Czechoslovak Mathematical Journal

Zbyněk Nádeník

Die Ungleichungen für die Masszahlen der Kanalkörper

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 3, 408–419

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100786`

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

DIE UNGLEICHUNGEN FÜR DIE MASSZAHLEN DER KANALKÖRPER

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 14. April 1966)

Die folgenden Zeilen knüpfen sehr eng an die früheren Untersuchungen [9] über die geschlossenen Kanalflächen an.

A) Es sei C eine nicht geschlossene Kurve des n-dimensionalen euklidischen Raumes ($n \geqq 3$), welche eine Parameterdarstellung dritter Klasse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $s \in \langle 0, l \rangle$ besitzt; dabei ist s bzw. l die Bogen- bzw. die Gesamtlänge von C. Den Anfangspunkt von C bezeichnen wir mit C_0 und den Endpunkt mit C_l. Wir werden zwei Fälle unterscheiden: Für die erste Krümmung $k = k(s)$ von C gilt entweder $k(s) = 0$ oder $k(s) > 0$ für alle $s \in (0, l)$.

Weiter sei $\varrho = \varrho(s)$ eine im Intervall $\langle 0, l \rangle$ definierte und stetige Funktion und

$$0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_{p-1} < l_p = l \tag{1}$$

eine Teilung des Intervalls $\langle 0, l \rangle$; die Funktion $\varrho = \varrho(s)$ sei in jedem Intervall $\langle l_{q-1}, l_q \rangle$ ($q = 1, 2, \ldots, p$) zweiter Klasse und möge folgende Ungleichungen erfüllen (durchwegs $(.)' = \mathrm{d}(.)/\mathrm{d}s$ und insofern es ausführlich nicht aufgeschrieben ist, so bedeutet $(.)'$ in den Teilpunkten (1) die rechtsseitigen oder linksseitigen Ableitungen):

$$\varrho'(l_q - 0) \geqq \varrho'(l_q + 0) \quad (q = 1, 2, \ldots, p - 1)\,; \tag{2}$$

$$s \in (0, l) \Rightarrow \varrho(s) > 0\,, \quad |\varrho'(s)| < 1\,; \tag{3}$$

$$s \in \langle 0, l \rangle \Rightarrow 1 - [\varrho(s)\,\varrho'(s)]' - k(s)\,\varrho(s)\,\sqrt{[1 - \varrho'^2(s)]} > 0\,. \tag{4}$$

Die n-dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt in dem Punkt der Kurve C mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(s)$ und mit dem Radius $\varrho(s)$ bezeichnen wir mit $\varkappa_n(s)$ und ihre Berandung mit $\pi_{n-1}(s)$; dabei kann sich $\varkappa_n(0)$ oder $\varkappa_n(l)$ auf einen Punkt reduzieren. Für $s \neq l_0, l_1, \ldots, l_p$ liegt die Charakteristik von $\pi_{n-1}(s)$

$$\pi_{n-2}(s) = \lim_{\sigma \to 0} \pi_{n-1}(s) \cap \pi_{n-1}(s + \sigma) \tag{5}$$

in der Ebene $\nu(s)$ mit der Parameterdarstellung $[\mathbf{y} - \mathbf{x}(s)] \,.\, \mathbf{x}'(s) = -\varrho(s)\,\varrho'(s)$. Wegen (3) ist der Limesdurchschnitt (5) immer eine $(n - 2)$-dimensionale Kugelfläche und sie begrenzt die $(n - 1)$-dimensionale Kugel $\varkappa_{n-1}(s) = \varkappa_n(s) \cap \nu(s)$. Dementsprechend ist

(6) $$\mathscr{K}_q = \bigcup\{\varkappa_{n-1}(s) : s \in (l_{q-1}, l_q)\} \quad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

ein Kanalkörper.

Die Ebene mit der Parameterdarstellung

(7) $$[\mathbf{y} - \mathbf{x}(l_q)] \cdot \mathbf{x}'(l_q) = -\varrho(l_q)\,\varrho'(l_q + 0) \quad (q = 0, 1, \ldots, p - 1)$$

bzw.

(8) $$[\mathbf{y} - \mathbf{x}(l_q)] \cdot \mathbf{x}'(l_q) = -\varrho(l_q)\,\varrho'(l_q - 0) \quad (q = 1,2, \ldots, p)$$

wird durch den Einheitsvektor $\mathbf{x}'(s)$ orientiert und sie bestimmt dann den abgeschlossenen inneren Halbraum $\overleftarrow{v}(l_q + 0)$ bzw. den abgeschlossenen äusseren Halbraum $\overrightarrow{v}(l_q - 0)$.

Der Ungleichungen (3) und (4) zufolge

(9) $$\varrho(0) > 0 \Rightarrow \varrho'(0 + 0) > -1\,, \quad \varrho(l) > 0 \Rightarrow \varrho'(l - 0) < 1\,;$$

(10) $$\varrho(0) = 0 \Rightarrow \varrho'(0 + 0) \geqq \ 0\,, \quad \varrho(l) = 0 \Rightarrow \varrho'(l - 0) \leqq 0\,.$$

Aus (9) und (7) für $l_0 = 0$ [bzw. (8) für $l_p = l$] folgt, dass

(11) $$\mathscr{T}_0 = \varkappa_n(0) \cap \overleftarrow{v}(0 + 0) \neq \varkappa_n(0)$$

[bzw.

(12) $$\mathscr{T}_p = \varkappa_n(l) \cap \overrightarrow{v}(l - 0) \neq \varkappa_n(l)]$$

eine Kugelkappe bedeutet, inwiefern $\varrho(0) > 0$ und $\varrho'(0 + 0) < 1$ [bzw. $\varrho(l) > 0$ und $\varrho'(l - 0) > -1$] ist, und einen Punkt darstellt, falls $\varrho(0) = 0$ oder $\varrho'(0 + 0) = 1$ [bzw. $\varrho(l) = 0$ oder $\varrho'(l - 0) = -1$] ist. Aus (7) und (8) ergibt sich weiter, dass

(13) $$\mathscr{T}_q = \varkappa_n(l_q) \cap \overrightarrow{v}(l_q - 0) \cap \overleftarrow{v}(l_q + 0) \quad (q = 1, 2, \ldots, p - 1)$$

für die scharfe Ungleichung in (2) eine Kugelschicht und für die Gleichung in (2) eine Kugelscheibe ist. Der einfachen Ausdrucksweise wegen werden wir aber im folgenden für die Punktmengen $\mathscr{T}_q$ $(q = 0, 1, \ldots, p)$ meistens nur den Termin „Kugelschichten" benutzen.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist der Körper

(14) $$K[C; \varrho(s)] = \mathscr{T}_0 \cup \bigcup_{q=1}^{p} \mathscr{K}_q \cup \mathscr{T}_q\,.$$

Wir werden voraussetzen, dass er sich nicht durchdringt. Seine Berandung bezeichnen wir mit S.

Nur für $\varrho(0) = 0$ [bzw. $\varrho(l) = 0$] ist $C_0 \in S$ [bzw. $C_l \in S$] und falls noch $\varrho'(0+0) < 1$ [bzw. $\varrho'(l-0) > -1$] ist, so besitzt der Körper K im Punkt C_0 [bzw. C_l] eine Spitze. Anders sind alle Punkte von S regulär und S besitzt stückweise stetige Hauptkrümmungen (s. Abschn. 1).

Wir bezeichnen wieder mit W_0 das Volumen des Körpers K aus (14), mit nW_1 die Oberfläche seiner Berandung S und mit W_i für $i = 2, \ldots, n-1$ die auf dieselbe Weise wie in [9], Formel (2), definierten Masszahlen, also die mit $n\binom{n-1}{n-i}$ dividierten Krümmungsintegrale von S, d. h. $W_i = [n\binom{n-1}{n-i}]^{-1} \int_S \{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\}\, dS$ mit der Bezeichnung aus [2], S. 62–63. Für diese Funktionale gelten jetzt folgende Integraldarstellungen (vgl. (I) in [9]):

$$\text{(I)} \qquad W_i = \omega_{n-1} \frac{n-i}{n} \int_0^l \varrho^{n-i-1}(s)\, P(s)\, ds + \tfrac{1}{2}\omega_n [\varrho^{n-i}(0) + \varrho^{n-i}(l)]$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

wo (ebenso wie in (I*) in [9])

$$\text{(I*)} \qquad P(s) = 1 + (n-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m+2)} \binom{\frac{n-3}{2}}{m} \varrho'^{2m+2}(s) > 0$$

und ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Endlich setzen wir $W_n = \omega_n$, was freilich – falls $\varrho(0)\,\varrho(l) > 0$ ist – auch die Formel (I) für $i = n$ darbietet. (S. Abschn. 2 und 3.)

Für genügend kleines positives v erfüllt die Bedingungen (2)–(4) mit der Funktion $\varrho(s)$ auch die Funktion $\varrho(s) + v$, sodass wir auf dieselbe Weise wie den Körper (14) auch den zu ihm im äusseren Abstand v parallelen Körper $K[C; \varrho(s) + v]$ konstruieren können. Es sei $W_0^{(v)}$ das Volumen von $K[C; \varrho(s) + v]$. Die Masszahlen (I) sind auch durch die STEINERsche Formel (vgl. [7], S. 214)

$$(15) \qquad W_0^{(v)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v^i W_i$$

darstellbar (s. Abschn. 3).

B) Wir schalten eine kurze Bemerkung über konvexe Rotationskörper ein. Es seien $\mathscr{W}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ die MINKOWSKIschen Masszahlen eines beliebigen konvexen Rotationskörpers mit dem Äquatorradius d. Als eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von T. BONNESEN [1] hat A. DINGHAS [3] das folgende Ungleichungssystem gewonnen:

$$\mathscr{W}_{\nu-1} - 2\mathscr{W}_\nu d + \mathscr{W}_{\nu+1} d^2 \leqq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Im Zusammenhang mit der Arbeit [5] von H. HADWIGER hat A. Dinghas [4] seine früheren Untersuchungen [3] sehr vertieft und eine fruchtbare Theorie entwickelt, welche zu allgemeinen Klassen von linearen Ungleichungen für die Masszahlen $\mathscr{W}_\nu$ führt. Eine interessante Untergruppe der Ungleichungen von A. Dinghas bildet das

System

$$(16) \qquad (\alpha - \beta)\, d^{\gamma} \mathscr{W}_{\gamma} + (\beta - \gamma)\, d^{\alpha} \mathscr{W}_{\alpha} + (\gamma - \alpha)\, d^{\beta} \mathscr{W}_{\beta} \geqq 0$$
$$(0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n)\,.$$

Diese Ungleichungen hat H. Hadwiger [6] direkt bewiesen und zugleich hat er aus ihnen die Relationen

$$(17) \qquad \mathscr{W}_{\alpha}^{\beta-\gamma} \mathscr{W}_{\beta}^{\gamma-\alpha} \mathscr{W}_{\gamma}^{\alpha-\beta} \geqq 1$$

hergeleitet.

Wir kehren zu unseren Körpern (14) zurück um zu zeigen, dass die oben in diesem Abschnitt B) erwähnten Resultate im gewissen Sinn eine Ausdehnung gestatten. Wir betrachten zwei Körper $K[C; \varrho(s)]$ und $K[C^*; \varrho(s)]$ der Gattung (14) mit derselben Funktion $\varrho(s)$, aber mit verschiedenen Kurven C und C^*, aus denen C^* die durch die Rektifikation von C entstehende Strecke ist. Aus (I) mit (I*) folgt unmittelbar, dass beide Körper $K[C; \varrho(s)]$ und $K[C^*; \varrho(s)]$ dieselben Grössen $W_0, W_1, \ldots, W_n$ besitzen.

Der Körper $K[C^*; \varrho(s)]$ is freilich ein Rotationskörper und eine einfache Erwägung zeigt (s. auch [8], Abschn. 6), dass er dann und nur dann konvex ist, wenn

$$(18) \qquad s \in (l_{q-1}, l_q) \Rightarrow \varrho''(s) < 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Sind diese Forderungen erfüllt, so sind folglich wegen (15) die für $K[C^*; \varrho(s)]$ berechneten Grössen $W_0, W_1, \ldots, W_n$ aus (I) die Minkowskischen Quermassintegrale $\mathscr{W}_0, \mathscr{W}_1, \ldots, \mathscr{W}_n$ (vgl. auch [2], S. 63 und die Definitionsformeln (2) in [9] nebst nachfolgender Bemerkung). Das bedeutet, dass die obenerwähnten Ungleichungen von A. Dinghas und H. Hadwiger auch für den nicht achsensymmetrischen Körper $K[C; \varrho(s)]$ gültig bleiben, wenn wir nur W_i statt $\mathscr{W}_i$ schreiben.

C) Die Integraldarstellungen (I) der Funktionale W_i ermöglichen – ähnlich wie in der Theorie von A. Dinghas [4] – lineare Ungleichungen nach folgendem Hauptsatz zu bilden (s. Abschn. 5):

Es seien

$$Q(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (n - i)\, y^i x^{n-i-1}\,, \quad U(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i y^i x^{n-i}$$

zwei Polynome in x, y (mit konstanten Koeffizienten μ_i), *welche für x aus gewissem Intervall J und für gewisse y folgende Eigenschaften besitzen*: 1) $Q(x, y)$ *verschwindet nicht identisch in bezug auf* x; 2) $Q(x, y) \geqq 0$ *und* $x_1, x_2 \in J \Rightarrow U(x_1, y) \geqq$ $\geqq 0$, $U(x_2, y) \geqq 0$.

Die Grössen W_i jedes Körpers K, für den $\min\limits_{s \in \langle 0, l \rangle} \varrho(s) \in J$, $\max\limits_{s \in \langle 0, l \rangle} \varrho(s) \in J$ *und* $\varrho(0) = x_1$, $\varrho(l) = x_2$ *ist, erfüllen die Ungleichung*

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \mu_i y^i W_i \geqq 0\,,$$

in der das Gleichheitszeichen nur für solche Kugelröhrenkörper) auftritt, deren Halbmesser* ϱ *die Gleichungen* $Q(\varrho, y) = 0$, $U(\varrho, y) = 0$ *befriedigt.*

Wir heben noch einige spezielle mit den Relationen (16) und (17) von H. Hadwiger eng verwandte Ungleichungen hervor:

Es seien α, β, γ *ganze Zahlen*, $0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n - 1$.

Ein Gegenstück zu (17) *bilden die Ungleichungen* (s. Abschn. 4)

$$W_\alpha^{\beta-\gamma} W_\beta^{\gamma-\alpha} W_\gamma^{\alpha-\beta} < (n-\alpha)^{\beta-\gamma} (n-\beta)^{\gamma-\alpha} (n-\gamma)^{\alpha-\beta} . \tag{III}$$

Ein Analogon zu (16) *lautet nun folgends: Es ist für jedes* $y > 0$ (s. Abschn. 5)

$$\frac{\beta-\alpha}{n-\gamma} y^\gamma W_\gamma + \frac{\gamma-\beta}{n-\alpha} y^\alpha W_\alpha + \frac{\alpha-\gamma}{n-\beta} y^\beta W_\beta > 0 \tag{IV}$$

und für $0 < y \leqq c =$ *konst.* > 0 *unter Begrenzung auf die Körper K, für welche* $c \leqq \varrho(s)$ *ist, gilt noch*

$$(\beta-\alpha)\, y^\gamma W_\gamma + (\gamma-\beta)\, y^\alpha W_\alpha + (\alpha-\gamma)\, y^\beta W_\beta \geqq 0 ; \tag{V}$$

das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann auf, wenn K ein Kugelröhrenkörper mit dem Halbmesser y ist (s. Abschn. 5).

Im dreidimensionalen Raum resultiert aus (III) einzige Ungleichung unter dem Volumen V, der Oberfläche O und dem Integral M der mittleren Krümmung:

$$4MV - O^2 > 0 . \tag{19}$$

In dieser Relation ist die Gleichheit nur für die in die Grundkurve C entarteten Körper K (d.h. für $\varrho(s) = 0$) erreichbar.

Für konvexe Körper gilt die Ungleichung (19) im allgemeinen nicht. Ein Beispiel dazu ist ein viereckiges Prisma.

Die folgenden Abschnitte enthalten die Beweise der obenangeführten Behauptungen und Sätze.

1. Wir setzen $\mathbf{t} = \mathbf{x}'$. Wenn die Grundkurve C eine Strecke ist, so wählen wir $n - 1$ feste untereinander und zu $\mathbf{t}$ orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-1}$; hat dagegen die Kurve C durchwegs positive erste Krümmung, so belassen wir dieselbe Wahl der Vektoren $\mathbf{n}_i(s)$ wie in [9], Abschn. 1. Alles, was in [9], Abschn. 1 für den dort betrachteten Kanalkörper bewiesen worden ist, gilt ohne irgendeine Veränderung auch für den Kanalkörper $\mathscr{K}_q$ aus (6), selbstverständlich unter der Einschränkung, dass $s \in (l_{q-1}, l_q)$. Dementsprechend das Volumen $V(\mathscr{K}_q)$ von $\mathscr{K}_q$ ist gemäss [9],

*) Unter einem Kugelröhrenkörper (mit dem Halbmesser ϱ) versteht man einen solchen Körper mit glatter Berandung, welcher aus einem Röhrenkörper (mit dem Halbmesser ϱ) durch die Beifügung zweier Halbkugeln an seine beiden Begrenzungskugelscheiben entsteht. Ein Spezialfall ist der Kugelzylinder.

Formel (1,8)

$$V(\mathcal{K}_q) = \omega_{n-1} \int_{l_{q-1}}^{l_q} \varrho^{n-1}[1 - (\varrho\varrho')'] (1 - \varrho'^2)^{(n-1)/2} \, ds \tag{1,1}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, p)$$

und die Darstellung des nach innen gerichteten Flächennormalenvektors der Kanalfläche

$$\mathcal{S}_q = \bigcup \{\pi_{n-2}(s) : s \in (l_{q-1}, l_q)\} \quad (q = 1, \ldots, p)\,, \tag{1,2}$$

welche den Mantel von $\mathcal{K}_q$ bildet, ist für $\varrho(s) > 0$ gemäss [9], Formeln (1,1), (1,2) und (3,1)

$$\boldsymbol{N} = \varrho'(s)\mathbf{t}(s) - [1 - \varrho'^2(s)]^{1/2} \, \mathbf{z}(s, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\,, \tag{1,3}$$

wo $\mathbf{z}(s, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$ den Ortsvektor der in der zum Vektor $\mathbf{t}(s)$ senkrechten Ebene liegenden $(n - 2)$-dimensionalen Einheitskugelfläche mit den Polarkoordinaten $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ bedeutet.

Daraus folgt die auch geometrisch evidente Tatsache, dass für $s \to l_q + 0$ [bzw. $s \to l_q - 0$] der Vektor (1,3) zum Flächennormalenvektor der Kugelfläche $\pi_{n-1}(l_q)$ längs ihres Durchschnittes mit der Ebene (7) [bzw. (8)] strebt ($q = 1, 2, \ldots, p - 1$). Offensichtlich gilt dasselbe auch für $s \to l_0 + 0 (l_0 = 0)$ [bzw. $s \to l_p - 0 (l_p = l)$], falls $\varrho(0) > 0$ [bzw. $\varrho(l) > 0$] ist, gleichgültig, ob $\varrho'(0 + 0) < 1$ [bzw. $\varrho'(l - 0) > -1$] (dann – vgl. den Abschn. A der Einleitung – endet der Körper (14) mit der Kugelkappe $\mathcal{T}_0$ [bzw. $\mathcal{T}_p$]) oder $\varrho'(0 + 0) = 1$ [bzw. $\varrho'(l - 0) = -1$] ist (dann ist $\mathcal{T}_0$ [bzw. $\mathcal{T}_p$] ein Punkt). Ist dagegen $\varrho(0) = 0$, so ist $\mathcal{T}_0 \equiv C_0$ und der Limesvektor (1,3) existiert zwar wieder für $s \to 0 + 0$, aber er ist dann und nur dann von $\varphi_1, \ldots, \ldots, \varphi_{n-1}$ unabhängig, wenn $\varrho'(0 + 0) = 1$; im entgegengesetzten Fall schliesst er nach (10) mit dem Vektor $\mathbf{t}(0)$ immer einen spitzen Winkel oder einen Nullwinkel je nachdem $0 < \varrho'(0 + 0) < 1$ oder $\varrho'(0 + 0) = 0$ ist. Ähnlich für $s \to l - 0$. So haben wir wirklich bestätigt, dass die Berandung S unseres Körpers K glatt ist, mit Ausnahme des Falles, dass $\varrho(0) = 0$, $\varrho'(0 + 0) < 1$ oder $\varrho(l) = 0$, $\varrho'(l - 0) > -1$ ist, wann in $C_0 \in S$ oder $C_l \in S$ eine Spitze entsteht.

Die Stetigkeit der Hauptkrümmungen der Kanalfläche (1,2) ergibt sich sofort aus [9], Abschn. 3. Folglich sind die Hauptkrümmungen von S stückweise stetig.

2. Die Integraldarstellung (1,1) des Volumens von $\mathcal{K}_q$ werden wir auf dieselbe Weise wie in [9], Abschn. 2 umformen. Nach zweiter Ungleichung (3) ist die Möglichkeit dieser Umformung, welche auf der gleichmässigen Konvergenz der dort auftretenden Funktionalreihen beruht, durch das Kriterium von Abel garantiert. Weil wir aber jetzt gar nichts mit einer periodischen Funktion $\varrho(s)$ zu tun haben, so ist für

$q = 1, 2, \ldots, p$

$$\int_{l_{q-1}}^{l_q} \varrho^n(s)\varrho'^{2m}(s)\,\varrho''(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{n}{2m+1}\int_{l_{q-1}}^{l_q} \varrho^{n-1}(s)\,\varrho'^{2m+2}(s)\,\mathrm{d}s + $$
$$+ \frac{1}{2m+1}\left[\varrho^n(l_q)\,\varrho'^{2m+1}(l_q - 0) - \varrho^n(l_{q-1})\,\varrho'^{2m+1}(l_{q-1} + 0)\right]$$

und deshalb erhält man nach denselben Rechnungen wie in [9], Abschn. 2 für das Volumen $V(\mathscr{K}_q)$ die Formel

$$(2,1) \qquad \frac{1}{\omega_{n-1}} V(\mathscr{K}_q) = \int_{l_{q-1}}^{l_q} \varrho^{n-1}(s)\,P(s)\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \varrho^n(l_{q-1})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_{q-1}+0) -$$
$$- \varrho^n(l_q)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_q - 0) \quad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

mit $P(s)$ aus (I*). Die Ungleichung in (I*) beweist man – bis auf eine einfache Ergänzung, welche die Eventualität $\varrho'(0+0) = 1$ oder $\varrho'(l-0) = -1$ betrifft – ebenso wie in [9], Abschn. 2.

Das Volumen der Kugelschicht (bzw. der Kugelkappe), welche aus der n-dimensionalen Kugel $y^2 + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 \leqq r^2$ durch die Ebenen $y = r_1$ und $y = r_2 (-r \leqq r_1 < r_2 \leqq r, r_2 - r_1 < 2r)$ ausgeschnitten wird, ist

$$(2,2) \quad \omega_{n-1}\int_{r_1}^{r_2}(r^2 - y^2)^{(n-1)/2}\,\mathrm{d}y = \omega_{n-1}\,r^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{r^{2m+1}}.$$

Die Kugelschicht $\mathscr{T}_q$ $(q = 0, 1, \ldots, p)$ – s. (11), (12), (13) – wird aus der n-dimensionalen Kugel $\varkappa_n(l_q)$ durch die in (7) und (8) bestimmten Ebenen ausgeschnitten; dabei bieten die Gleichungen (7) und (8) sofort die orientierten Entfernungen dieser Ebenen vom Mittelpunkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(l_q)$ der Kugel $\varkappa_n(l_q)$ dar. Mittels (2,2) bekommen wir so für das Volumen $V(\mathscr{T}_q)$ von $\mathscr{T}_q$ folgende Formeln:

$$(2,3) \quad V(\mathscr{T}_0) = \tfrac{1}{2}\omega_n\,\varrho^n(0) - \omega_{n-1}\,\varrho^n(l_0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_0+0),$$
$$V(\mathscr{T}_q) = \omega_{n-1}\,\varrho^n(l_q)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\left[\varrho'^{2m+1}(l_q-0) - \varrho'^{2m+1}(l_q+0)\right]$$
$$(q = 1, 2, \ldots, p-1),$$

$$V(\mathscr{T}_p) = \tfrac{1}{2}\omega_n\,\varrho^n(l) + \omega_{n-1}\,\varrho^n(l_p)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_p - 0)\,.$$

Aus (2,1) und (2,3) ergibt sich für das Volumen $W_0 = V(\mathscr{T}_0) + V(\mathscr{K}_1) + V(\mathscr{T}_1) + \ldots + V(\mathscr{K}_p) + V(\mathscr{T}_p)$ des Körpers K aus (14) die Formel (I) für $i = 0$.

3. Die direkte Herleitung der Darstellungen (I) für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ erfordert eine längere Rechnung, welche wir nun skizzieren werden. Mit der Bezeichnung aus [2], S. 62–63 und mit $\{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\} = 1$ für $i = 1$ soll im folgenden $\int_G\{R_1^{-1} \ldots \ldots R_{i-1}^{-1}\}\,\mathrm{d}G$ für $i = 2, \ldots, n-1$ das i-te Krümmungsintegral und für $i = 1$ die Oberfläche einer Fläche G zweiter Klasse bezeichnen.

Für den Bogen σ des Meridians der Kugelschicht, deren Volumen wir in (2,2) berechnet haben, gilt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y = r : (r^2 - y^2)^{1/2}$, so dass die Oberfläche des Mantels dieser Kugelschicht folgends bestimmt ist:

$$(3,1)\qquad (n-1)\,\omega_{n-1}\int_{r_1}^{r_2}(r^2 - y^2)^{(n-2)/2}\,.\,\frac{r}{(r^2 - y^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y = $$
$$= (n-1)\,\omega_{n-1}r^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-3}{2}}{m}\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{r^{2m+1}}\,.$$

Beachten wir jetzt, dass alle Hauptkrümmungsradien des Mantels $\mathscr{Z}_q$ der Kugelschicht $\mathscr{T}_q$ $(q = 0, 1, \ldots, p)$ dem Radius $\varrho(l_q)$ der Kugel $\varkappa_n(l_q)$ gleich sind, so gewinnen wir – auf ähnliche Weise wie am Ende des vorigen Abschn. 2 – dass

$$(3,2)\qquad \int_{\mathscr{Z}_0}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}\mathscr{Z}_0 = \frac{n}{2}\binom{n-1}{i-1}\omega_n\,\varrho^{n-i}(0) -$$
$$- (n-1)\binom{n-1}{n-i}\omega_{n-1}\,\varrho^{n-i}(l_0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-3}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_0 + 0)\,,$$
$$\int_{\mathscr{Z}_q}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}\mathscr{Z}_q = (n-1)\binom{n-1}{n-i}\omega_{n-1}\,\varrho^{n-i}(l_q)\,.$$
$$.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-3}{2}}{m}\left[\varrho'^{2m+1}(l_q - 0) - \varrho'^{2m+1}(l_q + 0)\right]$$
$$(q = 1, 2, \ldots, p-1)\,,$$
$$\int_{\mathscr{Z}_p}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}\mathscr{Z}_p = \frac{n}{2}\binom{n-1}{i-1}\omega_n\,\varrho^{n-i}(l) +$$
$$+ (n-1)\binom{n-1}{n-i}\omega_{n-1}\,\varrho^{n-i}(l_p)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-3}{2}}{m}\varrho'^{2m+1}(l_p - 0)\,.$$

Für die Krümmungsintegrale bzw. für die Oberfläche des Mantels (1,2) des Kanalkörpers (6) ist die in [9], Abschn. 3 angeführte (und in [8], (4,3) hergeleitete) Formel benutzbar:

$$\int_{\mathscr{S}_q}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}\mathscr{S}_q = (n-1)\,\omega_{n-1}\,.$$

$$\cdot\int_{l_{q-1}}^{l_q}\left\{\binom{n-2}{i-1}\varrho^{n-i-1}(1-\varrho'^2)^{(n-1)/2} - \binom{n-1}{i-1}\varrho^{n-i}\varrho''(1-\varrho'^2)^{(n-3)/2}\right\}\mathrm{d}s$$

$$(q = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Diese Krümmungsintegrale können wir auf ganz ähnliche Weise umformen wie im Abschn. 2. die Formel (1,1). Dieses Verfahren liefert

$$\int_{\mathscr{S}_q}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}\mathscr{S}_q = (n-1)\,\omega_{n-1}\binom{n-2}{i-1}\int_{l_{q-1}}^{l_q}\varrho^{n-i-1}P\,\mathrm{d}s - \tag{3,3}$$

$$-(n-1)\,\omega_{n-1}\binom{n-1}{i-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\binom{\frac{n-3}{2}}{m}\,.$$

$$\cdot\left[\varrho^{n-i}(l_q)\,\varrho'^{2m+1}(l_q-0) - \varrho^{n-i}(l_{q-1})\,\varrho'^{2m+1}(l_{q-1}+0)\right]$$

$$(q = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Jetzt sind wir schon imstande das über die ganze Berandung $S = \mathscr{L}_0 \cup \bigcup_{q=1}^{p} \mathscr{S}_q \cup \mathscr{L}_q$ unseres Körpers K aus (14) erstreckte Integral $\int_S\{R_1^{-1}\ldots R_{i-1}^{-1}\}\,\mathrm{d}S$ auszudrücken; dieses ist nämlich die Summe der in (3,2) und (3,3) berechneten Integrale:

$$\int_{S}\left\{\frac{1}{R_1}\cdots\frac{1}{R_{i-1}}\right\}\mathrm{d}S = (n-1)\binom{n-2}{i-1}\omega_{n-1}\int_0^l\varrho^{n-i-1}P\,\mathrm{d}s + \tag{3,4}$$

$$+\frac{n}{2}\binom{n-1}{i-1}\omega_n\left[\varrho^{n-i}(0) + \varrho^{n-i}(l)\right].$$

Weil das durch $n\binom{n-1}{n-i}$ dividierte Integral links in (3,4) gerade die Grösse W_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ ist, so folgt aus (3,4) schon leicht die gewünschte Darstellung (I) auch für $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Nach der schon in der Einleitung gemachten Bemerkung ist für genügend kleines positives v die Formel (I) mit (I*) auch auf den zum Körper (14) im äusseren Abstand v parallelen Körper $K[C; \varrho(s) + v]$ anwendbar. Für das Volumen $W_0^{(v)}$ von $K[C; \varrho(s) + v]$ ergibt sich so nach (I) mit (I*) für $i = 0$, dass

$$W_0^{(v)} = \omega_{n-1}\int_0^l P(s)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\,.\,v^i\varrho^{n-i-1}(s)\,\mathrm{d}s + \tag{3,5}$$

$$+\tfrac{1}{2}\omega_n\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v^i\varrho^{n-i}(0) + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v^i\varrho^{n-i}(l)\right].$$

Benutzen wir jetzt die Darstellungen (I) für den Körper $K[C; \varrho(s)]$, für welchen wir noch $W_n = \omega_n$ gesetzt haben, so finden wir volle Übereinstimmung zwischen (3,5) und der Steinerschen Formel (15).

4. Es seien $g_1(s)$ und $g_2(s)$ zwei im Intervall $\langle 0, l\rangle$ stetige und in $(0, l)$ positive Funktionen und a_1, a_2 zwei Zahlen. Durch die Verbindung der Ungleichungen von Cauchy und Schwarz gewinnt man

$$(4,1) \qquad a_1 a_2 + \int_0^l g_1 g_2 \, ds \leqq \left[a_1^2 + \int_0^l g_1^2 \, ds\right]^{1/2} \cdot \left[a_2^2 + \int_0^l g_2^2 \, ds\right]^{1/2};$$

dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn

$$(4,2) \qquad g_1 : g_2 = a_1 : a_2$$

im Intervall $(0, l)$ ist.

In Hinsicht auf (I*) können wir setzen:

$$g_1(s) = \left[\omega_{n-1} \frac{n-i+j}{n} \varrho^{n-i+j-1}(s) \, P(s)\right]^{1/2},$$

$$g_2(s) = \left[\omega_{n-1} \frac{n-i-j}{n} \varrho^{n-i-j-1}(s) \, P(s)\right]^{1/2},$$

$$a_1 = \left[\tfrac{1}{2}\omega_n\{\varrho^{n-i+j}(0) + \varrho^{n-i+j}(l)\}\right]^{1/2}, \quad a_2 = \left[\tfrac{1}{2}\omega_n\{\varrho^{n-j-i}(0) + \varrho^{n-i-j}(l)\}\right]^{1/2};$$

$i, j = 1, \ldots, n-2; j \leqq i; i + j \leqq n - 1$. Nach (4,1) und (I) mit (I*) ergibt sich also

$$W_{i-j}^{1/2} \cdot W_{i+j}^{1/2} > \omega_{n-1} \frac{[(n-i+j)(n-i-j)]^{1/2}}{n} \int_0^l \varrho^{n-i-1}(s) \, P(s) \, ds +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega_n[\varrho^{n-i+j}(0) + \varrho^{n-i+j}(l)]^{1/2} \, [\varrho^{n-i-j}(0) + \varrho^{n-i-j}(l)]^{1/2};$$

die Gleichheitsbedingung (4,2) führt nämlich nur zu $\varrho(s) = 0$ in $\langle 0, l\rangle$. Wegen (I) folgt daraus weiter

$$W_{i-j}^{1/2} \, W_{i+j}^{1/2} > \frac{[(n-i+j)(n-i-j)]^{1/2}}{n-i} W_i +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega_n[(n-i)^2 - j^2]^{1/2} \left\{\left[\frac{\varrho^{n-i+j}(0) + \varrho^{n-i+j}(l)}{n-i+j}\right]^{1/2} \left[\frac{\varrho^{n-i-j}(0) + \varrho^{n-i-j}(l)}{n-i-j}\right]^{1/2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varrho^{n-i}(0) + \varrho^{n-i}(l)}{n-i}\right\}.$$

Hier ist aber der Ausdruck in den Klammern $\{\ldots\}$ immer positiv mit Ausnahme des Falles $\varrho(0) = \varrho(l) = 0$ und deshalb

$$(4,3) \qquad \frac{W_{i-j}}{n-i+j} \cdot \frac{W_{i+j}}{n-i-j} > \left(\frac{W_i}{n-i}\right)^2 \quad (j \leqq i;\, i+j \leqq n-1)\,.$$

Aus (4,3) ergibt sich nach dem Hilfssatz aus [9], Abschn. 4 sofort (III).

5. Nach (I) ist für beliebiges von s unabhängiges y und $\mu_i = $ konst.

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i y^i W_i = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_0^l \{\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (n-i)\, y^i \varrho^{n-i-1}(s)\}\, P(s)\, ds +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega_n \sum_{i=0}^{n} \mu_i y^i \varrho^{n-i}(0) + \tfrac{1}{2}\omega_n \sum_{i=0}^{n} \mu_i y^i \varrho^{n-i}(l)\,;$$

dabei ist freilich $W_n = \omega_n$ und $\varrho^{n-i}(0) = 1$ für $\varrho(0) = 0$ und $i = n$; ähnlich für $\varrho^{n-i}(l)$. Daraus folgt wegen (I*) schon leicht der in dem Abschn. C der Einleitung ausgesprochene Hauptsatz einschliesslich der Behauptung über das Gleichheitszeichen in (II); vgl. auch [9], Anfang des Abschn. 6.

Um noch (IV) zu beweisen, genügt es nach dem Hauptsatz nur folgendes zu zeigen: Für alle positiven y und für alle nicht negativen x ist

$$Q(x, y) = (\beta - \alpha)\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + (\gamma - \beta)\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + (\alpha - \gamma)\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0\,,$$

$$U(x, y) = \frac{\beta - \alpha}{n - \gamma}\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + \frac{\gamma - \beta}{n - \alpha}\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + \frac{\alpha - \gamma}{n - \beta}\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0$$

und $Q(x, y) = U(x, y) = 0$ ist nur für $x = 0$ möglich. Dies folgt aber unmittelbar aus [9], Folgerungen a) und c) des Hilfssatzes im Abschn. 5, und zwar für $z = y/x$ mit $x > 0$.

Für den Beweis von (V) genügt es – wieder nach dem Hauptsatz – zu verifizieren, dass für $0 < y \leqq c$ und $c \leqq x$

$$(5,1) \qquad Q(x, y) = (\beta - \alpha)(n - \gamma)\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + (\gamma - \beta)(n - \alpha)\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} +$$
$$+ (\alpha - \gamma)(n - \beta)\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0\,,$$

$$(5,2) \qquad U(x, y) = (\beta - \alpha)\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + (\gamma - \beta)\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + (\alpha - \gamma)\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0$$

ist. Beide Ungleichungen ergeben sich wieder aus [9], Folgerungen b) und a) des Hilfssatzes im Abschn. 5, für $z = y/x$. (S. dazu auch Abschn. 6 in [9].) Gleichzeitig folgt aus den Zusätzen zu diesen Folgerungen betreffs der Gleichheitszeichen, dass die Polynome links in (5,1) und (5,2) dann und nur dann verschwinden, wenn $y = x$. Daraus bestimmt man schon ganz leicht die Extremalkörper der Ungleichungen (V).

Literatur

[1] *T. Bonnesen:* Quelques problèmes isopérimétriques. Acta Math. *48* (1926), 123—178.

[2] *T. Bonnesen u. W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934 und 1951, New York 1948.

[3] *A. Dinghas:* Konvexe Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Abh. preuss. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1939, Nr. 17 (1939), 1—26.

[4] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Math. Nachr. *2* (1949), 124—140.

[5] *H. Hadwiger:* Elementare Studie über konvexe Rotationskörper. Math. Nachr. *2* (1949), 114—123.

[6] *H. Hadwiger:* Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Masszahlen bei konvexen Rotationskörpern. Mh. für Math. *56* (1952), 220—228.

[7] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957. (Лекции об обьеме, площади поверхности и изопериметрии. Москва 1966.)

[8] *Z. Nádeník:* Příspěvek k vlastnostem obálek kulových nadploch. Sborník prací fakulty inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, Praha 1961; 79—85.

[9] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Masszahlen der geschlossenen Kanalflächen. Czech. Math. J. *16* (1966), 296—306.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).

Резюме

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБЪЕМА, ПЛОЩАДИ И ИНТЕГРАЛОВ КРИВИЗНЫ КАНАЛОВЫХ ТЕЛ

ЗВЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве означает W_0 — объем, W_1 — на n^{-1} умноженную площадь и W_i $(i = 2, \ldots, n)$ — на $\left[n\binom{n-1}{n-i}\right]^{-1}$ умноженный интеграл $(i-1)$-й кривизны каналового тела, гомеоморфного шару (т.е. тела, ограниченного огибающей сфер с центрами в точках незамкнутой кривой C, возможно, эта поверхность имеет две точки заострения). W_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ независимы от кривизен кривой C, и подходящие интегральные представления функционалов W_j сделают возможным получить общие линейные неравнества для W_j.