D. F. Charazov

Оценки собственных значений некоторых операторов, квадратично зависящих от параметра

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 1, 1–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100755

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *17* (*92*) ПРАГА 20. III. 1967 г., No 1

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ, КВАДРАТИЧНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Д. Ф. ХАРАЗОВ, Ленинград

(Поступило в редакцию 6/IV 1965г.)

1. Пусть X – некоторое комплексное гильбертово пространство, R – линейное подмножество пространства X, плотное в X. Рассмотрим линейные (аддитивные и однородные) операторы H, A_1, A_2, отображающие R в себя и удовлетворяющие следующим условиям (A):

1) H и A_1, вообще говоря, неограниченные операторы, A_2 – оператор, ограниченный на R; 2) для любых $x, y \in R$,

$$(HA_ix, y) = (x, HA_iy) \quad (i = 1, 2)\,, \quad (Hx, x) \geqq \gamma_1(x, x)\,, \quad \gamma_1 > 0\,,$$
$$(HA_2x, x) \geqq \gamma_2(x, x)\,, \quad \gamma_2 > 0\,;$$

3) операторы A_1 и A_2 могут иметь лишь дискретный спектр; 4) оператор $(I - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2)^{-1}$ (I – тождественный оператор в X) существует и ограничен на R для всех значений λ, за исключением, быть может, дискретного множества собственных значений конечной кратности уравнения

$$x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = 0\,, \quad x \in R\,; \tag{1}$$

5) выполняется одно из двух условий: либо для всех λ, неявляющихся собственными значениями уравнения (1)[1] $(I - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2)^{-1}\, X \subset R$, либо оператор A_1 ограничен на R.

К исследованию уравнений (1) приводят различные задачи математической физики (приложения к дифференциальным и интегральным уравнениям см. п. п. 5, 6, 7, задачи механики, приводимые к таким уравнениям, см. напр. [1], где указана подробная библиография).

Спектр уравнения (1) исследован в работе [2], в которой доказано, что если условия (A) выполнены, то уравнение (1) имеет, по крайней мере, одно собствен-

[1]) В силу условия 4), для таких λ оператор $(I - \lambda A, -\lambda^2 A_2)^{-1}$ непрерывно продолжается на все пространство X.

ное значение и все его собственные значения вещественны; установлены экстремальные свойства собственных значений, найдены спектральные разложения операторов A_1 и A_2 по собственным элементам уравнения (1) и доказана полнота системы собственных элементов уравнения (1) в пространстве X.

Целью настоящей работы является установление оценок собственных значений уравнения (1) при помощи собственных значений оператора A_2 (см. п. 3) и применение их в теории интегральных (п. 5), дифференциальных (п. 6) и интегродифференциальных уравнений (п. 7).

2. Уравнение (1), как легко видеть, эквивалентно системе уравнений

$$x - \lambda A_1 x - \lambda A_2 y = 0\,, \quad y - \lambda x = 0\,. \tag{2}$$

Рассмотрим множество G упорядоченных пар $\alpha = \{x, y\}$, $x, y \in R$ и определим операции сложения и умножения на комплексное число μ способом, обычным для прямой суммы пространств

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}\,, \quad \alpha_i = \{x_i, y_i\} \ (i = 1, 2)\,,$$
$$\mu\alpha = \{\mu x, \mu y\}\,.$$

Рассмотрим комплексное число

$$[\alpha_1, \alpha_2] = (Hx_1, x_2) + (HA_2 y_1, y_2)\,. \tag{3}$$

Число (3), в силу условий (A), удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на скалярное произведение гильбертова пространства. Скалярное произведение (3) превращает G в гильбертово пространство, вообще говоря, неполное.

В пространстве G рассмотрим оператор

$$A\alpha = \{A_1 x + A_2 y, x\}\,, \quad \alpha = \{x, y\}\,.$$

При помощи оператора A, систему (2) мы можем записать в виде уравнения, рассматриваемого в G

$$\alpha - \lambda A\alpha = 0\,, \quad \alpha \in G\,. \tag{4}$$

В [2] доказано, что A – линейный симметрический в G оператор, который имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений уравнения (1).

Разложим оператор A на сумму двух операторов следующим образом:

$$A\alpha = \{A_1 x, 0\} + \{A_2 y, x\}$$

и полагая

$$T_1\alpha = \{A_2 y, x\}\,, \quad T_2\alpha = \{A_1 x, 0\}$$

запишем A в виде суммы

$$A = T_1 + T_2\,.$$

Рассмотрим уравнения

$$(5) \qquad \alpha - \lambda T_2 \alpha = 0\,, \quad \alpha \in G$$

и

$$(6) \qquad x - \lambda A_1 x = 0\,, \quad x \in R\,.$$

Число λ_0 и элемент $\alpha_0 = \{x_0, 0\}$ будут собственным значением и собственным элементом уравнения (5), тогда и только тогда, когда λ_0 и $x_0 \in R$ являются собственным значением и собственным элементом уравнения (6). Следовательно, множество собственных значений оператора T_2 в G совпадает с множеством собственных значений оператора A_1 в R.

Уравнение

$$(7) \qquad \alpha - \lambda T_1 \alpha = 0\,, \quad \alpha \in G$$

эквивалентно системе уравнений

$$x - \lambda A_2 y = 0\,, \quad y - \lambda x = 0\,, \quad x, y \in R\,,$$

которая, как легко видеть, эквивалентна уравнению

$$(8) \qquad x - \lambda^2 A_2 x = 0\,, \quad x \in R\,.$$

Для того, чтобы λ_0 и $\alpha_0 = \{x_0, \lambda_0 x_0\} \in G$ были собственным значением и собственным элементом уравнения (7), необходимо и достаточно, чтобы λ_0^2 и $x_0 \in R$ были собственным значением и собственным элементом уравнения (8). Так как оператор A совпадает с оператором T_1, если $A_1 = 0$, то из результатов [2] следует, что T_1 – оператор симметрический в G, который может иметь лишь дискретный спектр.

В силу условий (A) п. 1, все собственные значения оператора A_2 положительны (см. [3]). Отсюда, в силу вышесказанного, следует, что если последовательность

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_n \leqq \ldots \quad (\mu_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots)$$

представляет собой множество собственных значений оператора A_2 в R, то множество собственных значений оператора T_1 в G состоит из последовательности положительных собственных значений

$$\sqrt{\mu_1} \leqq \sqrt{\mu_2} \leqq \ldots \leqq \sqrt{\mu_n} \leqq \ldots$$

и последовательности отрицательных собственных значений

$$-\sqrt{\mu_1} \geqq -\sqrt{\mu_2} \geqq \ldots \geqq -\sqrt{\mu_n} \geqq \ldots$$

3. Пусть

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$$

последовательность собственных значений оператора A_1 в R, расположенных по возрастанию их абсолютных величин. Положим

$$m = \min\left(0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \ldots\right), \quad M = \max\left(0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \ldots\right),$$

очевидно, что $m \leqq 0$, $M \geqq 0$. Так как оператор A_1 симметризуем оператором H в R (см. 2) п. 1), то на основании экстремальных свойств собственных значений симметризуемых операторов, установленных в [3], для любого $x \in R$,

$$m(Hx, x) \leqq (HA_1x, x) \leqq M(Hx, x)\,.$$

Но, так как $(HA_2y, y) \geqq 0$, $y \in R$, то

$$m(HA_2y, y) \leqq 0\,, \quad M(HA_2y, y) \geqq 0$$

и, для любых $x, y \in R$

$$m\{(Hx, x) + (HA_2y, y)\} \leqq (HA_1x, x) \leqq M\{(Hx, x) + (HA_2y, y)\}\,. \tag{9}$$

С другой стороны, для любого $\alpha \in G$, на основании (3),

$$[T_2\alpha, \alpha] = (HA_1x, x) + (HA_20, y) = (HA_1x, y)$$

и

$$[\alpha, \alpha] = (Hx, x) + (HA_2y, y)\,.$$

Отсюда, в силу (9), для любого $\alpha \in G$

$$m[\alpha, \alpha] \leqq [T_2\alpha, \alpha] \leqq M[\alpha, \alpha]$$

и, так как $T_2 = A - T_1$, то для любого $\alpha \in G$,

$$m[\alpha, \alpha] \leqq [(A - T_1)\,\alpha, \alpha] \leqq M[\alpha, \alpha]\,. \tag{10}$$

Таким образом, операторы A и T_1 в пространстве G удовлетворяют всем условиям теоремы 4 работы [4]: они симметричны на G, могут иметь лишь дискретный спектр и удовлетворяют условию (10). Поэтому для n-ых собственных значений $\lambda_n^+ > 0$, $\lambda_n^- < 0$ оператора A, являющихся собственными значениями уравнения (1) справедливы оценки через собственные значениея оператора T_1, указанные в теореме 4 [4]. Следовательно, из теоремы 4 [4] для рассматриваемого случая вытекает

Теорема 1. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (A), *то для n-ых собственных значений λ_n^+, λ_n^- этого уравнения справедливы следующие оценки:*

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + m \leqq \frac{1}{\lambda_n^+} \leqq \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + M\,; \quad \frac{1}{-\sqrt{\mu_n}} + m \leqq \frac{1}{\lambda_n^-} \leqq \frac{1}{-\sqrt{\mu_n}} + M\,, \tag{11}$$

где μ_n — *n-ое собственное значение оператора* $A_2(\mu_n > 0)$. *Если* μ_n — *r - кратное собственное значение оператора* A_2, *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины, по крайней мере, r собственных значений уравнения* (1): $\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^+, \ldots, \ldots, \lambda_{n+r-1}^+ (\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-, \ldots, \lambda_{n+r-1}^-)$. *Если же, кроме того, выполняются неравенства*

$$(12) \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_{n+r}}} + 2\gamma < \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - 2\gamma\,, \quad \gamma = \max\left(|m|, M\right),$$

то в сегментах (11) *лежат обратные величины только указанных r собственных значений уравнения* (1).

Заметим, что последнее утверждение на основании неравенств (12) следует из теоремы 4 [4] для положительных собственных значений уравнения (1). Для отрицательных собственных значений это утверждение следует из неравенств

$$\frac{1}{-\sqrt{\mu_{n-1}}} + 2\gamma < \frac{1}{-\sqrt{\mu_n}} < \frac{1}{-\sqrt{\mu_{n+r}}} - 2\gamma\,,$$

получаемых из (12) умножением на -1.

Пусть теперь $m = 0$, то есть $(HA_1x, x) \geqq 0$, $x \in R$. Тогда, в силу (10),

$$[(A - T_1)\,\alpha, \alpha] \geqq 0\,, \quad \alpha \in G\,,$$

или

$$[A\alpha, \alpha] \geqq [T_1\alpha, \alpha]\,, \quad \alpha \in G\,.$$

Если же $M = 0$, то есть $(HA_1x, x) \leqq 0$, аналогично найдем, что

$$[A\alpha, \alpha] \leqq [T_1 a, \alpha]\,, \quad \alpha \in G\,.$$

В рассмотренных случаях из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (A) *и* $(HA_1x, x) \geqq 0$, $x \in R$, *то для n-ых собственных значений уравнения* (1) *справедливы неравенства*

$$\text{(I)} \qquad \lambda_n^+ \leqq \sqrt{\mu_n}\,; \quad \lambda_n^- \leqq -\sqrt{\mu_n}\,,$$

где μ_n — *n-ое собственное значение оператора* A_2. *Если же* $(HA, x, x) \leqq 0$, $x \in R$, *то справедливы неравенства*

$$\text{(II)} \qquad \lambda_n^+ \geqq \sqrt{\mu_n}\,; \quad \lambda_n^- \geqq -\sqrt{\mu_n}\,.$$

Замечание. Если нам известны оценки снизу и сверху соответственно для обратных величин наибольшего отрицательного и наименьшего положительного собственных значений оператора A_1, то есть известны числа m_0 и M_0 такие, что $m_0 < m$, $M < M_0$ и известны оценки снизу и сверху для n-го собственного значения μ_n оператора A_2, то есть известны числа γ_n и δ_n такие, что $0 < \gamma_n < \mu_n < \delta_n$, то, так как

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} < \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}},$$

на основании неравенств (11) получаются следующие эффективные оценки для n-ых собственных значений уравнения (1):

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} + m_0 < \frac{1}{\lambda_n^+} < \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} + M_0 ; \quad \frac{1}{-\sqrt{\gamma_n}} + m_0 < \frac{1}{\lambda_n^-} < \frac{1}{-\sqrt{\delta_n}} + M_0 .$$

Эти неравенства сводят задачу получения нижних и верхних оценок для собственных значений уравнения (1) к хорошо исследованной задаче нахождения оценок сверху и снизу для собственных значений положительного оператора A_2.

4. Многие граничные задачи математической физики, в частности механики (см. [1]) приводят к исследованию уравнений вида

$$Ax - \lambda B_1 x - \lambda^2 B_2 x = 0 , \quad x \in R , \tag{13}$$

где A, B_1, B_2 – линейные операторы, определенные соответственно на R, на $D_{B_1} \supseteqq R$ и на $D_{B_2} \supseteqq R$, порожденные заданными дифференциальными выражениями и граничными условиями и удовлетворяющие следующим условиям (B):

1) $A(R) \supseteqq B_1(D_{B_1})$, $A(R) \supseteqq B_2(D_{B_2})$;

2) $(Ax, y) = (x, Ay)$, $(B_i x, y) = (x, B_i y)$, $x, y \in R$ $(i = 1, 2)$;

3) $(Ax, x) \geqq \gamma_1(x, x)$, $\gamma_1 > 0$, $(B_2 x, x) \geqq \gamma_2(x, x)$, $\gamma_2 > 0$, $x \in R$;

4) оператор $(I - \lambda A^{-1}B_1 - \lambda^2 A^{-1}B_2)^{-1}$ существует и ограничен на R для всех λ за исключением, быть может, дискретного множества собственных значений конечной кратности уравнения (13);

5) операторы $A^{-1}B_1$ и $A^{-1}B_2$ ограничены на R и могут иметь лишь дискретный спектр.

В силу указанных условий, уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$x - \lambda A^{-1}B_1 x - \lambda^2 A^{-1}B_2 x = 0 , \quad x \in R . \tag{14}$$

Через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ обозначим собственные значения уравнения

$$Ax - \lambda B_1 x = 0 , \quad x \in R$$

и положим

$$m = \min\left(0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \ldots\right), \quad M = \max\left(0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \ldots\right). \tag{15}$$

Через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ обозначим собственные значения уравнения

$$Ax - \lambda B_2 x = 0 , \quad x \in R . \tag{16}$$

В силу условия 3), $\mu_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) (см. [3]). Из условий (B), как легко видеть, вытекает выполнение условий (A) для уравнения (14). Следовательно, для уравнения (14) справедлива теорема 1, из которой для уравнения (13) вытекает

Теорема 3. *Если для уравнения* (13) *выполнены условия* (B), *то для n-ых собственных значений* λ_n^+, λ_n^- *этого уравнения справедливы оценки* (11), *где* μ_n — *n-ое собственное значение уравнения* (16), *а m и M определяются формулами* (15). *Если* μ_n — r — *кратное собственное значение уравнения* (16), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины, по крайней мере, r собственных значений* $\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^+, \ldots, \ldots, \lambda_{n+r-1}^+$ ($\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-, \ldots, \lambda_{n+r-1}^-$) *уравнения* (13). *Если же, кроме того, выполняются неравенства* (12), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины только указанных r собственных значений уравнения* (13).

В рассматриваемом случае $A_1 = A^{-1}B_1$, $A_2 = A^{-1}B_2$, $H = A$, $HA_1 = B_1$ (см. п. 1), и поэтому из теоремы 2 для уравнения (13) следует.

Теорема 4. *Если для уравнения* (13) *выполнены условия* (B) *и* $(B_1 x, x) \geqq 0$ $x \in R$, *то для n-ых собственных значений* λ_n^+, λ_n^- *уравнения* (13) *справедливы неравенства* (I), *где* μ_n – *n-ое собственное значение уравнения* (16), *если же* $(B_1 x, x) \leqq 0$, $x \in R$, *то-справедливы неравенства* (II).

5. В этом и следующих пунктах мы укажем некоторые приложения полученных выше результатов.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) - \lambda \int_a^b [A_1(x, y) + \lambda A_2(x, y)]\, u(y)\, \mathrm{d}y = 0 , \tag{17}$$

где $A_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) – ядра с суммируемым квадратом в прямоугольнике $a \leqq x$, $y \leqq b$, симметризуемые ядром $H(x, y)$. Кроме того считаем, что для любой функции $u(x) \in L^2(a, b)$,

$$\int_a^b \int_a^b H(x, y)\, u(x)\, u(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geqq \gamma_1 \int_a^b u^2(x)\, \mathrm{d}x , \quad \gamma_1 > 0 ,$$

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b H(x, t)\, A_2(t, y)\, u(x)\, u(y)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geqq \gamma_2 \int_a^b u^2(x)\, \mathrm{d}x , \quad \gamma_2 > 0 .$$

Операторы

$$A_1 u = \int_a^b A_1(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y , \quad A_2 u = \int_a^b A_2(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

являются вполне непрерывными в $L^2(a, b)$, а потому их спектры дискретны. Дискретность спектра уравнения (17), при указанных выше условиях, доказана в работе [5]. Таким образом, для уравнения (17) выполняются условия (A), а потому из теоремы 1 следует

Теорема 5. *Если для уравнения* (17) *выполняются вышеуказанные условия, то для n-ых собственных значений* λ_n^+, λ_n^- *этого уравнения справедливы оценки* (11), *где* μ_n – *n-ое собственное значение ядра* $A_2(x, y)$ $(\mu_n > 0)$, $m = \min(0, 1/\varkappa_1, 1/\varkappa_2, \ldots)$, $M = \max(0, 1/\varkappa_1, 1/\varkappa_2, \ldots)$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – *собственные значения ядра* $A_1(x, y)$. *Если* μ_n – *r-кратное собственное значение ядра* $A_2(x, y)$, *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины, по крайней мере, r собственных значений* $\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^+, \ldots, \lambda_{n+r-1}^+$ $(\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-, \ldots, \lambda_{n+r-1}^-)$ *уравнения* (17). *Если же, кроме того, выполняются неравенства* (12), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины только указанных r собственных значений уравнения* (17).

Из теоремы 2, для уравнения (17), следует

Теорема 6. *Если для уравнения* (17) *выполняются вышеуказанные условия и*

$$\Phi[u(x)] \equiv \int_a^b \int_a^b \int_a^b H(x, t)\, A_1(t, y)\, u(x)\, u(y)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geqq 0\,,$$

для любой функции $u(x) \in L^2(a, b)$, *то для n-ых собственных значений* λ_n^+, λ_n^- *уравнения* (17) *справедливы неравенства* (I), *где* μ_n – *n-ое собственное значение ядра* $A_2(x, y)$, *если же* $\Phi[u(x)] \leqq 0$, $u(x) \in L^2(a, b)$, *то справедливы неравенства* (II).

6. Пусть $\Lambda(u)$, $L_1(u)$, $L_2(u)$ – линейные самосопряженные, в смысле Лагранжа, дифференциальные операторы в некоторой области T n-мерного $(n \geqq 1)$ пространства точек $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с границей S, имеющие соответственно порядки $2k$, $2m_1$ и $2m_2$, $m_i \leqq k - 1$ $(i = 1, 2)$, $k \geqq 1$; $U_i(u)$ $(i = 1, \ldots, k)$ – линейные дифференциальные операторы не выше $(2k - 1)$го порядка, заданные на границе S. Поставим следующую граничную задачу (Λ): найти решение $u(x)$ дифференциального уравнения

$$\Lambda(u) = \lambda\, L_1(u) + \lambda^2\, L_2(u) \tag{18}$$

в области T, удовлетворяющее на границе S условиям

$$U_i(u) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)\,. \tag{19}$$

Если $n = 1$, то (18) будет обыкновенным дифференциальным уравнением и под условиями (19) надо понимать $2k$ условий на концах интервала (a, b), являющегося в этом случае областью T, в которой ищется решение, если же $n > 1$, то (19) – уравнение с частными производными.

Пусть $C^{(2k)}$ – совокупность функций $u(x)$ непрерывных в $T+S$ вместе со своими частными производными до $2k$-го порядка, удовлетворяющих на S условиям (19). Это множество $C^{(2k)}$ плотно в пространстве $L^2(T)$ функций с суммируемым квадратом в области T, по метрике пространства $L^2(T)$.

Будем считать выполненными следующие условия:

1) для любой функции $u(x) \in C^{(2k)}$

$$\int_T u\, \Lambda(u)\, \mathrm{d}x \geqq \gamma_1 \int_T u^2(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad \gamma_1 > 0\,,$$

$$\int_T u\, L_2(u)\, \mathrm{d}x \geqq \gamma_2 \int_T u^2(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad \gamma_2 > 0\,,$$

где $\int_T$ обозначает n-кратный интеграл по области T;

2) обратный оператор Λ^{-1} является интегральным с ядром, представляющим собой функцию Грина оператора $\Lambda(u)$, соответствующую граничным условиям (19). (Существование Λ^{-1} следует из условия 1). Достаточно общие условия существования функции Грина для оператора $\Lambda(u)$ указаны Е. Леви [6]);

3) для любых функций $u(x), v(x) \in C^{(2k)}$

$$\int_T [v\, \Lambda(u) - u\, \Lambda(v)]\, \mathrm{d}x = 0\,, \quad \int_T [v\, L_i(u) - u\, L_i(v)]\, \mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1, 2)\,.$$

В работе [5] показано, что задача (Λ) при вышеуказанных условиях имеет дискретный спектр. При выполнении условий, указанных в этом пункте, дифференциальные операторы $\Lambda(u)$, $L_1(u)$ и $L_2(u)$ на множестве функций $C^{(2k)}$, плотном в $L^2(T)$ порождают линейные операторы, удовлетворяющие условиям (B) (см. п. 4). Поэтому из теоремы 3 для рассматриваемой задачи (Λ) следует

Теорема 7. *Если для задачи* (Λ) *выполняются вышеуказанные условия, то для* n*-ых собственных значений* λ_n^+, λ_n^- *этой задачи справедливы оценки* (11), *где* μ_n – n*-ое собственное значение* ($\mu_n > 0$) *граничной задачи:*

$$(20) \qquad \Lambda(u) = \lambda\, L_2(u)\,, \quad U_i(u) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)\,,$$

$$m = \min\left(0, \frac{1}{\varkappa_1}, \frac{1}{\varkappa_2}, \dots\right), \quad M = \max\left(0, \frac{1}{\varkappa_1}, \frac{1}{\varkappa_2}, \dots\right),$$

а $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n, \dots$ *собственные значения граничной задачи:*

$$\Lambda(u) = \lambda\, L_1(u)\,, \quad U_i(u) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)\,.$$

Если μ_n r*-кратное собственное значение задачи* (20), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины, по крайней мере,* r *собственных значений* $\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^+, \dots, \lambda_{n+r-1}^+$

$(\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-, \ldots, \lambda_{n+r-1}^-)$ *задачи* (Λ). *Если же, кроме того, выполняются неравенства* (12), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины только указанных r собственных значений задачи* (Λ).

Из теоремы 4 для задачи (Λ) следует

Теорема 8. *Если для задачи* (Λ) *выполняются вышеуказанные условия и* $\Phi[u(x)] \equiv \equiv \int_T uL_1(u)\,\mathrm{d}x \geqq 0$ *для любой функции* $u(x) \in C^{(2k)}$, *то для n-ых собственных значений задачи* (Λ) *справедливы неравенства* (I), *где* μ_n — *n-ое собственное значение граничной задачи* (20), *если же* $\Phi[u(x)] \leqq 0$, $u(x) \in C'^{(2k)}$, *то справедливы неравенства* (II).

7. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\Lambda(u) = \lambda \int_T [B_1(x, t) + \lambda B_2(x, t)]\, u(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{21}$$

где $\Lambda(u)$ — линейный дифференциальный оператор в области T n-мерного пространства, удовлетворяющий всем условиям, указанным в п. 6, а $B_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$-ядра симметрические относительно точек $x(x_1, \ldots, x_n)$ и $t(t_1, \ldots, t_n)$ и непрерывные в области $T \times T$. Кроме того, $B_2(x, t)$ — положительно определенное ядро.

Будем искать решение уравнения (21) в области T, удовлетворяющее на границе S условиям (19) (см. п. 6). Из результатов работы [5] следует, что при указанных условиях, граничная задача (21), (19) имеет дискретный спектр.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий, указанных в этом пункте, операторы $\Lambda(u)$, $B_1(u) = \int_T B_1(x, t)\, u(t)\,\mathrm{d}t$, $B_2(u) = \int_T B_2(x, t)\, u(t)\,\mathrm{d}t$ на множестве функций $C^{(2k)}$, плотном в $L^2(T)$ (см. п. 6) порождают линейные операторы, удовлетворяющие условиям (B) (см. п. 4). Поэтому из теоремы 3, для задачи (21), (19) следует

Теорема 9. *Если для граничной задачи* (21), (19) *выполняются вышеуказанные условия, то для n-ых собственных значений этой задачи* λ_n^+, λ_n^- *справедливы оценки* (11), *где* μ_n — *n-ое собственное значение* $(\mu_n > 0)$ *граничной задачи:*

$$\Lambda(u) = \lambda \int_T B_2(x, t)\, u(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad U_i(u) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)\,, \tag{22}$$

$$m = \min\left(0, \frac{1}{\varkappa_1}, \frac{1}{\varkappa_2}, \ldots\right), \quad M = \max\left(0, \frac{1}{\varkappa_1}, \frac{1}{\varkappa_2}, \ldots\right),$$

а $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n, \ldots$ *собственные значения задачи:*

$$\Lambda(u) = \lambda \int_T B_1(x, t)\, u(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad U({}_iu) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

Если μ_n r — кратное собственное значение задачи (22), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины, по крайней мере r собственных значений $\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^+, \ldots, \ldots, \lambda_{n+r-1}^+(\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-, \ldots, \lambda_{n+r-1}^-)$ задачи* (21), (19). *Если же, кроме того, выполняются неравенства* (12), *то в сегментах* (11) *лежат обратные величины только указанных r собственных значений задачи* (21), (19).

Из теоремы 4 для задачи (21), (19) вытекает

Теорема 10. *Если для задачи* (21), (19) *выполняются вышеуказанные условия и ядро $B_1(x, t)$ положительно определенное в области $T \times T$, то для n-ых собственных значений задачи* (21), (19) *справедливы неравенства* (I), *где μ_n — n-ое собственное значение задачи* (22), *если же ядро $B_1(x, t)$ отрицательно определенное, то справедливы неравенства* (II).

Литература

[1] *L. Collatz:* Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig, 1945.

[2] *Д. Ф. Харазов.* О некоторих неогрениченных симметризуемых операторах в гильбертовых пространствах, УМН т. *XV*, в. 4 (94), 1960, 177—184.

[3] *Д. Ф. Харазов*, О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта, УМН, т. *XII* в. 4(76), 1957, 201—208.

[4] *Д. Ф. Харазов*, О теоремах типа сравнения для собственных значений некоторых операторов с дискретным спектром, Тр. тбил. мат. ин.-та, т. *29*, 1964, 219—227.

[5] *Д. Ф. Харазов*, Некоторые вопросы теории линейных симметризуемых операторов, Матем. сборн. т. *42* (84), в. 2, 1957, 129—178.

[6] *Е. Леви*, О линейных эллиптических уравнениях в частных производных, УМН, вып. *VII*, 1941, 249—292.

Адрес автора: Лениитрад D-194, ул. Каляева 22, СССР.

Résumé

LES ESTIMATIONS DES VALEURS PROPRES POUR LES OPÉRATEURS DÉPENDANT QUADRATIQUEMENT DU PARAMÈTRE

D. F. CHARAZOV, Leningrad

Les estimations des valeurs propres pour l'équation $x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = 0$ sont données a l'aide du spectre de l'operateur A_2.