Czechoslovak Mathematical Journal

Hans-Joachim Rossberg

Der Zusammenhang zwischen einer ganzen charakteristischen Funktion einer verfeinerten Ordnung und ihrer Verteilungsfunktion

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 3, 317–334

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100781

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN EINER GANZEN CHARAKTERISTISCHEN FUNKTION EINER VERFEINERTEN ORDNUNG UND IHRER VERTEILUNGSFUNKTION

HANS-JOACHIM ROSSBERG, Berlin

(Eingegangen am 1. Februar 1966)

Die Verteilungsfunktion $H(x)$ habe die ganze charakteristische Funktion

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izu}\, \mathrm{d}H(u) \quad (z = t + iy)\,. \tag{1}$$

E. LUKACS ([2]; 7.2) und B. RAMACHANDRAN [4] haben untersucht, in welcher Weise das Anwachsen der Funktion $|h(z)|$ mit Eigenschaften von $H(x)$ verknüpft ist. Wir werden hier die Überlegungen beider Autoren weiterführen, indem wir den Begriff der verfeinerten Ordnung einer ganzen Funktion heranziehen. Es handelt sich jedoch dabei nicht um eine einfache Übertragung der Ideen und Ergebnisse von Lukacs und Ramachandran, sondern es wird darüberhinaus in den Sätzen 2 und 3 ein schärferes Resultat formuliert, nämlich die Existenz der Limites (9) und (26). In der Terminologie von G. Valiron [5] bedeutet dies das vollkommen reguläre Wachstum von $h_0(z)$. Zum Schluss wird sich eine einfache Anwendung auf die Nullstellenverteilung von ganzen charakteristischen Funktionen ergeben, wobei wir zugleich einfache hinreichende Kriterien über $H(x)$ entwickeln, mit denen man entscheiden kann, ob $h(z)$ zur Konvergenz- oder Divergenzklasse des Minimaltyps einer endlichen Ordnung $\varrho > 0$ gehört.

Definition 1. Es sei $s(r)$ eine für $r > 0$ definierte, positive und monoton zunehmende Funktion von r. Wenn

$$\overline{\lim}\, \frac{\log s(r)}{\log r} = \varrho$$

endlich ist, so hat $s(r)$ die Ordnung ϱ; andernfalls ist $s(r)$ von unendlich grosser Ordnung.

Definition 2. Die soeben eingeführte Funktion $s(r)$ heisst im Falle $0 < \varrho < \infty$ vom Minimal-, Mittel- oder Maximaltyp, je nachdem

$$\overline{\lim} \frac{s(r)}{r^{\rho}} = \tau$$

Null, endlich und positiv, oder unendlich ist.

Mit der ganzen Funktion $h(z)$ betrachten wir nun

$$M(r, h) = \max_{|z|=r} |h(z)| \tag{2}$$

und erklären:

Definition 3. Ordnung und Typ der Funktion $h(z)$ ist Ordnung und Typ der Funktion $s(r) = \log M(r, h)$.

Über ganze charakteristische Funktionen ist das folgende wichtige Resultat bekannt ([2], 7.1 und 7.2; [4]).

Satz 1. *Es gibt keine ganze charakteristische Funktion mit einer Ordnung $\varrho < 1$ oder vom Minimaltyp der Ordnung 1; jedoch gibt es charakteristische Funktionen jeder Ordnung ϱ mit $1 \leqq \varrho \leqq \infty$, und bei $1 < \varrho < \infty$ gibt es alle drei Typen, bei $\varrho = 1$ den Mittel- und den Maximaltyp.*[1]) *Der Mitteltyp der Ordnung 1 tritt genau bei den Verteilungsfunktionen von beidseitig beschränkten Zufallsgrössen auf.*

Das Anwachsen der Funktion (2) lässt sich noch wesentlich genauer beschreiben, wenn man den von G. Valiron eingeführten Begriff der verfeinerten Ordnung (v. O.) benutzt ([1]; I. 12).

Definition 4. Die für alle $r > 0$ definierte reelle Funktion $\varrho(r)$ heisst eine v. O., wenn zugleich

$$\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \varrho \quad (0 < \varrho < \infty) \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} r\,\varrho'(r) \log r = 0$$

gilt; dabei ist $\varrho'(r)$ die Ableitung von $\varrho(r)$, die für alle genügend grossen r existieren soll.

Definition 5. Die ganze Funktion $h(z)$ hat die v. O. $\varrho(r)$, wenn

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r, h)}{r^{\varrho(r)}} = \tau \quad (0 < \tau < \infty). \tag{3}$$

Bemerkung 1. Die Unterteilung jeder v. O. in die drei Typen gemäss Definition 2 wird hier gegenstandslos. Die v. O. $\varrho(r)$ und auch die Zahl τ werden durch $h(z)$ nicht eindeutig bestimmt.

---

1) Sie können auch bei Verteilungsfunktionen $B(x)$ mit $B(0) = 0$ auftreten.

Bemerkung 2. Völlig analog kann man natürlich Ordnung, Typ und v. O. einer analytischen Funktion in einer Halbebene definieren.

Zu jeder ganzen Funktion einer endlichen Ordnung gibt es auch eine v. O. ([1]; I. 12); daher kann man von einem rein funktionentheoretischen Standpunkt aus ohne weiteres auch von analytischen charakteristischen Funktionen einer v. O. sprechen. Wahrscheinlichkeitstheoretisch gewinnt dieser Begriff jedoch mehr Interesse, wenn man die Beziehungen zwischen den analytischen charakteristischen Funktionen einer v. O. und den zugehörigen Verteilungsfunktionen kennt. Diese werden wir jetzt herleiten.

Im weiteren werden wir die folgende Abwandlung des Begriffs der v. O. benötigen.

Definition 6. Die Funktion $\alpha(x)$ heisst eine ausgeartete v. O. (a. v. O.), wenn sie für alle genügend grossen x differenzierbar ist und wenn zugleich

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \infty \quad \text{und} \quad \varliminf_{x\to\infty} A(x) > -1 \tag{4}$$

gilt, wo

$$A(x) = \frac{x\,\alpha'(x)\log x}{\alpha(x)}$$

ist.

Wir stellen nun einige Eigenschaften der v. O. und der a. v. O. zusammen.

Wesentlich am Begriff der v. O. ist, dass $x^{\alpha(x)}$ ein in mancher Hinsicht ähnliches Verhalten wie x^α aufweist. Das erkennt man z. B. an dem folgenden Lemma und der Formel (5). Die Bedeutung des Begriffs der v. O. einer ganzen Funktion beruht in starkem Masse darauf, dass sich tiefliegende klassische Sätze über Ordnung und Typ auf die v. O. übertragen lassen; vgl. die Hilfssätze 5 und 6.

Lemma 1. *Wenn $\alpha(x) \to \alpha$ $(0 < \alpha \leqq \infty)$ eine v. O. oder eine a. v. O. ist, so ist die Funktion $x^{\alpha(x)}$ für genügend grosse x eigentlich monoton.*

Beweis. Es gilt für genügend große x

$$[x^{\alpha(x)}]' = x^{\alpha(x)-1}\,\alpha(x)\,(1 + A(x)) > 0\,. \tag{5}$$

Lemma 2. *Wenn $\alpha(x) \to \alpha$ eine v. O. oder eine a. v. O. ist und wenn $x = \varphi(r)$ die nach Lemma 1 für grosse x eindeutige Umkehrfunktion für $r = x^{\alpha(x)}$ ist, so ist auch*

$$\varrho(r) = 1 + \frac{1}{\alpha(\varphi(r))} \to 1 + \frac{1}{\alpha}\,(0 < \alpha \leqq \infty) \tag{6}$$

eine v. O.

Beweis. Wegen (5) ist

$$\varrho'(r) = -\,\frac{\alpha'(\varphi)}{\alpha^2(\varphi)}\,\varphi'(r) = -\,\frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)}\,\frac{x}{x^{\alpha(x)}\,\alpha(x)\,(1 + A(x))}\,,$$

und daher gilt

$$\lim_{r\to\infty} r\,\varrho'(r)\log r = -\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\alpha(x)\,(1+A(x))} = 0\,.$$

Aus [1] (I. 12) bzw. [2] (7.2) entnehmen wir noch die folgenden Hilfssätze.

Lemma 3. *Wenn $\varrho(r) \to \varrho > 0$ eine v. O. und k eine positive Zahl ist, dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle genügend grossen r*

$$(1-\varepsilon)\,k^{\varrho}r^{\varrho(r)} \leqq (kr)^{\varrho(kr)} \leqq (1+\varepsilon)\,k^{\varrho}r^{\varrho(r)}\,.$$

Lemma 4. *Eine Verteilungsfunktion $H(x)$ hat genau dann eine ganze charakteristische Funktion (1), wenn bei $x \to \infty$ $H(-x) + 1 - H(x) = o(e^{-rx})$ für alle $r > 0$ gilt.*

Satz 2. *$H_0(x)$ sei eine Verteilungsfunktion mit der Eigenschaft $H_0(0) = 0$, und sie gestatte die Darstellung*

$$1 - H_0(x) = \exp\{-kx^{1+\alpha(x)}\}\,, \tag{7}$$

wo k eine positive Konstante und $\alpha(x) \to \alpha$ $(0 < \alpha \leqq \infty)$ eine v. O. oder eine a. v. O. sei.

Dann hat $H_0(x)$ die ganze charakteristische Funktion

$$h_0(z) = \int_0^\infty e^{izu}\,\mathrm{d}H_0(u) = 1 + iz\int_0^\infty e^{izu}(1 - H_0(u))\,du \tag{8}$$

mit der v. O. (6), und es gilt

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} = 1 \quad (\alpha = \infty) \tag{9}$$

bzw.

$$k^{-1/\alpha}c \leqq \varliminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} \leqq \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} \leqq k^{-1/\alpha} \tag{10}$$

$$(0 < \alpha < \infty)\,,$$

wo

$$c^\alpha = \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}$$

gesetzt ist.

Bemerkung. Wegen $k = x^{\log k/\log x}$ kann man die Konstante k durch $\alpha(x)$ ausdrücken; die Darstellung (7) wird wegen einer späteren Anwendung gewählt.

Beweis. Nach Lemma 4 hat $H_0(x)$ eine ganze charakteristische Funktion. Die Formel (8) folgt aus

$$(11) \qquad \int_0^A e^{izu}\, \mathrm{d}H_0(u) = 1 - (1 - H_0(A))\, e^{izA} + iz \int_0^A e^{izu}(1 - H_0(u))\, \mathrm{d}u$$

beim Grenzübergang $A \to \infty$, die absolute Konvergenz der rechten Seite bei beliebigem z ist aus (7) ersichtlich.

Wie Lemma 1 lehrt, gibt es eine Zahl $\xi > 0$, so dass $x^{\alpha(x)}$ für $x \geqq \xi$ eigentlich monoton ist. Nun wählen wir eine Zahl $y < 0$, für die $|y|$ so gross ist, dass die durch

$$(12) \qquad kx_1^{\alpha(x_1)} = |y|\,(1 + \delta_1)\,, \quad kx_2^{\alpha(x_2)} = |y|\,(1 - \delta_2)$$

$(\delta_1 > 0,\ 0 < \delta_2 < 1)$ bestimmten Zahlen $x_1(y)$ und $x_2(y)$ beide grösser als ξ sind. Dann gilt auch

$$(13) \qquad x_1 = \varphi\left(|y|\,\frac{1 + \delta_1}{k}\right), \quad x_2 = \varphi\left(|y|\,\frac{1 - \delta_2}{k}\right).$$

Für alle Zahlen $v \geqq x_1$ liefert (12) die Abschätzung

$$y + kv^{\alpha(v)} \geqq y + kx_1^{\alpha(x_1)} = y + |y|\,(1 + \delta_1) = |y|\,\delta_1\,.$$

Folglich gilt gemäss (8)

$$(14) \quad h_0(iy) = h_0(-i|y|) \leqq 1 + |y| \int_0^{x_1} e^{|y|u}\, \mathrm{d}u + |y| \int_{x_1}^{\infty} \exp\{v[|y| - kv^{\alpha(v)}]\}\, \mathrm{d}v \leqq$$
$$\leqq e^{|y|x_1} + |y| \int_{x_1}^{\infty} e^{-v|y|\delta_1}\, \mathrm{d}v = e^{|y|x_1}\,(1 + o(1))\,.$$

Die entsprechende Abschätzung nach unten gewinnen wir nun schnell. Vermöge (8) gilt nämlich

$$(15) \qquad h_0(iy) \geqq |y| \int_0^{x_2} e^{|y|u}(1 - H_0(u)\, \mathrm{d}u \geqq (1 - H_0(x_2))\,(e^{|y|x_2} - 1)\,,$$

und kraft (7) und (12) ergibt sich daraus

$$(16) \qquad h_0(iy) \geqq e^{|y|x_2\delta_2}\,(1 + o(1))\,.$$

Um den Fall des endlichen und des unendlichen α nicht unterscheiden zu müssen, setzen wir im letzteren $1/\alpha = 0$, also $\varrho = 1$. Nach Lemma 2 ist

$$\varrho(r) = 1 + \frac{1}{(\alpha\ \varphi(r))} \to 1 + \frac{1}{\alpha}$$

eine v. O.; also gilt zufolge Lemma 3 bei beliebigen $\varepsilon > 0$ für genügend grosse $|y|$ (vgl. (12) und (13))

$$\frac{1+\delta_1}{k} x_1|y| = \left\{\frac{1+\delta_1}{k}|y|\right\}^{1+(1/\alpha(x_1))} = \left\{\frac{1+\delta_1}{k}|y|\right\}^{\varrho((1+\delta_1)|y|/k)} \leqq$$

$$\leqq (1+\varepsilon)\left(\frac{1+\delta_1}{k}\right)^{\varrho}|y|^{\varrho(|y|)}$$

$$\frac{1-\delta_2}{k} x_2|y| = \left\{\frac{1-\delta_2}{k}|y|\right\}^{\varrho((1-\delta_2)|y|/k)} \geqq (1-\varepsilon)\left(\frac{1-\delta_2}{k}\right)^{\varrho}|y|^{\varrho(|y|)}.$$

Weil $M(|y|, h_0) = h_0(-i|y|)$ ([2]; 7.1), folgt hieraus mit Hilfe von (14) und (16)

$$(17)\quad (1-\varepsilon)\left(\frac{1-\delta_2}{k}\right)^{1/\alpha}\delta_2 + o(1) \leqq \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} \leqq (1+\varepsilon)\left(\frac{1+\delta_1}{k}\right)^{1/\alpha} + o(1).$$

Die Funktion $(1-\delta_2)^{1/\alpha}\,\delta_2$ nimmt, fals $\alpha < \infty$, ihr Maximum bei $\delta_2 = \alpha/(1+\alpha)$ an und hat dort den Wert c; auf der rechten Seite von (17) können wir $\delta_1 > 0$ beliebig klein wählen. Bei $\varrho = 1$ können wir δ_2 beliebig nahe bei 1 wählen. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt aus (17) die Behauptung.

Korollar 1. *Für den Indikator*

$$\chi_0(\varphi) = \overline{\lim}\,\frac{\log|h_0(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}}$$

der Funktion (8) *gilt bei* $0 < \alpha \leqq \infty$ *und* $k = 1$

$$\chi_0(\varphi) \leqq |\sin\varphi|^{\varrho} = \cos^{\varrho}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\left|\varphi + \frac{\pi}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\chi_0(\varphi) \geqq c\cos\varrho\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left|\varphi + \frac{\pi}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{\varrho};$$

dabei ist $c = 1$ *bei* $\alpha = \infty$, *so dass in diesem Falle* $\chi_0(\varphi) = \cos(\varphi + \frac{1}{2}\pi)$ *für* $|\varphi + \frac{1}{2}\pi| \leqq \frac{1}{2}\pi$ *gilt.*

Beweis. Im Beweis von Satz 2, soweit er die Abschätzung von $h_0(iy)$ nach oben betrifft, ersetzen wir in den Integranden von (14) $|y|$ durch $|r\sin\varphi|$, wobei $|\varphi + \frac{1}{2}\pi| < \frac{1}{2}\pi$ sei. Dann erhalten wir an Stelle von (17)

$$\frac{\log|h_0(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}} \leqq (1+\varepsilon)(1+\delta_1)^{1/\alpha}\frac{|r\sin\varphi|^{\varrho(|r\sin\varphi|)}}{r^{\varrho(r)}} + o(1).$$

Lemma 3 und die Stetigkeit des Indikators ([1]; I. 16) liefern nun die erste Behauptung. Die zweite beruht auf der schon erwähnten Tatsache $M(|y|, h_0) = h_0(-i|y|)$, die auf $\max_{|\varphi+\frac{1}{2}\pi|<\frac{1}{2}\pi} \chi_0(\varphi) = \chi_0(-\frac{1}{2}\pi)$ führt. Nach (10) aber ist $\chi_0(-\frac{1}{2}\pi) \geqq c$, und so folgt die zweite Behauptung unmittelbar aus einer Grundeigenschaft des Indikators ([1]; I. 16f.). Die dritte Behauptung schliesslich ergibt sich sofort aus den beiden ersten Behauptungen, denn vermöge (9) ist $c = 1$ für $\alpha = \infty$.

Im Falle $\alpha = \infty$ haben wir in Satz 2 die Existenz des Limes (9) bewiesen. Wir wollen nun eine einfache Bedingung angeben, welche bei $0 < \alpha < \infty$ garantiert, dass in (10) der untere und der obere Limes zusammenfallen und gleich der dort angegebenen unteren Schranke sind. Dazu benötigen wir ausser dem Satz 2 weitere Hilfssätze.

Lemma 5. *Die ganze analytische Funktion*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n \tag{18}$$

habe die v. O. $\varrho(r)$ und die Zahl $\tau > 0$ sei durch (3) *bestimmt. Dann besteht für die Koeffizienten c_n die Beziehung*

$$\overline{\lim}\, \psi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = (\tau\varrho e)^{1/\varrho}, \tag{19}$$

wo $\psi(x)$ *die Umkehrfunktion zu* $y^{\varrho(y)} = x$ *bedeutet* ([1]; I. 13).

Da eine konstante Ordnung auch eine v. O. ist, folgt daraus

Lemma 6. *Die ganze analytische Funktion* (18) *gehöre zum Mitteltyp der Ordnung ϱ, und es gelte* (3) *mit $\varrho(r) \equiv \varrho$. Dann besteht für die Koeffizienten c_n die Beziehung*

$$\overline{\lim}\, n^{1/\varrho} \sqrt[n]{|c_n|} = (\tau\varrho e)^{1/\varrho}.$$

Lemma 7. *Genügt die in* (7) *benutzte v. O.* $\alpha(x) \to \alpha \quad (0 < \alpha < \infty)$ *der Bedingung*

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} x^{\alpha(x)-\alpha} = \kappa \quad (0 < \kappa < \infty), \tag{20}$$

so gilt für die Entwicklungskoeffizienten der in (8) *auftretenden ganzen analytischen Funktion*

$$I(z) = \int_0^\infty \exp\{izu - ku^{1+\alpha(u)}\}\, du = \sum_0^\infty c_n (iz)^n: \tag{21}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{\alpha/(1+\alpha)} \sqrt[n]{c_n} \leqq \left[\frac{cge}{(k\kappa)^{1/\alpha}}\right]^{1/\varrho}.$$

Beweis. Für ein gegebenes ε $(0 < \varepsilon < \kappa)$ existiert nach Voraussetzung ein $U(\varepsilon)$, so dass für alle $u \geqq U(\varepsilon)$

$$u^{\alpha(u)-\alpha} > \kappa - \varepsilon, \quad \alpha(u) - \alpha > \frac{\log(\kappa-\varepsilon)}{\log u}. \tag{22}$$

Offenbar gilt mit der Abkürzung

$$f_n(u) = \frac{1}{n!} u^n \exp\{-ku^{1+\alpha(u)}\}$$

die Entwicklung

$$\exp\{izu - ku^{1+\alpha(u)}\} = \sum_0^\infty (iz)^n f_n(u) .$$

Die Partialsummen der rechten Seite werden durch die integrierbare Funktion $\exp\{|z|\, u - ku^{1+\alpha(u)}\}$ majorisiert, und folglich findet man nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz aus (21) die Formel

$$c_n = \int_0^\infty f_n(u)\, du = \int_0^U + \int_U^\infty .$$

Gemäss der Voraussetzung (22) finden wir für das zweite Integral die Abschätzung

$$\frac{1}{n!}\int_U^\infty u^n \exp\{-ku^{1+\alpha}u^{\alpha(u)-\alpha}\}\, du \leqq \frac{1}{n!}\int_U^\infty u^n \exp\{-k(\kappa - \varepsilon)\, u^{1+\alpha}\}\, du ,$$

und folglich ist

$$c_n \leqq \hat{c}_n = \frac{1}{n!}\int_0^U u^n[\exp\{-ku^{1+\alpha(u)}\} - \exp\{-k(\kappa - \varepsilon)\, u^{1+\alpha}\}]\, du +$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n \exp\{-k(\kappa - \varepsilon)\, u^{1+\alpha}\}\, du .$$

Entsprechend dieser Zerlegung von $\hat{c}_n$ in zwei Integrale setzen wir

(23) $$\hat{c}_n = c_{1,n} + c_{2,n} = c_{2,n}\left(1 + \frac{c_{1,n}}{c_{2,n}}\right),$$

wobei $\{c_{1,n}\}$ offenbar die Folge der Entwicklungskoeffizienten einer ganzen analytischen Funktion vom Mitteltyp der Ordnung 1 ist; somit haben wir nach Lemma 6 die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|c_{1,n}|} \leqq \frac{\text{const}}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Die folge $\{c_{2,n}\}$ stellt die Entwicklungskoeffizienten der Funktion

(24) $$\int_0^\infty \exp\{izu - k(\kappa - \varepsilon)\, u^{1+\alpha}\}\, du$$

dar, die nach Ramachandran [4] (Lemma 5.1) die Ordnung $\varrho = 1 + (1/\alpha)$ hat und für die darüberhinaus (3) mit $\varrho(r) = \varrho$, $\tau = c/[k(\kappa - \varepsilon)]^{1/\alpha}$ gilt[2]). Aus Lemma 6

[2]) Wir verwenden den Begriff Typ nur im Sinne der Definition 2; in einer anderen üblichen Redeweise nennt man τ den Typ der Funktion (24).

finden wir daher mit $\varrho = 1 + 1/\alpha$

(25) $$\overline{\lim}\, n^{1/\varrho} \sqrt[n]{c_{2,n}} = \left[\frac{c}{[k(\kappa - \varepsilon)^{1/\alpha}]}\, \varrho e\right]^{1/\varrho}.$$

Wie wir dem Beweis des Lemmas 5.1 aus [4] entnehmen, existiert sogar $\lim n^{1/\varrho} \sqrt[n]{c_{2,n}}$. Jetzt ergibt sich sofort

$$\sqrt[n]{\frac{c_{1,n}}{c_{2,n}}} \leqq \frac{n^{1/\varrho}}{n} \text{const.} \to 0\,,$$

und daher können wir für (23) $\hat{c}_n = c_{2,n}(1 + o(1))$ schreiben, woraus mit (25)

$$\overline{\lim}\, n^{1/\varrho} \sqrt[n]{c_n} \leqq \overline{\lim}\, n^{1/\varrho} \sqrt[n]{\hat{c}_n} = \left(\frac{c}{[k(\kappa - \varepsilon)]^{1/\alpha}}\, \varrho e\right)^{1/\varrho},$$

d. h. die Behauptung folgt.

Satz 3. *Für die in Satz 2 auftretende Verteilungsfunktion $H_0(x)$ gilt bei $0 < \alpha < < \infty$ über (10) hinaus die Beziehung*

(26) $$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} = \frac{c}{k^{1/\alpha}}\,,$$

falls

(27) $$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha(x) - \alpha} = \kappa \quad (0 < \kappa < \infty)$$

erfüllt ist.

Beweis. Wir haben das Lemma 5 anzuwenden und mit (19) eine Abschätzung für τ nach oben zu leisten; wenn sich dabei $\tau \leqq c/k^{1/\alpha}$ zeigt, so sind wir nach Satz 2 fertig.

Wir beginnen mit der Abschätzung von [NB: $\psi(t) = y \leftrightarrow t = y^{\varrho(y)}$]

$$L = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\psi(t)}{t^{\alpha/(1+\alpha)}} = \overline{\lim_{y \to \infty}}\, y^{1 - \alpha/(1+\alpha)[1 + (1/\alpha(\varphi(y)))]}\,.$$

Dabei brauchen wir nur

$$\overline{\lim}\, x^{\alpha(x) - \alpha} = \mu < \infty\,, \quad \alpha(x) - \alpha < \frac{\log(\mu + \varepsilon)}{\log x}$$

vorauszusetzen. Daraus folgt (NB: $\varphi(y) = s \leftrightarrow y = s^{\alpha(s)}$)

$$L \leqq \overline{\lim}\, \exp\left\{\alpha(s)\left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha + \dfrac{\log(\mu + \varepsilon)}{\log s}}\right)\right] \log s\right\}$$

wo

$$[\ldots] = \frac{\log(u+\varepsilon)}{\log s} \frac{1+o(1)}{\alpha(1+\alpha)}.$$

Somit haben wir

$$L \leqq \overline{\lim} \exp\left[\frac{\alpha(s)}{\alpha} \frac{\log(\mu+\varepsilon)}{1+\alpha}(1+o(1))\right] = (\mu+\varepsilon)^{1/(1+\alpha)}.$$

Nach den Hilfssätzen 5 und 7 folgt also

$$(\tau\varrho e)^{1/\varrho} \leqq \left(\frac{c\varrho e}{[k\kappa]^{1/\alpha}}\right)^{1/\varrho}(u+\varepsilon)^{1/(1+\alpha)}, \quad \text{d. h.} \quad \tau \leqq c\left[\frac{u+\varepsilon}{k\kappa}\right]^{1/\alpha}.$$

Da wir im Satz $\mu = k$ vorausgesetzt hatten und $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, ist die Behauptung damit bewiesen.

Die Sätze 2 und 3 haben den Nachteil, sich nur auf Verteilungsfunktion zu beziehen, die für genügend grosse x differenzierbar sind. Wir beweisen daher jetzt

Satz 4. *$H_0(x)$ sei eine Verteilungsfunktion mit der Eigenschaft $H_0(0) = 0$, $\alpha(x) \to \alpha$ $(0 < \alpha \leqq \infty)$ eine v. O. oder eine a. v. O. Wenn*

$$\underline{\lim} - \frac{\log(1 - H_0(x))}{x^{1+\alpha(x)}} = \kappa, \tag{28}$$

so ist die charakteristische Funktion $h_0(z)$ von $H_0(x)$ eine ganze Funktion, und es gilt

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} = 1 \quad (\alpha = \infty) \tag{29}$$

$$k^{-1/\alpha} c \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(vh_0)}{r^{\varrho(r)}} \leqq k^{-1/\alpha} \quad (0 < \alpha < \infty), \tag{30}$$

wo $\varrho(r)$ wiederum die v. O. (6) ist.

Beweis. Nach (28) gilt für genügend grosse x und beliebiges ε mit $0 < \varepsilon < \kappa$

$$1 - H_0(x) < \exp\{-(\kappa - \varepsilon)\, x^{1+\alpha(x)}\}, \tag{31}$$

und für eine Folge $x_\nu \to \infty$

$$1 - H(x_\nu) > \exp\{-(\kappa + \varepsilon)\, x_\nu^{1+\alpha(x_\nu)}\}. \tag{32}$$

Offensichtlich ist $h_0(z)$ nach (31) und Lemma 4 eine ganze Funktion und die Darstellung (8) gilt auch jetzt. Folglich kann man (mit $k = \kappa - \varepsilon = k_1$) den Beweis von Satz 2 wörtlich wiederholen, insoweit er auf die zweite Ungleichung (17) führt. Um auch die erste Ungleichung (17) wenigstens für eine Teilfolge r_ν zu gewinnen, definieren wir mit der schon früher bestimmten Zahl $\delta_2 = \alpha/(1+\alpha)$ [3]) und der in (32) auftretenden Folge x_ν die Zahlen $y_\nu < 0$ durch

$$(\kappa + \varepsilon)\, x_\nu^{\alpha(x_\nu)} = |y_\nu|\,(1 - \delta_2)\,.$$

Aus (8) erhalten wir dann in Analogie zu (15)

$$h_0(iy_\nu) \geqq (1 - H_0(x_\nu))\,(e^{|y_\nu|x_\nu} - 1)\,,$$

woraus weiter mit (31) die zu (16) entsprechende Beziehung

$$\geqq \exp\{x_\nu(|y_\nu| - (k+\varepsilon)\, x_\nu^{\alpha(x_\nu)})\}\,(1 + o(1)) = \exp\{x_\nu|y_\nu|\,\delta_2\}\,(1 + o(1))$$

entsteht. Nun gelangen wir ebenso wie oben (mit $k_2 = \kappa + \varepsilon$ an Stelle von k) zur ersten Ungleichung (17), zumindest für die Folge $r_\nu = |y_\nu|$. Aus (17) aber erhält man die Behauptung, indem man $\delta_1 \to 0$ rücken lässt und die Willkür der Zahl $\varepsilon > 0$ ausnützt.

Mit denselben Überlegungen, die zum Beweis von Satz 3 führten, findet man Satz 5.

Satz 5. *Für die in Satz* 4 *auftretende Verteilungsfunktion gilt bei* $0 < \alpha < \infty$ *und* $0 < \kappa < \infty$

$$\overline{\lim}\, \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} = c\kappa^{-1/\alpha}$$

falls (27) *erfüllt ist.*

Beweis. Wenn wir wieder die in (21) definierte Funktion $I(z)$ (mit $\kappa - \varepsilon$ statt k) heranziehen, so erkennen wir wegen $M(|y|, h_0) = h_0(-i|y|)$ aus (8)

$$\overline{\lim}\, \frac{\log M(r,h_0)}{r^{\varrho(r)}} \leqq \overline{\lim}\, \frac{\log M(r, I)}{r^{\varrho(r)}}\,,$$

und für $M(r, I)$ gilt (26). Dies liefert zusammen mit Satz 4 die Behauptung.

Dem Satz 5 entnehmen wir noch das folgende

Lemma 8. $H_0(x)$ *sei eine Verteilungsfunktion mit der Eigenschaft* $H_0(0) = 0$, $\alpha(x) \to \alpha$ $(0 < \alpha < \infty)$ *eine v. O. Wenn* (27) *gilt und*

$$\underline{\lim}\, -\frac{\log(1 - H_0(x))}{x^{1+\alpha(x)}} \geqq l > \kappa\,,$$

so folgt

$$\overline{\lim}\, \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} < c\kappa^{-1/\alpha}\,.$$

Wir kommen jetzt zu einem Gegenstück des Satzes 2.

[3]) Bei $\alpha = \infty$ muss man, wie früher, eine beliebige Zahl im Intervall $0 < \delta_0 < 1$ nehmen.

Satz 6. *$H_1(x)$ sei eine Verteilungsfunktion mit der Eigenschaft $H_1(0) = 1$, und sie gestatte die Darstellung*

$$H_1(x) = \exp\{-k|x|^{1+\beta(|x|)}\} \quad (x < 0)\,, \tag{33}$$

wo $\beta(|x|) \to \beta\ (0 < \beta \leqq \infty)$ eine v. O. oder eine a. v. O. sei. Dann hat $H_1(x)$ die ganze charakteristische Funktion

$$h_1(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{izu}\,\mathrm{d}H_1(x) = 1 - iz \int_{-\infty}^{0} e^{izu} H_1(u)\,\mathrm{d}u$$

mit der v. O.

$$\varrho_\beta(y) = 1 + \frac{1}{\beta(\psi(y))}\,,$$

wo ψ die Umkehrfunktion zu $x^{\beta(x)}$ ist, und es gilt für $h_1(z)$ (9) bzw. (10) mit β an Stelle von α.

Beweis. Wir definieren durch

$$H_0(|X|) = 1 - H_1(-|X| + 0)$$

eine Verteilungsfunktion der in Satz 2 betrachteten Art. Wegen $h_0(z) = h_1(-z)$ ergibt sich daher sofort die Behauptung.

Bemerkung. Für die Funktion $H_1(x)$ gelten natürlich auch Aussagen, die dem Korollar 1 und den Sätzen 3 bis 5 analog sind. Wir verzichten darauf, sie zu formulieren. Ebenso beschränken wir uns bei dem folgenden Satz auf eine Formulierung, die sich aus den Sätzen 2 und 6 ergibt.

Satz 7. *Die Funktionen $\alpha(x) \to \alpha$, $\beta(x) \to \beta\ (0 < \alpha,\ \beta \leqq \infty)$ seien v. O. oder a. v. O.; für die Verteilungsfunktion $H(x)$ bestehe bei $x > 0$ die Darstellung*

$$1 - H(x) = \exp\{-x^{1+\alpha(x)}\}\,, \quad H(-|x|) = \exp\{-|x|^{1+\beta(|x|)}\}\,.$$

Dann ist die charakteristische Funktion $h(z)$ von $H(x)$ eine ganze analytische Funktion, die in der Halbebene $\{y \leqq 0)$ die v. O.

$$\varrho_\alpha(r) = 1 + \frac{1}{\alpha(\varphi(r))}\,,$$

in der Halbebene $\{y \geqq 0\}$ jedoch die v. O.

$$\varrho_\beta(r) = 1 + \frac{1}{\beta(\psi(r))}$$

hat; dabei haben φ und ψ die in Lemma 2 bzw. Satz 6 angegebene Bedeutung. In $\{y \leqq 0\}$ gelten bzw. die Relation (9) und (10), die in $\{y \geqq 0\}$ bestehenden Relationen gewinnt man aus (9) bzw. (10), indem man ϱ_α durch ϱ_β ersetzt.

Beweis. Die Behauptung folgt auf Grund der Sätze 2 und 6 aus der Darstellung

$$h(z) = 1 + iz \int_0^\infty e^{izu}(1 - H(u))\,\mathrm{d}u - iz \int_{-\infty}^0 e^{izu} H(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

die sich ebenso wie (8) ergibt.

Wir kommen nun zum Problem der Umkehrung der bisherigen Resultate. Dabei beschränken wir uns auf den folgenden Satz; die zu seinem Beweis dargelegte Methode geht auf Ramachandran [4] zurück und gestattet auch eine entsprechende Umkehrung der Sätze 4 und 6 im Falle $0 < \alpha < \infty$.

Satz 8. *Es sei $\alpha(x) \to \alpha$ $(0 < \alpha < \infty)$ eine v. O.,*

$$\varrho(r) = 1 + \frac{1}{\alpha(\varphi(r))} \to 1 + \frac{1}{\alpha}\,.$$

die v. O. aus Lemma 2; wenn für die charakteristische Funktion $h_0(z)$ von $H_0(x)$ (mit $H_0(0) = 0$)

$$0 < \sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} < \infty \tag{34}$$

gilt, so folgt

1. $1 - H_0(x) > 0$ *für alle* x

2. $\varliminf \dfrac{-\log(1 - H_0(x))}{x^{1+\alpha(x)}} \geqq \left(\dfrac{c}{\sigma}\right)^\alpha$

mit dem c aus Satz 2.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial, weil $h_0(z)$ im Falle $1 - H_0(x) = 0$ $(x \geqq X > 0)$ nach Satz 1 die Ordnung eins hat. Um die zweite Behauptung zu beweisen, folgern wir aus der Voraussetzung

$$M(r, h_0) \leqq \exp\{(\sigma + \varepsilon)\, r^{\varrho(r)}\} \quad (r \geqq r_0(\varepsilon))\,.$$

Nun gilt aber für alle $x > 0$ und alle $r > 0$

$$M(r, h_0) = h_0(-ir) = \int_0^\infty e^{ru}\,\mathrm{d}H_0(u) \geqq e^{rx}(1 - H_0(x))\,,$$

und wir finden daher für alle $x > 0$ und genügend grosse r

$$1 - H_0(x) \leqq \exp\{(\sigma + \varepsilon)\, r^{\varrho(r)} - rx\}\,.$$

Setzen wir $r = ar'$, so führt Lemma 3 auf

$$1 - H_0(x) \leqq \exp\{(\sigma + \varepsilon)(1 + \varepsilon)\, a^\varrho r'^{\varrho(r')} - ar'x\}\,.$$

Da wir $x^{\alpha(x)} = r'$ setzen können, finden wir für genügend grosse x mit $(\sigma + \varepsilon)(1 + \varepsilon) =$ $= \sigma + \eta$

$$1 - H_0(x) \leqq \exp\{(\sigma + \eta)\, a^\varrho x^{\alpha(x)\varrho(x^{\alpha(x)})} - ax^{1+\alpha(x)}\} = \exp\{x^{1+\alpha(x)}[(\sigma + \eta)\, a^\varrho - a]\},$$

und daraus folgt, da $\eta > 0$ beliebig ist,

$$\varliminf_{x \to \infty} \frac{-\log(1 - H_0(x))}{x^{1+\alpha(x)}} \geqq a - \sigma a^\varrho\,.$$

Die rechte Seite nimmt ihr Maximum für $a = [\alpha/(\sigma(1 + \alpha)]^\alpha$ an, und dieses hat den Wert $[c/\sigma]^\alpha$.

Korollar 2. *Fügt man den Voraussetzungen von Satz* 8 *noch die Bedingung* (27) *hinzu, so folgt an Stelle von* 2.)

$$\varliminf \frac{-\log(1 - H_0(x))}{x^{1+\alpha(x)}} = \left(\frac{c}{\sigma}\right)^\alpha.$$

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Dann ist für ein $l > (c/\sigma)^\alpha = \kappa$ die Voraussetzung von Lemma 8 erfüllt, und dieses führt auf

$$\varlimsup \frac{\log M(r, h_0)}{r^{\varrho(r)}} < \frac{c}{\kappa^{1/\alpha}} = \sigma\,,$$

d. h. zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung (34).

Zum Vergleich schreiben wir in unserer Bezeichnungsweise noch die Resultate Ramachandrans (4) über den Zusammenhang auf, der zwischen der Verteilungsfunktion $h(x)$ und der Ordnung und dem Typ ihrer charakteristischen Funktion $h(z)$ besteht. Dabei braucht natürlich die dabei verwendete Funktion $\gamma(x)$ keine v. O. zu sein.

Satz 9. *Die Verteilungsfunktion $H(x)$ sei in der Form*

$$1 - H(x) + H(-x) = \exp\{-x^{1+\gamma(x)}\}$$

dargestellt. Dann ist $\gamma(x) \to \infty$ notwendig und hinreichend dafür, dass $h(z)$ zum Maximaltyp der Ordnung 1 *gehört*; $\lim \gamma(x) \to \gamma$ $(0 < \gamma < \infty)$ *ist notwendig und hinreichend dafür, dass $h(z)$ zur endlichen Ordnung* $1 + 1/\gamma$ *gehört*; *dabei tritt der Minimal-, Mittel-, Maximaltyp auf, je nachdem* $\lim x^{\gamma(x)-\gamma}$ *unendlich, endlich und positiv, Null ist.*

Folgerung. Die in Satz 3 auftretende Bedingung (27) bedeutet, dass $h(z)$ zum Mitteltyp der Ordnung $1 + 1/\alpha$ gehört.

Wir kommen nun zu einer Anwendung auf die Nullstellenverteilung einer ganzen charakteristischen Funktion $h(z)$. Zur Erläuterung der Begriffe betrachten wir jedoch zunächst beliebige a-Stellen ($a \neq \infty$). Die Beträge $r_1(a), r_2(a), \ldots$ der a-Stellen von $h(z)$ seien nicht-fallend geordnet. Über die Verteilung der a-Stellen kann man mit der folgenden Begriffsbildung Aussagen machen.

Definition 7. Eine Zahl μ mit der Eigenschaft $\sum_{\nu} r_{\nu}^{-\mu}(a) < \infty$ heisst Konvergenzexponent der Zahlenfolge $r_{\nu}(a)$. Die untere Grenze der Konvergenzexponenten heisst Grenzexponent.

Der Grenzexponent kann selbst Konvergenzexponent sein oder auch nicht. Wir gehen jetzt darauf aus zu untersuchen, in welchen Fällen bei ganzen charakteristischen Funktionen endlicher Ordnung der eine oder der andere Fall für $a = 0$ eintritt. Der Kürze halber beschränken wir uns dabei auf Verteilungsfunktionen $H_0(x)$ mit $H_0(0) = 0$.

Der Fundamentalsatz für diese Betrachtungen ist der folgende Satz von Borel.

Satz 10. *Für eine ganze Funktion der endlichen Ordnung ϱ ist ϱ der Grenzexponent aller a-Stellen mit höchstens einer Ausnahme, bei der der Grenzexponent kleiner als ϱ ist; wenn ϱ keine ganze Zahl ist, so gibt es überhaupt keine endliche Ausnahmestelle.*

Aus bekannten Sätzen über ganze analytische Funktionen ergibt sich weiter das

Korollar 3. *Im Falle einer ganzzahligen Ordnung kann eine Ausnahmestelle nur beim Mitteltyp auftreten.*

Wir benötigen zu unserem Ziel noch die folgenden Hilfssätze.

Lemma 9. *Gehört die in Definition 2 benutzte Funktion $s(r)$ zum Minimaltyp einer endlichen und positiven Ordnung ϱ, so kann das Integral*

$$\int_1^{\infty} \frac{s(r)}{r^{1+\varrho}} \tag{35}$$

konvergieren oder divergieren; beide Fälle treten auf. Konvergiert umgekehrt (35) und hat $s(r)$ die Ordnung $\varrho > 0$, so gehört $s(r)$ zum Minimaltyp ([3]; VIII. 1). Dieses Lemma führt auf die

Definition 9. Der Minimaltyp einer positiven Ordnung wird unterteilt in Konvergenzklasse (KK) und Divergenzklasse (DK), welche durch die Konvergenz bzw. Divergenz des Integrals (35) charakterisiert sind. Eine ganze analytische Funktion $f(z)$ vom Minimaltyp der Ordnung ϱ gehört zu der Klasse, der $s(r) = \log M(r, f)$ angehört.

Lemma 10. *Die ganze Funktion $f(z)$ der Ordnung $\varrho > 0$ habe die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die nach nichtfallenden Beträgen geordnet seien. Gehört $f(z)$ zur KK des Minimaltyps, so ist*

$$\sum_{\nu} \frac{1}{|\alpha_\nu|^\varrho} < \infty . \tag{36}$$

Ist ϱ keine ganze Zahl und (36) erfüllt, so gehört umgekehrt $f(z)$ zur KK. ([5]; 18 und 20).

Dieser Hilfssatz gibt einfache Bedingungen an, unter denen die Ordnung ϱ noch Konvergenzexponent der Nullstellen ist. Wie Satz 10 und Korollar 3 lehren, sind in beiden Teilen der Behauptung keine Ausnahmestellen vorhanden, so dass ϱ auch Grenzexponent der Nullstellen ist.

Die Konvergenz oder Divergenz des Integrals (35) lässt sich leicht als eine Eigenschaft der v. O. von $h(z)$ ausdrücken. Auf Grund dieser Tatsache werden wir unser Resultat gewinnen.

Lemma 11. *Die in Lemma 9 auftretende Funktion $s(r)$ habe die v. O. $\varrho(r) \to \varrho > 0$. Dann ist die die Bedingung*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r^{\varrho - \varrho(r) + 1}} < \infty \tag{37}$$

hinreichend dafür, dass $s(r)$ zur KK des Minimaltyps gehört; wenn

$$\sigma_1 = \underline{\lim} \frac{s(r)}{r^{\varrho(r)}} > 0 , \tag{38}$$

dann ist sie auch notwendig.

Beweis. Aus

$$0 < \overline{\lim} \frac{s(r)}{r^{\varrho(r)}} = \sigma_2 < \infty$$

folgt für ein $r_0(\varepsilon)$ und jedes $R > r_0$

$$\int_{r_0}^R \frac{s(r)}{r^{\varrho + 1}} \, dr < (\sigma_2 + \varepsilon) \int_{r_0}^R \frac{dr}{r^{\varrho - \varrho(r) + 1}} ,$$

d. h. (35) konvergiert, wenn (37) gilt.

Umgekehrt führt (38) bei $0 < \varepsilon < \sigma_1$ für ein $r_0(\varepsilon)$ und jedes $R > r_0$ auf

$$\int_{r_0}^R \frac{s(r)}{r^{\varrho + 1}} \, dr > (\sigma_1 - \varepsilon) \int_{r_0}^R \frac{dr}{r^{\varrho - \varrho(r) + 1}} .$$

Dieses Lemma gibt zu den folgenden Betrachtungen Anlass. Offensichtlich konvergiert (37), wenn für ein $\delta > 0$ und alle $r \geqq r_0$, $r^{\varrho - \varrho(r)} \geqq \log^{1+\delta} r$ oder, was dasselbe bedeutet,

$$\varrho - \varrho(r) \geqq (1 + \delta) \frac{\log \log r}{\log r} \tag{39}$$

gilt. Ist $s(r) = \log M(r, h_0)$ und leitet sich die v. O. $\varrho(r)$ gemäss Satz 2 oder Satz 4 aus einer v. O. $\alpha(x)$ her, so ist (39) bei $0 < \alpha < \infty$ äquivalent mit

$$\alpha(\varphi(r)) - \alpha \geqq \alpha\, \alpha(\varphi(r)) (1 + \delta) \frac{\log \log r}{\log r} \quad (r \geqq r_0)\,. \tag{40}$$

Beachtet man die Bedeutung der Funktion $\varphi(r)$, so erkennt man die Bedingung

$$\alpha(x) - \alpha \geqq \alpha(1 + \delta) \frac{\log [\alpha(x) \log x]}{\log x} = \alpha(1 + \delta) \frac{\log \log x}{\log x} (1 + o(1))$$

oder, da $\delta > 0$ beliebigt ist,

$$\alpha(x) - \alpha \geqq \alpha(1 + \delta) \frac{\log \log x}{\log x} \quad (x \geqq x_0) \tag{41}$$

als hinreichend für die Konvergenz von (37).

Umgekehrt ist (37) im Falle

$$\varrho - \varrho(r) \leqq (1 - \delta) \frac{\log \log r}{\log r}$$

$(0 < \delta < 1)$ sicher nicht konvergent. Durch $\alpha(x)$ ausgedrückt lautet diese Bedingung (wegen der Willkür von δ)

$$\alpha(x) - \alpha \leqq \alpha(1 - \delta) \frac{\log \log x}{\log x} \quad (x \geqq x_0)\,. \tag{42}$$

Nicht alle v. O. $\alpha(x)$, die der Bedingung (42) genügend, führen allerdings auf den Minimaltyp der Ordnung $1 + 1/\alpha$, wie man aus Satz 9 erkennt, der auch die erforderliche Zusatzbedingung angibt.

Lässt man in (41) und (42) das Gleichheitszeichen gelten, so hat man jedoch sofort Beispiele für v. O. $\alpha(x)$, die die KK bzw. die DK des Minimaltyps liefern. Diese Überlegungen führen zusammen mit Satz 9 und den Hilfssätzen 9 bis 11 auf das folgende Resultat.

Satz 11a. *$H_0(x)$ sei eine Verteilungsfunktion der in Satz 4 behandelten Art. Genügt dabei die v. O. $\alpha(x)$ der Bedingung (41), so gehört $h_0(z)$ zur KK des Minimaltyps der Ordnung $\varrho = 1 + 1/\alpha$ und ϱ ist noch Konvergenzexponent der Nullstellen von $h(z)$.*

Satz 11b. *$H_0(x)$ sei eine Verteilungsfunktion der in Satz 2 behandelten Art. Genügt dabei $\alpha(x)$ der Bedingung (42) und gilt ausserdem $x^{\alpha(x)-\alpha} \to \infty$, so gehört $h_0(z)$ zur DK der Ordnung $\varrho = 1 + 1/\alpha$, und wenn ϱ keine ganze Zahl ist, so ist ϱ kein Nullstellenkonvergenzexponent.*

Satz 11c. *$h_0(z)$ sei eine ganze charakteristische Funktion der nichtganzzahligen Ordnung ϱ; ist ϱ Konvergenzexponent der Nullstellen von $h_0(z)$, so gehört $h_0(z)$ zur KK des Minimaltyps von ϱ. Ist die zu $h_0(z)$ gehörige Verteilungsfunktion von der in Satz 2 behandelten Art, so gilt* (37).

Literatur

[1] *B. J. Lewin:* Nullstellenverteilung ganzer Funktionen, Berlin 1962.

[2] *E. Lukacs:* Characteristic functions, London 1960.

[3] *R. Nevanlinna:* Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1953.

[4] *B. Ramachandran:* On the order and the type of entire characteristic functions, Ann. math. Stat. *33*, 1238—1255 (1962).

[5] *G. Valiron:* Fonction entières d'ordre fini et fonctions meromorphes, Monographies de L'Enseignement mathèmatique No. 8, Genf 1960.

Anschrift des Verfassers: Berlin W8, Mohrenstrasse 39 (Deutsche Akademie der Wissenschaften, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik).