Ladislav Procházka

Расширения абелевых групп при помощи групп периодических

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 1, 12–27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100756`

Чехословацкий математический журнал, т. 17 (92) 1967, Прага

РАСШИРЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП ПРИ ПОМОЩИ ГРУПП ПЕРИОДИЧЕСКИХ

Ladislav Procházka (Ладислав Прохазка), Praha

(Поступило в редакцию 18/X 1965 г.)

Под словом группа будем всюду понимать аддитивно записанную группу абелеву.

Свои исследования начнем со следующего определения.

Определение 1. Группу G будем называть группой локально конечного r-ранга, если для каждого простого числа p группа G/pG конечна.

Лемма 1. *Если G – группа без кручения локально конечного r-ранга, то для каждого натурального числа n будет группа G/nG конечной.*

Доказательство. Поступаем индукцией по n.

Для $n = 1$ утверждение тривиально; итак, пусть $n > 1$ и пусть лемма имеет место для каждого натурального числа меньшего чем n. Если n – простое число, то G/nG конечна по определению. В другом случае будет $n = pm$, $1 < m < n$, и p – простое число. Итак, по предположению индукции группа G/mG конечна. Так как G – группа без кручения, то $G \cong mG$, и, следовательно, группа $mG/p(mG) = mG/nG$ конечна. Таким образом из изоморфизма

$$(G/nG)/(mG/nG) \cong G/mG$$

следует, что группа G/nG служит расширением конечной группы mG/nG при помощи конечной группы G/mG, значит, она конечна. Доказательство индукцией завершено.

Лемма 2. *Пусть G – группа без кручения локально конечного r-ранга, пусть n – натуральное число и пусть H – подгруппа в G такая, что $nG \subseteq H \subseteq G$. Тогда H также является группой локально конечного r-ранга.*

Доказательство. Пусть p – простое число. Так как G – группа без кручения, то $G/H \cong pG/pH$. По лемме 1 группа G/nG конечна, значит, в силу $nG \subseteq H$, конечна также группа G/H и группа pG/pH. Из соотношения

$$(G/pH)/(pG/pH) \cong G/pG$$

и из конечности групп G/pG и pG/pH уже следует конечность группы G/pH и ее подгруппы H/pH. Этим лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — группа без кручения, пусть n — натуральное число и пусть H — подгруппа в G такая, что $nG \subseteq H \subseteq G$. Группа G будет локально конечного r-ранга в точности тогда, когда будет H группой локально конечного r-ранга.*

Доказательство. Если G — группа локально конечного r-ранга, то достаточно применить лемму 2. Итак, пусть подгруппа H — локально конечного r-ранга. Так как, очевидно, $nH \subseteq nG \subseteq H$, то по лемме 2 группа nG локально конечного r-ранга. Доказываемое утверждение теперь следует из изоморфизма $G \cong nG$.

Лемма 4. *Пусть H — подгруппа в группе G. Если группы G/H и H являются одновременно группами без кручения локально конечного r-ранга, то G также является группой без кручения локально конечного r-ранга.*

Доказательство. Если положим $\bar{G} = G/H$, то будет $p\bar{G} = \{pG, H\}/H$; p — опять некоторое простое число. Отсюда следует

$$(1) \qquad \bar{G}/p\bar{G} = (G/H)/(\{pG, H\}/H) \cong (G/pG)/(\{pG, H\}/pG)\,.$$

Так как G/H является группой без кручения, то H служит сервантной подгруппой в G. Следовательно, имеем $H \cap pG = pH$. То первой теореме об изоморфизме будет

$$(2) \qquad \{pG, H\}/pG \cong H/(H \cap pG) = H/pH,$$

или, $\{pG, H\}/pG$ является конечной группой. Таким образом из (1) следуем, что группа G/pG представляет расширение конечной группы $\{pG, H\}/pG$ при помощи конечной группы $\bar{G}/p\bar{G}$. Значит, группа G/pG конечна и лемма полностью доказана.

Только что доказанную лемму можно еще следующим образом обобщить.

Лемма 5. *Пусть G — группа и пусть*

$$(O) = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

некоторая ее конечная цепь подгрупп. Если все G_i/G_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — группы *без кручения локально конечного r-ранга, то G также является группой локально конечного r-ранга.*

Доказательство. Лемма доказывается методом полной индукции по n, причем используется лемма 4. Притом надо напомнить, что все G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будут группами без кручения.

Лемма 6. *Если G — группа локально конечного r-ранга, то то же самое можно утверждать о каждой ее сервантной подгруппе H.*

Доказательство. Если p — простое число, то конечность группы H/pH следует из соотношения

$$H/pH = H/(H \cap pG) \cong \{H, pG\}/pG \subseteq G/pG$$

и из конечности группы G/pG.

Лемма 7. *Если G — группа локально конечного r-ранга и H — сервантная подгруппа в G, то G/H также является группой локально конечного r-ранга.*

Доказательство. Если положим $G/H = \bar{G}$, то будут выполнены соотношения вида (1). Отсюда и из конечности группы G/pG следует уже в силу (1) конечность группы $\bar{G}/p\bar{G}$ для каждого простого числа p.

Если p — простое число, то символом $\mathscr{P}_p^+$ обозначаем аддитивную группу целых p-адических чисел. О группе G скажем, что она является группой типа $\mathscr{P}^+$, если существует такое простое число p, для которого $G \cong \mathscr{P}_p^+$.

Замечание. Последние леммы 5, 6 и 7 мы сформулировали прежде всего для того, чтобы показать, каким образом можно построить из данных групп локально конечного r-ранга новую группу того же рода. Еще напомним, что каждая группа без кручения конечного ранга и каждая группа типа $\mathscr{P}^+$ являются группами локально конечного r-ранга (см. [1], доказательство теоремы 43.1).

Определение 2. Группу без кручения A будем называть K-группой, если она обладает следующим свойством: Для произвольной периодической группы Q является каждое расширение G группы $H = A \dotplus Q$ при помощи периодической группы с ограниченными в совокупности порядками элементов расщепляемой группой.

В статье [3] было доказано, что каждая группа без кручения конечного ранга служит примером K-группы; в [2] было это утверждение еще обобщено.

Лемма 8. *Пусть G — группа вида $G = A \dotplus P$, где P — периодическая группа и A является K-группой. Если H — подгруппа в G такая, что G/H обладает ограниченными в совокупности порядками элементов, то подгруппа H расщепляема.*

Доказательство. Ввиду предположения существует натуральное число n такое, что $nG \subseteq H \subseteq G$. Притом $nG = nA \dotplus nP$. Так как A является группой без кручения, то $nA \cong A$, значит, nA является K-группой. Отсюда уже следует расщепляемость группы H, так как порядки элементов из H/nG ограничены в совокупности.

Лемма 9. *Пусть A — группа без кручения и пусть B — подгруппа в A такая, что $nA \subseteq B \subseteq A$ для некоторого натурального числа n. Группа A будет K-группой точно тогда, когда будет K-группой подгруппа B.*

Доказательство. Сначала предположим, что B является K-группой. Пусть P — периодическая группа и пусть G — такое расширение группы $H = A \dotplus P$, что порядки элементов группы G/H ограничены в совокупности. Если положим $H^* = \{B, P\} = B \dotplus P$, то имеем

$$H/H^* = (A \dotplus P)/(B \dotplus P) \cong A/B$$

и одновременно

$$G/H \cong (G/H^*)/(H/H^*)\,.$$

Отсюда в силу предположения леммы уже следует, что порядки элементов группы G/H^* ограничены в совокупности. Так как B является K-группой, то группа G расщепляема. Но этим уже доказано, что A также является K-группой.

Если теперь группа A сама является K-группой, то в силу изоморфизма $nA \cong A$ такой же будет группа nA. Так как $B \subseteq A$, то $nB \subseteq nA \subseteq B$, и достаточно применить первую часть доказательства, чтобы получить, что группа B является K-группой.

Теорема 1. *Всякая группа без кручения локально конечного r-ранга является K-группой.*

Доказательство. Пусть A — данная группа без кручения локально конечного r-ранга, пусть Q — периодическая группа и пусть G — расширение группы $H = A \dotplus Q$ при помощи группы с ограниченными порядками элементов. Значит, для некоторого натурального числа n будет $nG \subseteq H \subseteq G$. Покажем, что группа G расщепляема.

Если P — периодическая часть группы G, то положим $G_1 = \{A, P\} = A \dotplus P$; очевидно, $H \subseteq G_1 \subseteq G$ и, следовательно $nG \subseteq G_1 \subseteq G$. Отсюда следует, что

$$n(G/P) \subseteq G_1/P \subseteq G/P\,; \tag{3}$$

притом G/P является группой без кручения. Так как $G_1/P \cong A$, то G_1/P является группой локально конечного r-ранга, и в силу (3) можно применить лемму 3. Итак, G/P является группой без кручения локально конечного r-ранга. Отсюда по лемме 1 следует, что группа $(G/P)/n(G/P)$ будет конечной; но в силу

(3) такой же должна быть группа $(G/P)/(G_1/P)$ и одновременно группа G/G_1. Так как группа $G_1 = A \dotplus P$ расщепляема и группа G/G_1 конечна, то по теореме 3 из [4] группа G также расщепляема. Этим теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть G — группа без кручения и пусть*

$$(O) = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

некоторая цепь ее подгрупп. Если каждая из групп G_i/G_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является или группой без кручения конечного ранга, или группой типа $\mathscr{P}^+$, то G будет K-группой.

Доказательство. Достаточно применить лемму 5 и теорему 1.

Как вытекает из следствия, теорема 1 обобщает теорему 3 из [3]. Теперь докажем теорему, которая будет обобщением теоремы A1 и в силу леммы 8 также теоремы A2 из [2]. Доказательство теоремы будет подобно доказательству упомянутой теоремы A1 и поэтому мы его сделаем менее подробно.

Теорема 2. *Если группа A является прямой суммой K-групп, то группа A также будет K-группой.*

Доказательство. Пусть Q — периодическая группа и G — расширение группы $H = A \dotplus Q$ при помощи группы с ограниченными порядками элементов; значит, $nG \subseteq H \subseteq G$ для некоторого натурального числа n. Покажем, что группа G расщепляема.

Группу A представим в виде $A = \sum\limits_{\alpha<\sigma} A_\alpha$, где σ — порядковое число; притом каждая из групп A_α $(\alpha < \sigma)$ является K-группой. Итак, имеем $H = \sum\limits_{\alpha<\sigma} A_\alpha \dotplus Q$. Если P — периодическая часть группы G, то для каждого $\beta \leqq \sigma$ положим $H_\beta = \{P, A_\alpha\ (\alpha < \beta)\} = \sum\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha \dotplus P$. Легко видеть, что имеют место следующие соотношения:

(4) $$H_\gamma = H_\beta \dotplus \sum_{\beta\leqq\alpha<\gamma} A_\alpha \quad \text{для} \quad \beta < \gamma \leqq \sigma\,;$$

(5) $$H_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} H_\alpha \quad \text{для предельного} \quad \gamma \leqq \sigma\,;$$

(6) $$nG \subseteq H \subseteq H_\sigma \subseteq G\,.$$

Если для каждого $\beta \leqq \sigma$ будет группа G_β/P представлять наименьшую сервантную подгруппу группы G/P, которая содержит подгруппу H_β/P, то можно вывести следующие формулы:

(7) $$G_\beta \subseteq G_\gamma \quad \text{и} \quad G_\beta \cap H_\gamma = H_\beta \quad \text{для} \quad \beta \leqq \gamma \leqq \sigma\,;$$

(8) $$G_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} G_\alpha \quad \text{для предельного} \quad \gamma \leqq \sigma\,.$$

Теперь построим методом трансфинитной конструкции подгруппы B_β ($\beta \leqq \sigma$) такие, что $G_\beta = B_\beta \dotplus P$ и $B_\beta \subseteq B_\gamma$ для $\beta \leqq \gamma \leqq \sigma$.

Так как $G_0 = P$, то положим $B_0 = (O)$. Пусть $0 < \gamma \leqq \sigma$ и пусть определены подгруппы B_β ($\beta < \gamma$), удовлетворяющие следующим условиям:

$$G_\beta = B_\beta \dotplus P \quad (\beta < \gamma)\,, \tag{9}$$

$$B_\alpha \subseteq B_\beta \quad \text{для} \quad \alpha \leqq \beta < \gamma\,. \tag{10}$$

Если γ – изолированное число, то по (9) и (7) имеем $A_{\gamma-1} \cap (B_{\gamma-1} \dotplus P) = A_{\gamma-1} \cap G_{\gamma-1} = (A_{\gamma-1} \cap H_\sigma) \cap G_{\gamma-1} = A_{\gamma-1} \cap H_{\gamma-1} = (O)$, или, если положим $H_\gamma^* = \{A_{\gamma-1}, B_{\gamma-1} \dotplus P\}$, то в силу (7) и соотношения $A_{\gamma-1} \subseteq H_\gamma \subseteq G_\gamma$ можем писать

$$H_\gamma^* = A_{\gamma-1} \dotplus B_{\gamma-1} \dotplus P = A_{\gamma-1} \dotplus G_{\gamma-1} \subseteq G_\gamma\,. \tag{11}$$

Далее, по (6) $nG_\gamma \subseteq nG \subseteq H \subseteq H_\sigma$; итак, ввиду (7) $nG_\gamma \subseteq G_\gamma \cap H_\sigma = H_\gamma$. Из (4) и (11) получаем $H_\gamma = H_{\gamma-1} \dotplus A_{\gamma-1} \subseteq G_{\gamma-1} \dotplus A_{\gamma-1} = H_\gamma^* \subseteq G_\gamma$, или, имеем $nG_\gamma \subseteq H_\gamma^* \subseteq G_\gamma$. Отсюда следует

$$n(G_\gamma/B_{\gamma-1}) \subseteq (H_\gamma^*/B_{\gamma-1}) \subseteq G_\gamma/B_{\gamma-1}\,. \tag{12}$$

В силу (11) имеем $H_\gamma^*/B_{\gamma-1} \cong A_{\gamma-1} \dotplus P$; но по предположению группа $A_{\gamma-1}$ является K-группой, итак, из (12) вытекает, что группа $G_\gamma/B_{\gamma-1}$ расщепляема. Можно убедиться в том, что периодической частью группы $G_\gamma/B_{\gamma-1}$ служит группа $G_{\gamma-1}/B_{\gamma-1}$, поэтому можно писать

$$G_\gamma/B_{\gamma-1} = B_\gamma/B_{\gamma-1} \dotplus G_{\gamma-1}/B_{\gamma-1}\,, \tag{13}$$

где B_γ – удобная подгруппа в G_γ. Из (13) следует, что $G_\gamma = \{B_\gamma, G_{\gamma-1}\} = \{B_\gamma, B_{\gamma-1}, P\} = \{B_\gamma, P\}$. Так как $P \subseteq G_{\gamma-1}$ то в силу (13) и (9) имеем $B_\gamma \cap P = B_\gamma \cap (G_{\gamma-1} \cap P) = (B_\gamma \cap G_{\gamma-1}) \cap P = B_{\gamma-1} \cap P = (O)$, или, $G_\gamma = B_\gamma \dotplus P$; притом $B_\beta \subseteq B_{\gamma-1} \subseteq B_\gamma$ для $\beta < \gamma$.

Для предельного γ положим $B_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} B_\beta$. Очевидно, $B_\gamma \cap P = (O)$; итак, $\{B_\gamma, P\} = B_\gamma \dotplus P$. Если $g \in G_\gamma$, то по (8) будет $g \in G_\beta$ для некоторого $\beta < \gamma$, значит, $g \in B_\beta \dotplus P \subseteq B_\gamma \dotplus P$. Так как $B_\gamma \subseteq G_\gamma$, то отсюда уже следует требуемое равенство $G_\gamma = B_\gamma \dotplus P$.

Построение трансфинитной индукцией завершено; имеем $G = G_\sigma = B_\sigma \dotplus P$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть G – группа с периодической частью P, пусть H – ее подгруппа с периодической частью Q и пусть G/H – группа с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если одна из групп G/P и H/Q является прямой суммой групп локально конечного r-ранга, то группа G расщепляема в точности тогда, когда расщепляема подгруппа H.*

Доказательство. Пусть одна из групп G/P и H/Q является прямой суммой групп локально конечного r-ранга. По теоремам 1 и 2 это значит, что одна из этих групп является K-группой. Если положим $H^* = \{H, P\}$, то имеет место изоморфизм

$$H^*/P = \{H, P\}/P \cong H/(H \cap P) = H/Q, \tag{14}$$

следовательно, можем также утверждать, что одна из групп G/P и H^*/P будет K-группой. Так как $H \subseteq H^*$, то порядки элементов группы G/H^* и одновременно группы $(G/P)/(H^*/P)$ ограничены в совокупности. Если применим лемму 9, то можем утверждать, что обе группы G/P и H^*/P, и в силу (14) обе группы G/P и H/Q, являются K-группами. Если теперь группа H расщепляема, то из определения K-группы уже следует, что G также расщепляема. Если расщепляема группа G, то расщепляемость группы H следует из леммы 8.

Следствие. *Пусть группы G, H удовлетворяют условиям теоремы 3. Если одна из групп G/P и H/Q является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^+$ и групп конечного ранга, то группа G расщепляема в точности тогда, когда расщепляема подгруппа H.*

Лемма 10. *Пусть G — группа без кручения и пусть H — ее подгруппа локально конечного r-ранга. Если G/H — редуцированная периодическая p-примарная группа, то G/H является конечной.*

Доказательство. Пусть G_1 — такая подгруппа в G, что $H \subseteq G_1$ и G_1/H служит нижним слоем для группы G/H. Тогда имеем

$$pG_1 \subseteq H \subseteq G_1 \tag{15}$$

и в силу леммы 3 группа G_1 будет локально конечного r-ранга. Это значит, что группа G_1/pG_1 конечна и такой же будет по (15) и группа G_1/H. Но если редуцированная p-примарная группа обладает конечным нижним слоем, то она сама будет конечной, так как всякая ее базисная подгруппа конечна. Этим лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G — группа без кручения и пусть H — ее подгруппа локально конечного r-ранга. Если G/H — редуцированная периодическая группа, то всякое примарное слагаемое группы G/H конечно.*

Доказательство. Всякое примарное слагаемое группы G/H редуцировано, следовательно, достаточно применить лемму 10.

Лемма 12. *Пусть G — группа с периодической частью P и пусть $H = A \dotplus P$ — подгруппа в G такая, что A является прямой суммой счетного числа групп без кручения локально конечного r-ранга. Если G/H — редуцированная периоди-*

ческая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел, то группа G расщепляема.

Доказательство. Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — группы без кручения локально конечного r-ранга. Для каждого натурального числа n положим

$$H_n = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_n \dotplus P \tag{16}$$

и символом G_n обозначим подгруппу в G такую, что $H_n \subseteq G_n$ и G_n/P является наименьшая сервантная подгруппа в G/P, содержащая H_n/P. Легко видеть, что $G_n \subseteq G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, так как $H_n \subseteq H_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ и G/P сама является наименьшей сервантной подгруппой в G/P, содержащей H/P. Очевидно, имеем

$$G_n \cap H_m = H_n \quad (n \leqq m)\,. \tag{17}$$

Теперь определим группы B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы было $G_n = B_n \dotplus P$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$ для каждого натурального числа n.

Прежде всего заметим, что

$$G_n \cap H = H_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{18}$$

так как в силу (17) имеем $G_n \cap H = G_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k\right) = G_n \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} H_k\right) = \bigcup_{k=n}^{\infty} (G_n \cap H_k) = H_n$. Из (18) следует

$$G_n/H_n = G_n/(G_n \cap H) \cong \{G_n, H\}/H \subseteq G/H\,,$$

значит, G_n/H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ является редуцированной периодической Π-примарной группой. Далее, имеем

$$G_n/H_n \cong (G_n/P)/(H_n/P)\,; \tag{19}$$

притом G_n/P является группой без кручения и группа H_n/P локально конечного r-ранга, так как $H_n/P \cong A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_n$. Если применим к группам G_n/P и H_n/P лемму 11 и если напомним, что множество Π конечно, то из (19) получим, что группа G_n/H_n конечна. Тогда из теоремы 1 следует, что группа G_n расщепляема.

Группа G_1 расщепляема, значит, $G_1 = B_1 \dotplus P$ для некоторой подгруппы B_1. Пусть $n > 1$ и пусть определены группы $B_1, \ldots, B_{n-1}$ так, что $B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_{n-1}$ и притом $G_i = B_i \dotplus P$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Построим группу B_n так, что будет $G_n = B_n \dotplus P$ и $B_{n-1} \subseteq B_n$. В самом деле, имеем $A_n \cap G_{n-1} = (A_n \cap H) \cap G_{n-1} = A_n \cap (H \cap G_{n-1})$; итак, по (18) будет $A_n \cap G_{n-1} = A_n \cap H_{n-1} = (O)$. Следовательно, можем писать $\{G_{n-1}, A_n\} = G_{n-1} \dotplus A_n = H_n^*$. Отсюда $H_n^*/B_{n-1} \cong \cong G_{n-1}/B_{n-1} \dotplus A_n \cong P \dotplus A_n$, значит, группа H_n^*/B_{n-1} расщепляема. Далее, имеем

$$(G_n/B_{n-1})/(H_n^*/B_{n-1}) \cong (G_n/H_n)/(H_n^*/H_n)$$

и притом, как мы уже доказали, группа G_n/H_n конечна. Итак, G_n/B_{n-1} служит расширением расщепляемой группы H_n^*/B_{n-1} при помощи конечной группы, т. е., в силу теоремы 3 из [4] группа G_n/B_{n-1} сама расщепляема. Легко убедиться в том, что G_{n-1}/B_{n-1} служит для G_n/B_{n-1} периодической частью. Следовательно, группу G_n/B_{n-1} можно представить в виде

$$G_n/B_{n-1} = B_n/B_{n-1} \dotplus G_{n-1}/B_{n-1}\,, \tag{20}$$

где B_n — удобная подгруппа в G, $B_{n-1} \subseteq B_n$. Из (20) вытекает, что $G_n = \{B_n, G_{n-1}\} = \{B_n, B_{n-1}, P\} = \{B_n, P\}$. Так как B_n/B_{n-1} и B_{n-1} являются группами без кручения, то то же самое имеет место для B_n, значит, $G_n = \{B_n, P\} = B_n \dotplus P$.

Если теперь положим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то будет $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = B \dotplus P$ и лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть G — группа с периодической частью P и пусть $H = A \dotplus Q$ — подгруппа в G такая, что A является прямой суммой счетного числа групп без кручения локально конечного r-ранга и $Q \subseteq P$. Если G/H — редуцированная периодическая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел, и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то группа G расщепляема.*

Доказательство. Если положим $K = \{A, P\} = A \dotplus P$, то имеем $K/H = (A \dotplus P)/(A \dotplus Q) \cong P/Q$, значит, порядки элементов группы K/H ограничены. Так как $G/K \cong (G/H)/(K/H)$ и так как G/H — редуцированная периодическая группа, то G/K также будет редуцированной периодической Π-примарной группой (см. [5], лемма 19). Теперь достаточно применить к группам G и K лемму 12.

Теорема 5. *Пусть G — группа с периодической частью P и пусть $H = A \dotplus Q$ — подгруппа в G такая, что A является прямой суммой групп без кручения локально конечного r-ранга и $Q \subseteq P$. Если G/H — счетная редуцированная периодическая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел, и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то группа G расщепляема.*

Доказательство. Если положим $K = \{A, P\} = A \dotplus P$, то, по тем же причинам, как в доказательстве теоремы 4, группа G/K будет счетной редуцированной периодической Π-примарной группой. Пусть $A = \sum_{\iota \in \mathbf{I}} A_\iota$, где A_ι ($\iota \in \mathbf{I}$) – группы локально конечного r-ранга; значит, $K = \sum_{\iota \in \mathbf{I}} A_\iota \dotplus P$. В каждом классе фактор-группы G/K определим некоторого представителя и символом M обозначим их множество. В силу счетности группы G/K множество M счетно. Для всякого $a \in M$ существует натуральное число k такое, что $ka \in K = \sum_{\iota \in \mathbf{I}} A_\iota \dotplus P$. Отсюда следует, что существует счетная часть $\mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{I}$ такая, что для каждого $a \in M$ и соответствующего числа k уже будет $ka \in \sum_{\iota \in \mathbf{I}_1} A_\iota \dotplus P$. Положим $K_1 = \sum_{\iota \in \mathbf{I}_1} A_\iota \dotplus P$ и $K^* = \sum_{\iota \in \mathbf{I}^*} A_\iota$, где $\mathbf{I}^* = \mathbf{I} \dot{-} \mathbf{I}_1$; итак, $K = K_1 \dotplus K^*$. Кроме того определим $G_1 = \{K_1, M\}$. Очевидно, имеем

$$G = \{K, M\} = \{K_1, M, K^*\} = \{G_1, K^*\}\,. \tag{21}$$

Если $g \in G_1$, то существует натуральное число k так, что $kg \in K_1$; значит, для $g \in G_1 \cap K^*$ будет $kg \in K_1 \cap K^* = (O)$, или, $g \in K^* \cap P = (O)$. Таким образом мы получили $G_1 \cap K^* = (O)$, или, в силу (21)

$$G = G_1 \dotplus K^*\,. \tag{22}$$

Так как $K = K_1 \dotplus K^*$ и $K_1 \subseteq G_1$, то по (22) можем писать

$$G/K = (G_1 \dotplus K^*)/(K_1 \dotplus K^*) \cong G_1/K_1\,.$$

Это значит, что к группам G_1 и K_1 можем применить теорему 4, итак, $G_1 = A^* \dotplus P$, или, в силу (22) $G = A^* \dotplus K^* \dotplus P$. Теорема полностью доказана.

Лемма 13. *Пусть G – група без кручения локально конечного r-ранга и пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является редуцированной периодической p-примарной группой. Тогда группа G/H конечна.*

Доказательство. По предположению группа G/pG конечна; итак, она будет прямой суммой k циклических групп порядка p. Теперь предположим, что редуцированная группа $\bar{G} = G/H$ бесконечна. Но тогда всякая базисная подгруппа группы $\bar{G}$ также будет бесконечной и в силу теоремы 29.3 из [1] можно представить группу $\bar{G}$ в виде прямой суммы $\bar{G} = \bar{C}_1 \dotplus \ldots \dotplus \bar{C}_k \dotplus \bar{C}_{k+1} \dotplus \bar{G}_*$, где $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k + 1$) – ненулевые циклические группы. Непосредственно отсюда следует, что существует подгруппа K в G такая, что $H \subseteq K \subseteq G$ и G/K является прямой суммой $k + 1$ циклических групп порядка p. Порядок любого ненулевого элемента из G/K равен p, следовательно, $pG \subseteq K$. Из соотношения $(G/pG)/(K/pG) \cong G/K$ получаем, что число циклических прямых слагаемых группы G/K не превышает k, так как по предположению, k есть число циклических прямых слагаемых группы G/pG. Этим мы пришли к противоречию, значит, группа G/H конечна и лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть G – группа без кручения локально конечного r-ранга и пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является редуцированной периодической группой. Тогда каждое примарное слагаемое группы G/H конечно.*

Доказательство. Лемма является простым следствием леммы 13.

Теперь докажем теорему, которая является обратной к теореме 4.

Теорема 6. *Пусть G – расщепляемая группа вида $G = A \dotplus P$, где P – периодическая группа и A – группа без кручения, являющаяся прямой суммой счетного числа групп локально конечного r-ранга. Пусть H – подгруппа в G с периодической частью Q. Если G/H – редуцированная периодическая Π-примарная группа, где Π – конечное множество простых чисел, и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то группа H расщепляема.*

Доказательство. Пусть $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются группами локально конечного r-ранга. Для каждого натурального числа n положим $G_n = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n \dotplus P$, $H_n = G_n \cap H$ и $K_n = \{H_n, P\}$. Так как подгруппа P служит прямым слагаемым для всей группы G, то она служит прямым слагаемым для каждой $K_n : K_n = A_n^* \dotplus P$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для каждого n имеем

$$G_n/H_n = G_n/(G_n \cap H) \cong \{G_n, H\}/H \subseteq G/H\,,$$

значит, G_n/H_n является редуцированной периодической Π-примарной группой. Далее, имеет место изоморфизм

$$(G_n/P)/(K_n/P) \cong (G_n/H_n)/(K_n/H_n)\,; \tag{23}$$

притом K_n/H_n является группой с ограниченными порядками элементов, так как

$$K_n/H_n = \{H_n, P\}/H_n \cong P/(H_n \cap P) = P/Q\,.$$

Отсюда в силу (23) следует, что фактор-группа $(G_n/P)/(K_n/P)$ является редуцированной периодической Π-примарной группой (см. [5], лемма 19). Так как $G_n/P \cong A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$, то группа G_n/P локально конечного r-рана, значит, по лемме 14 в силу конечности множества Π группа $(G_n/P)/(K_n/P)$ конечна. Воспользовавшись леммой 2, можем утверждать, что также группа K_n/P, или, группа A_n^* является группой локально конечного r-ранга. По теореме 1 группа A_n^* будет K-группой и так как K_n/H_n – группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то в силу леммы 8 подгруппа H_n расщепляема.

Очевидно, подгруппа Q служит периодической частью для каждой группы H_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Теперь определим группы B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы было $H_n = B_n \dotplus Q$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Как мы уже доказали, группа H_1 расщепляема, следовательно, существует группа B_1 такая, что $H_1 = B_1 \dotplus Q$. Пусть $n > 1$ и пусть определены подгруппы $B_1, \ldots, B_{n-1}$ так, что $H_i = B_i \dotplus Q$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_{n-1}$. Так как $H_{n-1}/B_{n-1} \cong Q$, то H_{n-1}/B_{n-1} содержится в периодической части группы H_n/B_{n-1}. Далее, имеем

$$(H_n/B_{n-1})/(H_{n-1}/B_{n-1}) \cong H_n/H_{n-1}\,. \tag{24}$$

Притом $H_{n-1} = H \cap G_{n-1} = H_n \cap G_{n-1}$, значит, можем писать

$$\begin{aligned} H_n/H_{n-1} = H_n/(H_n \cap G_{n-1}) \cong \{H_n, G_{n-1}\}/G_{n-1} \cong \\ \cong (\{H_n, G_{n-1}\}/P)/(G_{n-1}/P)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Последняя группа из соотношения (25) является группой без кручения, так как группа G_{n-1}/P служит прямым слагаемым для группы без кручения G/P и, следовательно, для группы без кручения $\{H_n, G_{n-1}\}/P$. Но этим в силу (24) уже доказано, что периодической частью группы H_n/B_{n-1} является в точности группа H_{n-1}/B_{n-1}. Теперь покажем, что группа H_n/B_{n-1} расщепляема. Для этой цели положим $H_n^* = \{H_n, A_n\}$ и $H_n^{**} = \{H_{n-1}, A_n\}$. Так как $H_{n-1} \cap A_n \subseteq G_{n-1} \cap A_n = (O)$, то $H_n^{**} = H_{n-1} \dotplus A_n$. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} H_n^*/H_n^{**} = \{H_n, A_n\}/\{H_{n-1}, A_n\} \subseteq \\ \subseteq \{G_n, A_n\}/\{H_{n-1}, A_n\} = G_n/(H_{n-1} \dotplus A_n) = \\ = (G_{n-1} \dotplus A_n)/(H_{n-1} \dotplus A_n) \cong G_{n-1}/H_{n-1}\,, \end{aligned}$$

и далее, можем писать

$$G_{n-1}/H_{n-1} = G_{n-1}/(H \cap G_{n-1}) \cong \{G_{n-1}, H\}/H \subseteq G/H\,.$$

Отсюда и из предположений теоремы следует, что H_n^*/H_n^{**} является редуцированной периодической Π-примарной группой. Еслн Q^* – периодическая часть группы H_n^*, то $H_n^{**} \subseteq \{H_n^{**}, Q^*\} \subseteq H_n^*$; притом порядки элементов группы $\{H_n^{**}, Q^*\}/H_n^{**}$ ограничены, так как

$$\{H_n^{**}, Q^*\}/H_n^{**} \cong Q^*/(H_n^{**} \cap Q^*) = Q^*/Q \subseteq P/Q\,, \tag{26}$$

Далее, имеем

$$H_n^*/\{H_n^{**}, Q^*\} \cong (H_n^*/(H_n^{**})/(\{H_n^{**}, Q^*\}/H_n^{**})\,; \tag{27}$$

итак, из (27) и (26) следует (см. [5], лемма 19), что $H_n^*/\{H_n^{**}, Q^*\}$ и $(H_n^*/Q^*) : (\{H_n^{**}, Q^*\}/Q^*$ – редуцированные Π-примарные группы. Но $\{H_n^{**}, Q^*\} = B_{n-1} \dotplus Q^* \dotplus A_n$, значит, $\{H_n^{**}, Q^*\}/Q^*$ – группа без кручения локально конечного r-ранга. Применением лемм 14 и 3 можно в сили конечности Π доказать, что группа $(H_n^*/Q_n^*)/(\{H_n^{**}, Q^*\}/Q^*)$ и группа $H_n^*/\{H_n^{**}, Q^*\}$ конечны. Итак, группа H_n^*/H_n^{**} обладает ограниченными порядками элементов. Если теперь взять группы $H_n \subseteq \{H_n, Q^*\} \subseteq H_n^*$, то опять порядки элементов группы $\{H_n, Q^*\} :$ $: H_n$ ограничены. Так как

$$H_n^*/H_n \subseteq G_n/H_n \cong \{G_n, H\}/H \subseteq G/H ,$$

то H_n^*/H_n – редуцированная Π-примарная группа и такими же будут группы (см. [5], лемма 19)

$$(H_n^*/H_n)/(\{H_n, Q^*\}/H_n),\ (H_n^*/Q^*)/(\{H_n, Q^*\}/Q^*) .$$

Как мы уже ранее заметили, H_n – расщепляемая группа вуда $H_n = B_n^* \dotplus Q$, где B_n^* локально конечного r-ранга. Так как $B_n^* \cong \{H_n, Q^*\}/Q^*$, то применением лемм 14 и 3 можно убедиться в том, что группа $(H_n^*/Q^*)/(\{H_n, Q^*\}/Q^*)$ и также группа $H_n^*/\{H_n, Q^*\}$ конечна. Итак. порядки элементов группы H_n^*/H_n также ограничены.

Этим мы доказали, что обе группы

$$(H_n^*/B_{n-1})/(H_n^{**}/B_{n-1}),\ (H_n^*/B_{n-1})/(H_n/B_{n-1})$$

обладают ограниченными порядками элементов. Так как $H_n^{**}/B_{n-1} \cong$ $\cong A_n \dotplus H_{n-1}/B_{n-1}$ и группа H_{n-1}/B_{n-1} – периодическая, то по теореме 1 и лемме 3 группа H_n^*/B_{n-1} расщепляема и ее слагаемое без кручения должно быть локально конечного r-ранга. Применяя опять теорему 1 и лемму 8, получим расщепляемость группы H_n/B_{n-1}. Так как H_{n-1}/B_{n-1} – периодическая часть группы H_n/B_{n-1}, то существует подгруппа B_n такая, что $B_{n-1} \subseteq B_n$ и притом

$$H_n/B_{n-1} = B_n/B_{n-1} \dotplus H_{n-1}/B_{n-1} .$$

Отсюда следует, что $H_n = \{B_n, H_{n-1}\} = \{B_n, B_{n-1}, Q\} = \{B_n, Q\}$. Обе группы B_{n-1} и B_n/B_{n-1} являются группами без кручения, следовательно, группа B_n также будет группой без кручения. Но это значит, что $H_n = \{B_n, Q\} = B_n \dotplus Q$.

Этим мы доказали, что существуют подгруппы B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $H_n = B_n \dotplus Q$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если теперь положим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то будет $H = B \dotplus Q$, так как $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Теорема полностью доказана.

Лемма 15. *Если группа G не является редуцированной и если H – произвольная редуцированная подгруппа в G, то G/H тоже не является редуцированной группой.*

Доказательство. Пусть D – некоторая ненулевая полная подгруппа в G. Так как $H \cap D \subseteq H$, то группа $H \cap D$ редуцирована, итак, $H \cap D \subsetneqq D$; следовательно, $D/(H \cap D)$ – ненулевая полная группа. Из изоморфизма $D/(H \cap D) \cong$ $\cong \{H, D\}/H$ следует, что $\{H, D\}/H$ служит ненулевой полной подгруппой для группы G/H.

Лемма 16. *Если H — редуцированная подгруппа группы G и если G/H также редуцирована, то G тоже будет редуцированной группой.*

Доказательство. Если бы G не была редуцированной группой, то в силу леммы 15 G/H также не была бы редуцированной.

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть A^* — такая подгруппа группы без кручения A, что A/A^* является редуцированной периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество. Пусть далее A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — группы без кручения локально конечного r-ранга.*

a) *Если $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то A является K-группой.*

b) *Если $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то A^* является K-группой.*

Доказательство. a) Пусть $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Далее, пусть P — некоторая периодическая группа и пусть G — расширение группы $H = A \dotplus P$ при помощи группы с ограниченными порядками элементов. Если положим $K = A^* \dotplus P \subseteq \subseteq H$, то $H/K \cong A/A^*$, значит, H/K — редуцированная периодическая Π-примарная группа. Из соотношения $G/H \cong (G/K)/(H/K)$ в силу леммы 16 (порядки элементов группы G/H ограничены в совокупности) следует, что группа G/K редуцирована. Очевидно, G/K является периодической Π^*-примарной группой, где Π^* — некоторое конечное множество простых чисел, $\Pi \subseteq \Pi^*$. Если P^* — периодическая часть группы G, то $P^*/P = P^*/(H \cap P^*) \cong \{P^*, H\}/H \subseteq G/H$, или, порядки элементов группы P^*/P ограничены в совокупности. Если применим теорему 4 к группе G и ее подгруппе K, то получим расщепляемость группы G. Этим доказано, что A является K-группой.

b) Пусть теперь $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, пусть P — периодическая группа и пусть дано расширение G группы $H^* = A^* \dotplus P$ при помощи группы с ограниченными порядками элементов. Итак, для некоторого натурального числа n будет $nG \subseteq H^* = A^* \dotplus P \subseteq G$. Если положим $K = A \dotplus P$, то $H^* \subseteq K$ и $K/H^* \cong \cong A/A^*$. Так как $K/H^* \cong (K/nG)/(H^*/nG)$ и так как порядки элементов группы H^*/nG ограничены, то по лемме 16 K/nG — редуцированная группа. Притом группа K/nG Π^*-примарна, где Π^* — некоторое конечное множество простых чисел, $\Pi \subseteq \Pi^*$. Если Q — периодическая часть группы G, то nQ служит периодической частью для nG и из соотношения $nG \subseteq A^* \dotplus P \subseteq G$ следует, что $nQ \subseteq P \subseteq Q$; итак, порядки элементов группы P/nQ ограничены в совокупности. Теперь применим теорему 6 к группе K и ее подгруппе nG и получим что группа nG расщепляема. Отсюда в силу теоремы 50.5 из [1] уже следует расщепляемость группы G. Но это значит, что A^* является K-группой.

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] *L. Fuchs:* Abelian groups, Budapest, 1958.
[2] *L. G. Kovács:* On a paper of Ladislav Procházka, Czech. Math. J. *13* (*88*), 1963, 612—618.
[3] *Л. Прохазка:* К проблеме расщепления некоторых абелевских расширений расщепляемых абелевых групп, Чех. мат. ж. *11* (*86*) 1961, 365—380.
[4] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чех. мат. ж. *10* (*85*) 1960, 479—492.
[5] *Л. Прохазка:* Об однородных абелевых группах без кручения, Чех. мат. ж. *14* (*89*) 1964, 171—202.

Адрес автора: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Zusammenfassung

ERWEITERUNGEN ABELSCHER GRUPPEN DURCH PERIODISCHE GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Unter einer Gruppe ist überall eine abelsche Gruppe zu verstehen.

Eine torsionsfreie Gruppe A heißt eine K-Gruppe, falls für eine beliebige periodische Gruppe P jede Erweiterung G von $H = A \dotplus P$ durch irgendeine ordnungsbeschränkte Gruppe immer eine spaltbare Gruppe bildet. Eine Gruppe G wird von lokal endlichem r-Range genannt, wenn für jede Primzahl p die Gruppe G/pG endlich ist.

So könenn wir die folgende Sätze formulieren.

Satz 1. *Jede torsionsfreie Gruppe von lokal endlichem r-Range ist eine K-Gruppe.*

Satz 2. *Jede direkte Summe von K-Gruppen stellt wieder eine K-Gruppe dar.*

Ist G irgendeine Gruppe, so wird durch G_t ihre maximale periodische Untergruppe bezeichnet.

Satz 5. *Es sei G eine Gruppe und H eine ihrer spaltbaren Untergruppen, für die H/H_t als eine direkte Summe von Gruppen lokal endlichen r-Ranges dargestellt werden kann. Ist G/H eine abzählbare reduzierte Π-primäre Gruppe mit einer endlichen Primzahlmenge Π und ist G_t/H_t ordnungsbeschränkt, so ist die Gruppe G ebenfalls spaltbar.*

Satz 6. *Es sei G eine spaltbare Gruppe der Form $G = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \dotplus G_t$, wo A_n ($n = 1, 2, \ldots$) torsionsfreie Gruppen von endlichem r-Range sind, und sei H eine ihrer*

Untergruppen. Ist G/H eine reduzierte Π-primäre Gruppe mit einer endlichen Primzahlmenge Π und ist G_t/H_t ordnungsbeschränkt, so muß die Untergruppe H spaltbar sein.

Schließlich ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 7. *Es sei A eine torsionsfreie Gruppe und A^* eine ihrer Untergruppen, für die A/A^* eine reduzierte Π-primäre Gruppe mit einer endlichen Primzahlmenge Π bildet. Es seien weiter A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ torsionsfreie Gruppen von lokal endlichem r-Range.*

a) *Ist $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, so ist A eine K-Gruppe.*

b) *Ist $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, so ist A^* eine K-Gruppe.*