence Γ; $i = 1, 2, \ldots, n$. Le théorème suivant utilise cette désignation.

IV. *La courbe C est de largeur constante B si et seulement si la courbe plane $\mathscr{C}_i$ est de largeur constante*[10]) B_i:

$$B_i = B \cdot \frac{1}{r_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{l_j^2}{|l_j^2 - l_i^2|}\,. \tag{9}$$

Aussi les théorèmes qui viennent après font penser aux propriétés des orbiformes planes:

V. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe C soit de largeur constante B est: La somme des rayons de la dernière courbure de C aux points opposés est*

$$P(\beta) + P(\beta + \tfrac{1}{2}b) = B \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{l_i}{r_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{l_j^2}{l_j^2 - l_i^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Le barycentre de courbure d'une courbe — cette notion est due à Steiner[11]) — est

---

[9]) L'indicatrice sphérique Γ ayant toutes les courbures constantes et non nulles, les rapports $k_1 : k_2 : \ldots : k_{2n-1}$ sont aussi constants et non nuls.

[10]) Il faut noter que la courbe plane $\mathscr{C}_i$, dite ici „de largeur constante", est une orbiforme au sens usuel seulement si $\lambda_i = 1$, car $\mathscr{C}_i$ se ferme après le cours λ_i-multiple. Une courbe fermée lisse plane aux équations $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ — où φ est l'arc de la circonférence unitaire et les fonctions $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ ont la période $2(2k-1)\pi$ pour un $k = 1, 2, \ldots$ quelconque — est dite „de largeur constante d" si ses tangentes aux points opposés $[x(\varphi), y(\varphi)]$ et $[x(\varphi + (2k-1)\pi), y(\varphi + (2k-1)\pi)]$ ont, pour chaque φ, la même distance d. Cf. la remarque [2]) dans [13].

[11]) Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven. Journal für reine und angewandte Mathematik *21* (1840), 33—63, 101—133; Gesammelte Werke II, 99—159; voir p. 99.

le centre de gravité d'une courbe matérielle dont la masse, en chaque point, est égale à la courbure au point en question. E. MEISSNER (voir [12], p. 327, ou [16], p. 122) a démotré que, pour toute orbiforme, le barycentre et le barycentre de courbure coincident. Voici une généralisation spatiale de ce théorème:

VI. *Si la courbe C est de largeur constante, son centre de gravité est aussi son barycentre de courbure.*

Du côté des orbiformes gauches C, nous pouvons exprimer la proposition suivante qui complète le théorème 8 dans [15] (nous faisons usage des notations (22), (24), (30) et (6) dans [15]):

VII. *Pour qu'une courbe C soit une orbiforme gauche, il faut et il suffit qu'une des équations*

$$s = Hd = \frac{2}{b} L = HD = S \tag{11}$$

soit valable.

Les démonstrations des théorèmes I–VII suivent:

1. Nous pouvons écrire la formule (8) dans [14] (ou (7) dans [15]) pour la longueur L de la courbe C sous la forme de Cauchy

$$L = l_1^2 \dots l_n^2 A \int_0^{\frac{1}{2}b} [h(\beta) + h(\beta + \tfrac{1}{2}b)] \, \mathrm{d}\beta \,, \tag{1,1}$$

où A est la constante (7) dans [14] (ou (6) dans [15]). Il en résulte, d'après (4), le théorème I.

2. Les $x_1, \dots, x_{2n}$ étant les coordonnées du point $\mathbf{x}(\beta)$ de la courbe C dans le système de coordonnées dans lequel l'hypercirconférence Γ possède les équations (1), nous savons (voir les formules (2,6) et (2,7) dans [14]; (2,7) lire $x'_{2i}(\beta) = \dots; \dots n$) que[12])

$$\begin{aligned} x'_{2i-1}(\beta) &= \mu_i \cos l_i\beta \,.\sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v}\, h^{(2v)}(\beta)\,, \\ x'_{2i}(\beta) &= -\mu_i \sin l_i\beta \,.\sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v}\, h^{(2v)}(\beta)\,, \end{aligned} \tag{2,1}$$

où

$$\frac{1}{\mu_i} = r_i l_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (l_j^2 - l_i^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,; \tag{2,2}$$

σ_i est la $i^{\text{ième}}$ fonction fondamentale symétrique de $l_1^2, \dots, l_n^2$ et $\sigma_0 = 1$.

---

[12]) Les accents désignent les dérivées par rapport à β.

Il découle de (2,1) par l'intégration élémentaire que

$$(2,3)\qquad x_{2i-1}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i-1}(\beta) = \mu_i \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v)}(\gamma) \cos l_i\gamma \, d\gamma ,$$

$$x_{2i}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i}(\beta) = -\mu_i \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v)}(\gamma) \sin l_i\gamma \, d\gamma .$$

En tenant compte de (4), nous obtenons, par de simples intégrations partielles deux fois répétées, que

$$(2,4)\qquad \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v)}(\gamma) \cos l_i\gamma \, d\gamma = -l_i^2 \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v-2)}(\gamma) \cos l_i\gamma \, d\gamma ,$$

$$\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v)}(\gamma) \sin l_i\gamma \, d\gamma = -l_i^2 \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(2v-2)}(\gamma) \sin l_i\gamma \, d\gamma$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et $v = 2, \ldots, n$ et

$$(2,5)\qquad \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h''(\gamma) \cos l_i\gamma \, d\gamma = -Bl_i \sin l_i\beta - l_i^2 \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h(\gamma) \cos l_i\gamma \, d\gamma ,$$

$$\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h''(\gamma) \sin l_i\gamma \, d\gamma = Bl_i \cos l_i\beta - l_i^2 \int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h(\gamma) \sin l_i\gamma \, d\gamma$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

En se servant des relations évidentes ($\sigma_j^{[i]}$ est la $j^{\text{ième}}$ fonction fondamentale symétrique de $l_1^2, \ldots, l_{i-1}^2, l_{i+1}^2, \ldots, l_n^2$ et $\sigma_0^{[i]} = 1$)

$$\sigma_0 = 1 \; ; \quad \sigma_j = l_i^2 \sigma_{j-1}^{[i]} + \sigma_j^{[i]} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \; ; \quad \sigma_n = l_i^2 \sigma_{n-1}^{[i]}$$

et de (2,4) et (2,5), on peut simplifier les sommes (2,3) comme suit:

$$(2,6)\qquad x_{2i-1}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i-1}(\beta) = -B\mu_i \sigma_{n-1}^{[i]} l_i \sin l_i\beta ,$$

$$x_{2i}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i}(\beta) = -B\mu_i \sigma_{n-1}^{[i]} l_i \cos l_i\beta .$$

Eu égard aux équations (1), il est donc possible d'écrire (2,6) sous la forme

$$(2,7)\qquad x_{2i-1}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i-1}(\beta) = -Bl_1^2 \ldots l_n^2 \cdot \frac{\mu_i}{r_i l_i} \cdot z_{2i-1} ,$$

$$x_{2i}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i}(\beta) = -Bl_1^2 \ldots l_n^2 \cdot \frac{\mu_i}{r_i l_i} \cdot z_{2i} ;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n .$$

Mais les coordonnées du vecteur $-\boldsymbol{n}(\beta)$ étant (1), sa projection dans le $i^{\text{ième}}$ plan axial de l'hypercirconférence Γ est

$$(2,8)\qquad \boldsymbol{n}_i(\beta) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, -z_{2i-1}, -z_{2i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2n-2i}).$$

Il s'ensuit, vu la désignation (2,2), que les équations (2,7) expliquent la relation (7).

D'après (3) aussi $\boldsymbol{n}_i(\beta + \frac{1}{2}b) = -\boldsymbol{n}_i(\beta)$ et selon (2,8), (1) et (2,1) encore $\boldsymbol{x}'(\beta) . \boldsymbol{n}_i(\beta) = \boldsymbol{x}'(\beta + \frac{1}{2}b) . \boldsymbol{n}_i(\beta + \frac{1}{2}b) = 0$.

3. Sous la désignation du théorème III, nous rappelons les formules de Frenet ($j = 2, \ldots, 2n - 1$):

$$(3,1)\qquad \mathbf{t}_1' = \frac{k_1}{k_{2n-1}}\mathbf{t}_2\,; \quad \mathbf{t}_j' = -\frac{k_{j-1}}{k_{2n-1}}\mathbf{t}_{j-1} + \frac{k_j}{k_{2n-1}}\mathbf{t}_{j+1}\,; \quad \mathbf{t}_{2n}' = -\mathbf{t}_{2n-1}.$$

Donc, vu la symétrie (3), aussi

$$(3,2)\qquad \mathbf{t}_j(\beta + \tfrac{1}{2}b) = -\mathbf{t}_j(\beta) \quad (j = 1, \ldots, 2n).$$

A l'aide des formules (3,1) et des relations (3)–(5), on tire sans difficulté l'équation (8). (Cf. [3], p. 211.) Puis, la dernière assertion du théorème III découle immédiatement de (3,2).

4. Dans [15], nous avons déterminé par la formule (3,7) la fonction d'appui $h_i(\beta)$ de la courbe $\mathscr{C}_i$ qui est la projection orthogonale de notre courbe C dans le $i^{\text{ième}}$ plan axial de l'hypercirconférence Γ. En utilisant les relations (2) dans lesquelles les λ_i sont impairs, nous déduisons de la formule mentionnée que

$$(4,1)\qquad h_i(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h_i(\beta) = \mu \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]}[h(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h(\beta)]^{(2v)},$$

où

$$(4,2)\qquad \mu^{-1} = r_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |l_j^2 - l_i^2|.$$

Si $h(\beta + \frac{1}{2}b) + h(\beta) = B = \text{const.}$, l'équation (4,1) nous donne tout de suite

$$(4,3)\qquad h_i(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h_i(\beta) = B\mu\sigma_{n-1}^{[i]}$$

ce qui conduit – d'après (4,2) – à la relation (9) pour la largeur (4,3) de $\mathscr{C}_i$. – Au contraire, si $h_i(\beta + \frac{1}{2}b) + h_i(\beta) = B_i = \text{const.}$, nous pouvons envisager (4,1) comme une équation différentielle linéaire non homogène, dont une solution est de forme

$$(4,4)\qquad h(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h(\beta) = \frac{B_i}{\mu\sigma_{n-1}^{[i]}}.$$

L'équation homogène appartenant à l'équation en question a évidemment la solution

$$h(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h(\beta) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (A_j \sin l_j\beta + B_j \cos l_j\beta)$$

qui peut être annulée par un choix convenable de l'origine (voir le n° 4 dans [14]). Il nous reste ainsi seulement la solution (4,4) qui complète la démonstration du théorème IV.

5. Pour vérifier le théorème V, nous employons la formule

$$P(\beta + \tfrac{1}{2}b) + P(\beta) = \Lambda \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v}[h(\beta + \tfrac{1}{2}b) + h(\beta)]^{(2v)} \tag{5,1}$$

qui résulte directement de (6) et (7) dans [14] (ou de (5) et (6) dans [15]).

Si $h(\beta + \frac{1}{2}b) + h(\beta) = B =$ const., elle présente la relation (10). – Au contraire, cette relation étant valable, le procédé analogue à celui du n° précédent nous conduira à la conclusion que la courbe C est de largeur constante. (Cf. [3], p. 211.)

6. Le centre de gravité de la courbe C est, s étant l'arc de C,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathbf{x}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^b \mathbf{x}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta \tag{6,1}$$

et le barycentre de courbure de la courbe C est

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{b}\int_0^L \mathbf{x}(s)\, P^{-1}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{b}\int_0^b \mathbf{x}(\beta)\, \mathrm{d}\beta\,. \tag{6,2}$$

Donc, d'après les théorèmes II et V,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = {} & \frac{1}{2L}\int_0^b \mathbf{x}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta + \\ & + \frac{1}{2L}\int_0^b \Big[\mathbf{x}(\beta) + \sum_{i=1}^{n} (.)\, \mathbf{n}_i(\beta)\Big] \big[(*)\, B - P(\beta)\big]\, \mathrm{d}\beta\,, \end{aligned} \tag{6,3}$$

où $(*)$ désigne la racine carrée dans (10) et les constantes $(.)$ ne nous intéresseront pas.

Mais selon (2,8) et (1), il est évidente que

$$\int_0^b \mathbf{n}_i(\beta)\, \mathrm{d}\beta = \mathbf{0}\,; \tag{6,4}$$

en outre, les conditions de la fermeture de la courbe C qui ont été trouvées dans [15] (voir le lemme 1) peuvent s'exprimer

$$\int_0^b P(\beta)\, \boldsymbol{n}_i(\beta)\, \mathrm{d}\beta = \boldsymbol{0}\,. \tag{6,5}$$

Compte tenu de (6,3)–(6,5) et de la proposition I, nous obtenons, en vue des équations (6,1) et (6,2), l'égalité $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$ et celle-ci démontre le théorème VI.

7. Supposons que la courbe C soit orbiforme gauche de largeur B. Puis, d'après (22) et (24) dans [15], $d = D = B$ et, à l'égard de (5,1) et (4), encore $s = S = l_1^2 \ldots$ $\ldots l_n^2 \,.\, \Lambda \,.\, B$; en outre, d'après (1,1) et (4), aussi $L = l_1^2 \ldots l_n^2 \,.\, \Lambda \,.\, \frac{1}{2}b$. Vu la relation (30) dans [15], il s'ensuit (11).

La jonction de ce simple résultat et du théorème 8 dans [15] (les courbes C de largeur constante qui ont été exclues dans ce théorème sont, d'après la définition présente, des orbiformes gauches) conduit au théorème VII.

Bibliographie

[1] *W. Blaschke:* Über Raumkurven von konstanter Breite. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig *66* (1914), 171–177.

[2] *W. Blaschke:* Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen konstanter Breite. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig *67* (1915), 290–297.

[3] *L. Boček* und *Z. Nádeník:* Beitrag zur globalen Differentialgeometrie der Kurven im euklidischen Raum. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 209–213.

[4] *T. Bonnesen - W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948.

[5] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přírodov. fak. Masarykovy univ. *146*, Brno 1931.

[6] *M. Fujiwara:* On space curves of constant breadth. Tôhoku Math. J. *5* (1914), 180–184.

[7] *M. Fujiwara:* Über die Raumkurven konstanter Breite und ihre Beziehung mit der einseitigen Regelfläche. Tôhoku Math. J. *8* (1915), 1–10.

[8] *P. C. Hammer:* Constant breadth curves in the plane. Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1955), 333–334.

[9] *P. C. Hammer:* Convex curves of constant Minkowski breadth. Proc. of Symposia in Pure Math., Vol. VII: Convexity, 291–304. Providence, 1963.

[10] *P. C. Hammer - T. J. Smith:* Conditions equivalent to central symmetry of convex curves. Proc. Cambridge Philos. Soc. *60* (1964), 779–785.

[11] *P. C. Hammer - A. Sobczyk:* Planar line families I, II. Proc. Amer. Math. Soc. *4* (1953), 226–233, 341–349.

[12] *E. Meissner:* Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Vierteljahrsheft der Naturforschenden Gesellschaft Zürich *54* (1909), 309–329.

[13] *Z. Nádeník:* Über die geschlossenen Raumkurven. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 214–219.

[14] *Z. Nádeník:* Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 363–376.

[15] *Z. Nádeník:* Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée. Czech. Math. J. *17* (*92*) (1967), 447–459.

[16] *F. Schilling:* Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite. Z. Math. Phys. *63* (1914), 67—136.

[17] *M. Sypták:* Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *195* (1932), 298—299.

[18] *P. Vincensini:* Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels. Mém. Sci. Math. Fasc. XCIV, Paris 1938.

Adresse de l'auteur: Trojanova 13, Praha 2, ČSSR (České vysoké učení technické).

Резюме

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРОТЫ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Кривые изученные в [15] имеют к всякой соприкасающейся гиперплоскости параллельную соприкасающуюся гиперплоскость. Здесь рассматриваются такие из этих кривых, для которых расстояние этих параллельных гиперплоскостей постоянно. Эти кривые имеют свойства, которые аналогичны свойствам плоских кривых постоянной широты. На прим.: Центр тяжести кривизны и центр тяжести пространственной кривой постоянной широты совпадают.