Czechoslovak Mathematical Journal

Hans-Joachim Rossberg

Ganze charakteristische Funktionen mit vollkommen regulärem Wachstum

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 3, 335–346

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100782`

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

GANZE CHARAKTERISTISCHE FUNKTIONEN MIT VOLLKOMMEN REGULÄREM WACHSTUM

HANS-JOACHIM ROSSBERG, Berlin

(Eingegangen am 1. Februar 1966)

Verf. hat in [3] das Anwachsen einer ganzen charakteristischen Funktionen

$$h_0(z) = \int_0^\infty e^{izu}\, \mathrm{d}H_0(u)\,,$$

deren Verteilungsfunktion $H_0(u)$ die Eigenschaft $H_0(0) = 0$ besitzt, auf der negativ imaginären Achse untersucht. Die dabei erzielten Resultate wollen wir hier ausnutzen, um Aussagen über das Anwachsen einer charakteristischen Funktion auf anderen Strahlen zu machen und insbesondere das vollkommen reguläre Wachstum für gewisse ganze charakteristische Funktionen nachzuweisen. Daraus ergeben sich dann auch Aussagen über die Nullstellenverteilung dieser charakteristischen Funktionen. Es ist offensichtlich, dass die vorliegenden Untersuchungen, falls sie sich als genügend interessant erweisen, nur einen Anfang darstellen können. Auf jeden Fall werden auf diese Weise tiefliegende Sätze der Funktionentheorie für die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar. Wir setzen hier die Arbeit [3] als bekannt voraus.

Wenn wir eine analytische Funktion $f(z)$ $(z = re^{i\vartheta})$ in einem Winkel $\{\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\}$ $(\vartheta_2 - \vartheta_1 < 2\pi)$ betrachten und das Wachstum der Funktion $M(r, \vartheta_1, \vartheta_2) = \max\limits_{\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2} |f(re^{i\vartheta})|$ durch eine verfeinerte Ordnung (v. O.) $\varrho(r)$ beschreiben, so werden wir nicht unbedingt verlangen, dass

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(r, \vartheta_1, \vartheta_2)}{r^{\varrho(r)}}$$

positiv ist, wie es bei einer unmittelbaren Übertragung der Definition 5 aus [3] auf einen Winkel geschehen müsste; es wird genügen, dass dieser obere Limes endlich ist. Die Hilfssätze 1 bis 4 gelten der vorliegenden Arbeit auch für diesen Fall.

Wir erklären nun gemäss B. J. LEWIN [2] eine Reihe von Begriffen.

Definition 1. Die Funktion $f(z)$ sei analytisch und von der verfeinerten Ordnung $\varrho(r) \to \varrho$ im Winkel $\{\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\}$. Dann nennen wir die Funktion

$$g_f(\vartheta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |f(re^{i\vartheta})|}{r^{\varrho(r)}} \quad (\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2)$$

den Indikator von $f(z)$. Dieser heisst trigonometrisch, wenn er die Gestalt $g(\vartheta) = a \cos \varrho\vartheta + b \sin \varrho\vartheta$ hat.

Der Indikator hängt somit in starkem Masse von der verfeinerte Ordnung ab, mit deren Hilfe er gebildet wird. Verschwindet er identisch im betrachteten Winkel, was nach der eingangs gemachten Bemerkung möglich ist, so müssen wir erwägen, ob die v. O. zweckmässig gewählt wurde.

Definition 2. Ist E eine Menge positiver Zahlen, $E^r = \{E \cap (0, r)\}$, mes (E^r) das Mass von E^r, so heisst E vom relativen Mass Null, wenn

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\text{mes}\,(E^r)}{r} = 0\,;$$

eine solche Menge E nennen wir kurz eine E_0-Menge.

Definition 3. Die in Definition 1 eingeführte Funktion $f(z)$ heisst von vollkommen regulärem Wachstum (v. r. W.) auf der Strahlenmenge $R_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}$ ist die Menge der entsprechende ϑ-Werte), wenn

$$g_{f,r}(\vartheta) = \frac{\log |f(re^{i\vartheta})|}{r^{\varrho(r)}}$$

gleichmässig gegen $g_f(\vartheta)$ strebt, falls $\vartheta \in \mathfrak{M}$ und r über alle Schranken wächst und dabei alle positiven Werte annimmt, vielleicht mit Ausnahme einer E_0-Menge, die für alle Strahlen aus $R_{\mathfrak{M}}$ gemeinsam ist. Wir schreiben dafür kurz

$$\lim_{r \to \infty}{}^{*}\, g_r(\vartheta) = g(\vartheta)\,. \tag{1}$$

Dagegen heisst $f(z)$ von v. r. W. im Winkel $\{\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\}$, wenn diese gleichmässige Konvergenz für jede Strahlenmenge der Form $\{\vartheta_1 + \varepsilon \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2 - \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ eintritt. Schliesslich heisst die ganze Funktion $f(z)$ von v. r. W. schlechthin, wenn die gleichmässige Konvergenz für $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ eintritt.

Besteht ein Limes der Form (1) nur für ein ϑ, so sagen wir, $f(z)$ habe das v. r. W. auf dem betreffenden Strahl.

Lemma 1. *Die Funktion $f(z)$ sei analytisch in der Halbebene $\{0 < \vartheta < \pi\}$ und stetig in $\{0 \leqq \vartheta \leqq \pi\}$. Gehört sie hier höchstens zum Mitteltyp der Ordnung* 1 *und ist*

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(x)|}{1 + x^2} \, dx < \infty$$

($\overset{+}{\log}\, a = \max(0, a)$ *für alle* $a > 0$), *so hat sie das v. r. W. im Winkel* $\{0 < \vartheta < \pi\}$ *mit dem Indikator*

$$g(\vartheta) = k \sin \vartheta\,, \quad k = \lim_{r \to \infty}{}^{*} \frac{\log |f(ir)|}{r}$$

([2]; V. Satz 7).

Lemma 2. *Die Funktion* $f(z)$ *sei analytisch im Innern eines Winkels* $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ *und habe dort die v. O.* $\varrho(r)$; $R_{\mathfrak{M}}$ *sei eine Strahlenmenge aus einem inneren Winkel* $\vartheta_1 < \alpha \leqq \vartheta \leqq \beta < \vartheta_2$. *Wenn* $f(z)$ *auf jedem Strahl von* $R_{\mathfrak{M}}$ *das v. r. W. besitzt, dann besitzt sie es auch auf* $R_{\mathfrak{M}}$. ([2]; III. 1).

Satz 1. *Die charakteristische Funktion* $h_0(z)$ *der Verteilungsfunktion* $H_0(x)$, *für die* $H_0(X_0) = 0$, $H_0(X_0 + \varepsilon) > 0$, $H_0(X_1) = 1$, $(0 \leqq X_0 < X_1 < \infty)$ *gelten möge, ist von v. r. W. mit dem Indikator*

$$g(\vartheta) = \begin{cases} -X_0 \sin \vartheta & (0 \leqq \vartheta \leqq \pi) \\ -X_1 \sin \vartheta & (-\pi \leqq \vartheta \leqq 0)\,, \end{cases}$$

und zwar bezüglich der v. O. $\varrho(r) \equiv 1$.

Beweis. Bekanntlich (vgl. Satz 1 aus [3]) ist $h_0(z)$ ganz vom Mitteltyp der Ordnung 1; ferner erkennt man leicht

$$k = \lim_{r \to \infty} \frac{\log h_0(-ir)}{r} = X_1\,,$$

so dass sich der Indikator und das v. r. W. in $\{-\pi < \vartheta < 0\}$ sofort aus Lemma 1 ergeben. Somit besteht das v. r. W. auf jedem Strahl in $\{-\pi < \vartheta < 0\}$. Setzen wir in Lemma 2 etwa

$$\vartheta_1 = -\pi - \varepsilon\,, \quad \alpha = -\pi\,, \quad \beta = 0\,, \quad \vartheta_2 = \varepsilon\,,$$

so bekommen wir nun das v. r. W. auf der Strahlenmenge $\{-\pi \leqq \vartheta \leqq 0\}$, wenn wir noch beachten, dass die Strahlenmenge des v. r. W. in $\vartheta_1 < \alpha \leqq \vartheta \leqq \beta < \vartheta_e$ stets abgeschlossen ist ([2]; III. 1).

Wir wenden uns nun der oberen Halebene zu und setzen zunächst $X_0 = 0$ voraus. Dann liefert die bei jedem $\eta > 0$ geltende Abschätzung

$$1 \geqq h_0(ir) \geqq \int_0^{\eta} e^{-rX} \, d\, H_0(x) \geqq e^{-r\eta} H(\eta)$$

die Beziehung

$$\lim \frac{\log h_0(ir)}{r} = 0\,,$$

und Lemma 1 führt zur Behauptung für $0 < \vartheta < \pi$. Wenn $X_0 > 0$, schliessen wir ebenso, nur benutzen wir die Darstellung

$$h_0(z) = e^{izX_0}\, h_1(z)\,, \quad h_1(z) = \int_0^{X_1 - X_0} e^{izv}\, \mathrm{d}H_0(X_0 + v)$$

aus der wir

$$\lim \frac{\log h_0(ir)}{r} = -X_0 \tag{3}$$

gewinnen. Somit hat $g(\vartheta)$ auch in $0 < \vartheta < \pi$ die angegebene Gestalt, und $h_0(z)$ hat das v. r. W. Nun erkennen wir wie oben das v. r. W. auf der Strahlenmenge $\{0 \leqq \vartheta \leqq \leqq \pi\}$. Das v. r. W. in der ganzen Ebene ist hiernach klar.

Aus den Beweis ergibt sich auch das

Korollar 1. *Hat die Verteilungsfunktion $H_0(x)$ die Eigenschaft $H_0(X_0) = 0$, $H_0(X_0 + \varepsilon) > 0$ $(0 \leqq X_0 < \infty)$, so hat $h_0(z)$ bezüglich der v. O. $\varrho(r) \equiv 1$ das v. r. W. im Winkel $\{0 < \vartheta < \pi\}$ und den Indikator*

$$g(\vartheta) = -X_0 \sin \vartheta \quad (0 < \vartheta < \pi)\,.$$

Ist $h_0(z)$ eindeutig analytisch in $\{|\vartheta - \tfrac{1}{2}\pi| \leqq \tfrac{1}{2}\pi + \delta\}$ für irgendein $\delta > 0$, so besteht das v. r. W. sogar auf der Strahlenmenge $\{0 \leqq \vartheta \leqq \pi\}$.

Wir gehen nun zu charakteristischen Funktionen vom Maximaltyp der Ordnung 1 über. Dazu benötigen wir das

Lemma 3. *Die Funktion $f(z)$ sei im Innern des Winkels $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ analytisch und von der v. O. $\varrho(r)$; auf den Schenkeln dieses Winkels sei sie stetig. Wenn sie einen trigonometrischen Indikator hat und auf einem gewissen Strahl im Innern dieses Winkels von v. r. W. ist, so hat sie im Innern des Winkels das v. r. W.* ([2], III, Satz 6).

Satz 2. *Die Verteilungsfunktion $H_0(x)$ mit $H_0(0) = 0$ habe die Darstellung*

$$1 - H_0(x) = \exp\{-x^{1+\alpha(x)}\}$$

mit der ausgearteten v. O. $\alpha(x)$ (vgl. Definition 6 aus [3]).

Dann gehört die entsprechende ganze charakteristische Funktion $h_0(z)$ zum Maximaltyp der Ordnung 1, und sie hat das v. r. W. mit dem Indikator

$$g(\vartheta) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq \vartheta \leqq \pi) \\ -\sin\vartheta & (-\pi \leqq \vartheta \leqq 0), \end{cases} \tag{4}$$

und zwar bezüglich der v. O. $\varrho(r) = 1 + 1/[\alpha(\varphi(r))]$, wo $\varphi(r) = x$ die Umkehrfunktionen zu $r = x^{\alpha(x)}$ ist (vgl. Satz 2 aus [3]).

Beweis. Die Sätze 1 und 2 aus [3] besagen, dass die charakteristische Funktion $h_0(z)$ ganz und vom Maximaltyp der Ordnung 1 ist. Weiter ist $h_0(z)$ nach Satz 2 aus [3] auf dem durch $\vartheta = -\frac{1}{2}\pi$ bestimmten Strahl von v. r. W. Wie das Korollar 1 aus [3] lehrt, hat $h_0(z)$ in $\{-\pi \leqq \vartheta \leqq 0\}$ den trigonometrischen Indikator (4). Aus Lemma 3 ergibt sich daher das v. r. W. im Winkel $\{-\pi < \vartheta < 0\}$.

Wir kommen nun zur oberen Halbebene. Zunächst haben wir $\lim\limits_{r\to\infty} r^{1-\varrho(r)} = 0$, weil

$$\lim_{r\to\infty} \log r^{1-\varrho(r)} = -\lim_{r\to\infty} \frac{\log r}{\alpha(\varphi(r))} = -\lim_{x\to\infty} \log x = -\infty .$$

Dann aber ist nach Korollar 1

$$\overline{\lim}\, \frac{\log|h_0(re^{i\vartheta})|}{r^{\varrho(r)}} = \overline{\lim}\, r^{1-\varrho(r)} \frac{\log|h_0(re^{i\vartheta})|}{r} = 0 .$$

für $|\vartheta - \frac{1}{2}\pi| < \frac{1}{2}\pi$. Der Indikator ist also der angegebene, und aus (3) ersieht man ebenso das v. r. W. auf der positiv imaginären Achse (NB: (3) gilt auch bei $X_1 = \infty$). Nach Lemma 3 besteht also das v. r. W. in der oberen Halbebene. Zum Schluss brauchen wir nur noch Lemma 2 in derselben Weise einsetzen wir wie es im Beweis zu Satz 1 getan haben, um das v. r. W. von $h(z)$ in der ganzen Ebene einzusehen.

Um das v. r. W. bei charakteristischen Funktionen höherer Ordnung nachzuweisen, brauchen wir ein weiteres Lemma, das uns auf das Vorhandensein eines trigonometrischen Indikators schliessen lässt. Das Korollar 1 aus [3] reicht jetzt nicht mehr aus.

Lemma 4. *Die Funktion $f(z)$ sei im Innern des Winkels $|\arg z| \leqq \pi/2\varrho$ analytisch und von der v. O. $\varrho(r) \to \varrho$, auf den Schenkeln dieses Winkels sei sie stetig; ferner gelte für den Indikator $g(\pm \pi/2\varrho) = 0$. Dann ist $g(\vartheta) = g(0)\cos\varrho\vartheta$ $(|\vartheta| \leqq \pi/2\varrho)$* ([2]; Anhang VII. 1).

Wir untersuchen nun zunächst das Verhalten spezieller charakteristischer Funktionen.

Lemma 5. *Es sei $H_0(x) = 1 - \exp\{-kx^{1+\alpha}\}$ $(x > 0)$ mit einer Konstanten $\alpha > 0$. Dann gilt bei $r \to \infty$*

$$\left|h_0\left(r\exp\left(-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2\varrho}\right)i\right)\right| = O(r^{\varrho}),\ \left(\varrho = 1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Beweis. Wir benutzen die Idee des Beweises von Satz 2 aus [3], bei deren Durchführung wir in diesem Falle jedoch den Cauchyschen Integralsatz hinzuziehen müssen.

In der Formel

$$h_0(z) = \int_0^\infty e^{izu}\,\mathrm{d}H_0(u) = 1 + iz \int_0^\infty e^{izu}(1 - H_0(u))\,\mathrm{d}u \tag{4a}$$

haben wir $iz = r \exp\{i\pi/2\varrho\}$ zu setzen und

$$\int_0^\infty \exp\{ure^{i\pi/2\varrho} - ku^{1+\alpha}\}\,\mathrm{d}u = O(r^{1/\alpha}) \tag{5}$$

zu beweisen. Dazu wählen wir eine Zahl $\delta > 0$, so dass mit der Abkürzung $\xi = [k^{-1}(1 + \delta)\cos(\pi/2\varrho)]^{1/\alpha}$

$$\xi < k\xi^{1+\alpha} \tag{6}$$

ist, und definieren sodann in Analogie zu (12) in [3] die Funktion $x_1(r)$ durch

$$kx_1^\alpha = r(1 + \delta)\cos\frac{\pi}{2\varrho}, \quad x_1 = \xi r^{1/\alpha}.$$

Das Integrationsintervall in (5) wird durch x_1 zerlegt. Der Betrag des zweiten Integrals ist dann höchstens gleich

$$\int_{x_1}^\infty \exp\left\{u\left[r\cos\frac{\pi}{2\varrho} - ku^\alpha\right]\right\}\mathrm{d}u < \int_{x_1}^\infty \exp\left\{-u\delta r\cos\frac{\pi}{2\varrho}\right\}\mathrm{d}u =$$
$$= o\left(\exp\left\{-\xi r^\varrho \delta\cos\frac{\pi}{2\varrho}\right\}\right).$$

Auf das übrigbleibende Hauptglied in (5) wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an:

$$\int_0^{x_1} \exp\{re^{i\pi/2\varrho}u - ku^{1+\alpha}\}\,\mathrm{d}u + ix_1\int_0^{\pi/2(1+\alpha)} \exp\{rx_1e^{i((\pi/2\varrho)+\psi)} - \tag{7}$$
$$- kx_1^{1+\alpha}e^{i\psi(1+\alpha)}\}\,e^{i\psi}\,\mathrm{d}\psi = \mathrm{e}^{i\pi/2(1+\alpha)}\int_0^{x_1}\exp\{i(rw - kw^{1+\alpha})\}\,\mathrm{d}w = O(r^{1/\alpha}).$$

Das zweite Glied auf der linken Seite ist dem Betrag nach höchstens gleich

$$x_1\int_0^{\pi/2(1+\alpha)} \exp\left\{r^\varrho\left(\xi\cos\left(\frac{\pi}{2\varrho} + \psi\right) - k\xi^{1+\alpha}\cos(\psi(1 + \alpha))\right)\right\}\mathrm{d}\psi\ ;$$

dabei ist im Integrationsintervall $\cos((\pi/2\varrho) + \psi) \leqq \cos(\psi(1 + \alpha))$ und $(2/\pi) \cdot [\frac{1}{2}\pi - \psi(1 + \alpha)] \leqq \cos\psi(1 + \alpha)$; erinnern wir uns an (6), so erhalten wir hiermit die Abschätzung

$$x_1 \int_0^{\pi/2(1+\alpha)} \exp\left\{r^\rho(\xi - k\xi^{1+\alpha}) \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \psi(1+\alpha)\right)\right\} d\psi = O(r^{-1}) .$$

Aus Formel (5) folgt sofort das

Lemma 6. *Für die charakteristische Funktion der Verteilungsfunktion* $H_0(x) = = \text{const.} \int_0^x \exp\{-ku^{1+\alpha}\} du$ $(x \geqq 0)$ *besteht die Abschätzung*

$$h_0\left(r \,.\, \exp\left(-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2\varrho}\right) i\right) = O(r^{1/\alpha}) .$$

Wir benötigen auch noch ein Lemma über den Indikator eine Funktion, die in einem Winkel analytisch ist und die Ordnung ϱ besitzt.

Lemma 7. *Ist* ϑ_0 *ein Punkt, in dem der Indikator* $g(\vartheta)$ *ein Maximum annimmt, so ist für* $|\vartheta - \vartheta_0| \leqq \pi/\varrho$

$$g(\vartheta) \geqq g(\vartheta_0) \cos \varrho(\vartheta - \vartheta_0) .$$

Daher sind die Intervalle, in denen $g(\vartheta) > 0$ *ist, niemals kürzer als* π/ϱ ([2]; I. 16 f).

Satz 3. *Die charakteristischen Funktionen* h_0^1 *und* h_0^2 *der Verteilungsfunktionen*

$$H_0^1(x) = 1 - \exp\{-kx^{1+\alpha}\} \quad (x \geqq 0)$$

bzw.

$$H_0^2(x) = \text{const.} \int_0^x \exp\{-ku^{1+\alpha}\} du \quad (x \geqq 0)$$

haben bezüglich der v. O. $\varrho(r) \equiv \varrho$ *im Winkel* $\Delta_\varrho = \{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| < \pi/2\varrho\}$ *den trigonometrischen Indikator*

(8) $$g(\vartheta) = k^{-1/\alpha} c \cos \varrho(\vartheta + \tfrac{1}{2}\pi)$$

und das v. r. W.; dabei ist $\varrho = 1 + 1/\alpha$, $c = \alpha(1 + \alpha)^{-\varrho}$.

Diese Behauptungen bestehen ferner für alle Verteilungsfunktionen $\hat{H}_0^\lambda(x)$, *die nur für* $x \geqq X > 0$ *mit* $H_0^\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2)$ *übereinstimmen. Ist ferner* $H(x)$ *eine beliebige Verteilungsfunktion, deren charakteristische Funktion* $h(z)$ *ganz und höchstens vom Minimaltyp der Ordnung* ϱ *tst, so bestehen die Behauptungen sowohl für die Mischung*

(9) $$D(x) = \alpha H_0^\lambda(x) + \beta H(x)$$

$(\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta \geqq 0)$ *als auch für die Faltung* $H_0^\lambda(x) * H(x)$.

Bemerkung. Aus der Arbeit [4] von RAMACHANDRAN kennen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die man der Verteilungsfunkion $H(x)$ auferlegen muss, damit ihre charakteristische Funktion $H(z)$ höchstens zum Minimaltyp der Ordnung ϱ gehört. Satz 3 gibt somit eine bekannte Klasse von Verteilungsfunktionen an, deren charakteristische Funktionen in Δ_ϱ einen trigonometrischen Indikator und das v. r. W. haben.

Beweis. Auf $H_0^1(x)$ ist Satz 3 aus [3] unmittelbar anwendbar und liefert

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log |h_0^1(-ir)|}{r^\varrho} = k^{1/\alpha} c\,. \tag{10}$$

Es liegt also das v. r. W. auf der negativ imaginären Achse vor. Im Winkel Δ_ϱ ist dann wegen Lemma 7 $g(\vartheta) > 0$. Da $g(\vartheta)$ stetig ist, muss $g(-\frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}) \geqq 0$ sein, nach Lemma 5 aber ist $g(-\frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}) = 0$. Mit Lemma 4 bekommen wir nun die Behauptung über den Indikator. Lemma 3 führt uns nun zum v. r. W. von $h_0^1(z)$ in Δ_ϱ.

Wir betrachten nun die charakteristische Funktion

$$h_0^2(z) = \text{const.} \int_0^\infty \exp\{izu - ku^{1+\alpha}\}\, du \tag{11}$$

von $H_0^2(x)$. Da die Relation (10) für $h_0^1(-ir)$ gilt, muss sie – vgl. (4a) – auch für $h_0^2(-ir)$ richtig sein, und diese Tatsache wird auch für den späteren Verlauf des Beweises bedeutsam sein. Zunächst ergibt sich die Behauptung über $H_0^2(x)$, wie die über $H_0^1(x)$, nur muss Lemma 5 durch Lemma 6 ersetzt werden.

Die charakteristische Funktion $\hat{h}_0^\lambda(z)$ von $\hat{H}_0^\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2)$ hat die Darstellung $\hat{h}_0^\lambda(z) = h_0^\lambda(z) + l(z)$, wo $l(z)$ eine ganze Funktion höchstens vom Mitteltyp der Ordnung 1 ist; vgl. Satz 1 aus [3]. Dann aber gilt wegen Lemma 5 bzw. Lemma 6 für eine gewisse Zahl $g > 0$ und alle genügend grossen r

$$\left|\hat{h}_0^\lambda\left(r\,.\,\exp.\left(-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2\varrho}\right)i\right)\right| < e^{gr}$$

d. h. es ist – wiederum wegen Lemma 7 – $g_{h_0^\lambda}(-\frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}) = 0$. Da die Beziehung (10) für $h_0^\lambda(z)$ gilt, ist sie offenkundig auch für $\hat{h}_0^\lambda(z)$ richtig. Daher verhelfen uns nun wieder die eingangs bei der Behandlung von $h_0^1(z)$ erläuterten Schlüsse zum Ziel.

Für die charakteristische Funktion $d(z)$ der Verteilungsfunktion (9) gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle genügend grossen r

$$d(-ir) < \exp\{(k^{-1}c + \varepsilon)\, r^\varrho\}\,,$$

weil $h(z)$ höchstens zum Minimaltyp der Ordnung ϱ gehören soll und (10) für $h_0^\lambda(z)$ gilt. Wegen (10) ist aber auch

$$d(-ir) > \alpha \exp\{(k^{-1/2}c - \varepsilon)\, r\}$$

für genügend grosse r richtig; folglich genügt $d(z)$ der Bedingung (10). Aus Lemma 5 bzw. 6 erschliessen wir – bei beliebigem $\varepsilon > 0$ und $r > r_0(\varepsilon)$ – die Ungleichung $d(r \exp(-\frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1})i) < \exp\{\varepsilon r^{\rho}\}$, und somit ist $g_d(-\frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}) = 0$. Daher können wir wie oben die Behauptung erschliessen.

Die charakteristische Funktion der Verteilungsfunktion $H_0^{\lambda}(x) * H(x)$ nennen wir $e(z) = h_0^{\lambda}(z)\, h(z)$. Die diesbezüglichen Behauptungen des Satzes folgen einfach aus

$$g_e(\vartheta) \leqq g_{h_0^\lambda}(\vartheta) + \overline{\lim} \frac{\log h(-ir)}{r^{\varrho}} = g_{h_0^\lambda}(\vartheta)\,, \quad g_e(-\tfrac{1}{2}\pi) = g_{h_0^\lambda}(-\tfrac{1}{2}\pi)\,,$$

denn hiernach hat der Indikator wiederun die Form (8), wie aus Lemma 7 erhellt.

Der soeben bewiesene Satz wirft naturgemäss die Frage auf, ob es nicht auch charakteristische Funktionen der Ordnung $\varrho > 1$ mit v. r. W. in der ganzen Ebene gibt. In dieser Hinsicht beschränken wir uns auf einen naheliegenden Spezialfall. Ein passendes Hilfsmittel dabei ist das folgende Lemma, das vermutlich noch zu allgemeineren Resultaten über den Indikator zu führen vermag als wir hier anstreben.

Lemma 8. *Die Funktion $f(z)$ sei analytisch in $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, stetig in $\{\operatorname{Re} z \geqq 0\}$, und es gelte*

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\lambda}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log |f(re^{i\psi})| \cos\psi \, d\psi < \infty\,.$$

Wenn

$$\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log |f(ir)|}{r} \leqq 0$$

und

$$\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log |f(-ir)|}{r} < 0$$

so ist $f(s) \equiv 0$ ([1]; 3.42).

Lemma 9. *Die Funktion $f(z)$ sei analytisch im Innern eines Winkels mit der Öffnung π/A und auch noch auf seiner Begrenzung stetig; ihre Ordnung sei im Innern des Winkels kleiner als A; auf den Schenkeln sei $f(z)$ beschränkt. Dann ist auch im Innern des Winkels beschränkt* ([2], I. 14).

Satz 4. *Die charakteristische Funktion*

$$(11) \qquad h_0(z) = \text{const.} \int_0^\infty \exp\{izu - ku^{1+\alpha}\}\, du \qquad (1 < \alpha < \infty)$$

ist $O(r^{1/\alpha})$ *in* $\frac{1}{2}\pi\varrho^{-1} \leqq |\vartheta + \frac{1}{2}\pi| \leqq \pi\varrho^{-1}$, *beschränkt in* $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| \geqq \pi/\varrho$; *sie hat bezüglich* $\varrho(r) \equiv \varrho$ *den Indikator*

$$g(\vartheta) = \begin{cases} k^{-1/\alpha}c \quad \cos\varrho(\vartheta + \frac{1}{2}\pi) & (\vartheta \in \Delta_\varrho) \\ 0 & (\vartheta \notin \Delta_\varrho) \end{cases}$$

und ist von v. r. W. in der ganzen Ebene.

Beweis. Nach Satz 3 und Korollar 1 haben wir den Indikator nur noch in den zwei übrigbleibenden Winkeln zu berechnen. Dazu zeigen wir zunächst, dass gleichmässig

$$h_0(re^{i\vartheta}) = O(r^{1/\alpha}), \quad \left(\frac{\pi}{2\varrho} \leqq \left|\vartheta + \frac{\pi}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{\varrho}\right). \tag{12}$$

Auf dem durch den Winkel $\vartheta = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}$ bestimmten Strahl kennen wir diese Eigenschaft schon aus Lemma 6. Jetzt betrachten wir die durch

$$\vartheta_\nu = -\frac{\pi}{2} + \nu\frac{\pi}{2\varrho} \quad (\nu = 2, \ldots, \hat{\nu})$$

festgelegten Strahlen, wobei $\bar{\nu}$ die grösste ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{\hat{\nu}}{\varrho} < 1 \tag{13}$$

ist. Wir setzen also in (11) $iz = r\exp\{(\nu\pi i/2\varrho)\}$ und zerlegen das Integrationsintervall durch eine Zahl $x_1 = \xi r^{1/\alpha}$, wie wir es beim Beweis des Lemmas 5 getan haben; die positive Zahl ξ wird genügend gross gewählt. Die Überlegungen des genannten Beweises lassen sich nun wiederholen, nur wird (7) durch

$$\int_0^{x_1} \exp\{rue^{(i\nu\pi/2\varrho)} - ku^{1+\alpha}\}\,du + ix_1 \int_0^{\hat{\alpha}} \exp\{r^\varrho(\xi e^{i((\nu\pi/2\varrho)+\psi)} -$$
$$- k\xi^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)\psi})\}\,e^{i\psi}\,d\psi = e^{i\hat{\alpha}} \int_0^{x_1} \exp\{iru - ku^{1+\alpha}e^{i\pi(1-(\nu-1)\alpha)/2}\}\,du$$

ersetzt, wo gemäss (13)

$$0 < \hat{\alpha} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\nu}{\varrho}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - (\nu - 1)\,\alpha}{1 + \alpha} < \frac{\pi}{2}.$$

Das rechts stehende Integral ist aber für $1 < \nu \leqq \hat{\nu}$ offenkundig beschränkt; das zweite Glied der linken Seite kann wie früher als gegen Null konvergierend erkannt werden. Jetzt können wir Lemma 9 einsetzen und gewinnen $|h_0(z)| \leqq C$ in $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| \geqq \pi/\varrho$. Wenden wir Lemma 9 auf $[h_0(z)]/[(z+1)^{1/\alpha}]$ an, so folgt (12).

Damit genügt $h_0(z)$ in jeder Halbebene

$$\left\{\hat{\vartheta}_0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\varrho} + \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\varrho} + \vartheta_0\right\}$$

$(0 \leqq \vartheta_0 < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}$ den Voraussetzungen des Lemmas 8, und folglich ist $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,(h_0(re^{i\vartheta_0})/r) = 0$ erst recht verschwindet also der Indikator in den uns interessierenden Winkeln.

Nun gewinnen wir das v. r. W. schnell. Im Winkel Δ_ϱ kennen wir es schon aus Satz 3; auf der Strahlenmenge $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| \leqq \pi/2\varrho\}$ finden wir es sodann wie im Beweis des Satzes 1. Lemma 3 und Korollar 1 führen auf das v. r. W. im Winkel $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| > > \pi/2\varrho\}$, woraus es wieder auf der Strahlenmenge $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi| \geqq \pi/2\varrho$ folgt.

Um auf Grund unserer bisherigen Ergebnisse eine Aussage über die Nullstellenverteilung bei charakteristischen Funktionen zu gewinnen, führen wir die folgende Begriffsbildung ein. $\mathfrak{N}$ sei eine Punktmenge in der komplexen Zahlenebene; $n(r, \vartheta_1, \vartheta_2)$ gibt die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{N}$ im Sektor $\{|z| \leqq r,\ \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2\}$ an.

Definition 4. Die Punktmenge $\mathfrak{N}$ hat im Winkel $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ eine Dichte mit dem Exponenten $\varrho(r)$, wenn für alle Werte von ϑ und θ $(0 \leqq \vartheta_1 < \vartheta < \theta < \vartheta_2 \leqq 2\pi)$ höchstens mit Ausnahme einer abzählbaren Menge, der Grenzwert.

$$\Delta(\vartheta, \theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{r^{\varrho(r)}}$$

existiert.

Wir brauchen nun das folgende Lemma, vor dessen Formulierung wir darauf hinweisen, dass der Indikator in jedem Punkt — mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen — eine Ableitung besitzt; in den Ausnahmenpunkten gibt es eine rechts- und eine linksseitige Ableitung ([2]; I. 16).

Lemma 10. *Ist die analytische Funktion $f(z)$ mit der v. O. $\varrho(r)$ im Innern des Winkels $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ von v. r. W., so existiert für alle Werte der Grössen ϑ und θ — höchstens mit Ausnahme von abzählbar vielen — der Grenzwert*

$$\frac{1}{2\pi\varrho}\, s(\vartheta, \theta) = \lim \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{r^{\varrho(r)}} \quad (\vartheta_1 < \vartheta < \theta < \vartheta_2)\,,$$

wo

$$s(\vartheta, \theta) = g'(\theta) - g'(\vartheta) + \varrho^2 \int_\vartheta^\theta g(\varphi)\, d\varphi\,.$$

Die Ausnahmemenge kann nur auf Punkten bestehen, in welchen für die Ableitung des Indikators $g'(\varphi + 0) \neq g'(\varphi - 0)$ gilt ([2]; III. Satz 3.).

Aus diesem Lemma erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Satz 5. *Hat die ganze charakteristische Funktion* $h(z)$ *der Ordnung* ϱ *in einem Winkel einen trigonometrischen Indikator, so haben ihre Nullstellen im Innern dieses Winkels die Dichte Null. Die in Satz 4 behandelte Funktion* $h_0(z)$ *hat darüberhinaus in allen Winkeln der Form* $\{|\vartheta + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}| \leqq \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ *die Dichte* $1/2\pi\varrho$.

Literatur

[1] *M. L. Cartwright:* Integral functions, Cambridge 1956.

[2] *B. J. Lewin:* Nullstellenverteilung ganzer Funktionen, Berlin 1962.

[3] *H. J. Rossberg:* Der Zusammenhang zwischen einer ganzen charakteristischen Funktion einer verfeinerten Ordnung und ihrer Verteilungsfunktion, Czech. Math. J. *17* (*92*) 1967, 317—334.

[4] *B. Ramachandran:* On the order and the type of entire characteristic functions, Ann. math. Stat. *33*, 1238—1255 (1962).

Anschrift des Verfassers: Berlin W8, Mohrenstrasse 39 (Deutsche Akademie der Wissenschaften, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik).