Gheorghe Pic

Sur un théorème de Vl. Dlab

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 4, 545–551

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100749`

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

SUR UN THÉORÈME DE VL. DLAB[1])

Gheorghe Pic, Cluj

(Reçu le 1 septembre 1965)

1. Soit $\{G^m\}$ le sousgroupe du groupe G généré par la m-ième puissance de tous les éléments de G. F. Szász [8], [9], [10] a montré que, si tous les sousgroupes cycliques H_i de G ont la proprieté qu'il existe un nombre naturel m_i ainsi que $H_i = \{G^{m_i}\}$ alors G est à son tour cyclique. Ce résultat et d'autres généralisations ont été donnés par F. Szász [12], Vl. Dlab [1] et I. Körneyi [5].

Dlab a montré [1] que si t est le plus grand commun diviseur de $m_1, \ldots, m_k$, et si les sousgroupes $\{G^{m_1}\}, \ldots, \{G^{m_k}\}$ sont cycliques alors $\{G^t\}$ est à son tour cyclique. De ce résultat on déduit facilement une nouvelle démonstration du théorème de F. Szász.

Dans la théorie des groupes on peut quelquefois apercevoir une certaine dualité, laquelle pourtant ne nous conduit pas automatiquement, comme en géométrie projective, a un théorème dual. Cependant elle nous donne quelquefois la possibilité d'avoir l'intuition d'un résultat dual. De telles considérations nous ont conduit au suivant résultat [7]: Soit $\{G_m\}$ le sousgroupe du groupe fini G généré par les éléments de $g \in G$ pour lesquels $g^m = 1$. Si pour chaque sousgroupe cyclique H_i il existe un nombre naturel m_i tel que $H_i = \{G_{m_i}\}$, alors G est cyclique.

Dans la présente note nous nous proposons de démontrer que si $\{G_m\}$ et $\{G_n\}$ sont cycliques, alors $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ est aussi cyclique. Ce résultat correspond au théorème de Dlab, mais on ne peut — comme dans le théorème de Dlab — le généraliser pour plusieurs nombres, sauf dans des cas particuliers. Un tel cas est utilisé pour retrouver, notre théorème cité auparavant.

Récemment Vl. Dlab [2] a donné une nouvelle généralisation de son théorème montrant que si $\{G^m\}$ et $\{G^n\}$ sont abéliens alors $\{G^{(m,n)}\}$ est à son tour abélien. De cette manière il a répondu à un problème posé par F. Szász [12].

Dans cette note nous donnons aussi une généralisation qui correspond à celle de Dlab et ensuite un résultat similaire si $\{G_m\}$ et $\{G_n\}$ sont nilpotents réguliers. La démonstration donnée nous fait supposer que le résultat n'est pas valable si on rénonce à la régularité.

[1]) Je remercie M. Kořínek et son collectif pour leurs precieux conseils qui ont contribué à l'amélioration de ma rédaction et des certaines démonstrations.

2. Il est presque évident que:

Lemme 1. $\{G_{mn}\} \supseteq \{G_m\}$.

Lemme 2. *Les sousgroupes $\{G_m\}$ de G sont invariants pour tous les endomorphismes de G.*

Lemme 3. $\{G_{mn}\} \supseteq \{G_m\} \cap \{G_n\} \supseteq \{\{G_m\}_n\} \supseteq \{G_{(m,n)}\}$.

Démonstration. Soit $g_i \in \{G_m\}$. On pourra l'écrire

$$g_i = g_{1i} g_{2i}, \ldots, g_{k_i i} \tag{1}$$

où g_{li} est un élément générateur de $\{G_m\}$, c'est-à-dire $g_{li}^m = 1$. Un élément de $\{\{G_m\}_n\}$ aura par suite la forme suivante:

$$G = g_1, g_2 \ldots, g_k \tag{2}$$

où $g_s^n = 1$ et cela signifie que $g \in \{G_n\}$. D'autre part $g_s^n \in \{G_m\}$, donc nous aurons aussi $g \in \{G_m\}$ et par conséquent $g \in \{G_m\} \cap \{G_n\}$, c'est-à-dire $\{\{G_m\}_n\} \subseteq \{G_m\} \cap \cap \{G_n\}$. Soit maintenant $g \in \{G_{(m,n)}\}_n$. En l'écrivant sous la forme (1), on aura $g_{ki}^{(m,n)} = 1$, donc aussi $g_{ki}^n = 1$. En même temps $g_{ki}^m = 1$, donc $g \in \{\{G_m\}_n\}$ c'est-à-dire $\{G_{(m,n)}\} \subseteq \{\{G_m\}_n\}$.

Lemme 4. *On a toujours*

$$\{G_{[m,n]}\} = \{G_m\} \, . \, \{G_n\} \, . \tag{3}$$

Démonstration. L'inclusion

$$\{G_{[m,n]}\} \supseteq \{G_m\} \, . \, \{G_n\}$$

est la conséquence immédiate des lemmes 1 et 2.

Posons $m = k(m, n)$, $n = l(m, n)$; $[m, n] = ml = nk$. Parce que $(k,l) = 1$, on peut déterminer des nombres entiers λ et μ tels que

$$\lambda k + \mu l = 1 \, .$$

Soit $g \in G$ un générateur de $\{G_{[m,n]}\} : g^{[m,n]} = 1$. On a

$$g = g^{\lambda k - \mu l} = (g^k)^\lambda \cdot (g^l)^\mu \, .$$

Parce que $(g^k)^n = g^{[m,n]} = 1$ et $(g^l)^m = g^{[m,n]} = 1$, g^k est un générateur des $\{G_n\}$ et g^l un générateur de $\{G_m\}$. Chaque générateur $g \in \{G_{[m,n]}\}$ étant le produit d'un générateur de $\{G_m\}$ et d'un générateur de $\{G_n\}$, on a $G_{[m,n]} \subseteq \{G_m\} \, . \, \{G_n\}$ et par conséquent aussi $\{G_{[m,n]}\} \subseteq \{G_m\} \, . \, \{G_n\}$.

Le lemme est démontré.

Lemme 5. *Pour* $\{G_m\}$ *et* $\{G_n\}$ *abéliens on a*

$$\{G_{(m,n)}\} = \{G_m\} \cap \{G_n\} . \tag{4}$$

Démonstration. D'après le lemme 3 on a

$$\{G_m\} \cap \{G_n\} \supseteq \{G_{(m,n)}\} .$$

Inversement dans le cas abélien on a $\{G_m\} = G_m$ et $\{G_n\} = G_n$. Soit $g \in \{G_m\} \cap \{G_n\}$, c'est-à-dire $g \in G_m$ et $g \in G_n$, d'où $g^m = 1$ et $g^n = 1$. Il en suit $g^{(m,n)} = 1$, cela veut dire $g \in \{G_{(m,n)}\}$. Par conséquent $\{G_{(m,n)}\} \supseteq \{G_m\} \cap \{G_n\}$ et le lemme est démontré.

Lemme 6. *Soit* H *et* K *deux sousgroupes normaux du groupe* G *tels que* $G = H . K$. *En ce cas on a l'isomorphisme*

$$G/H \cap K \simeq H/H \cap K \times K/H \cap K$$

$\times$ *désignant le produit direct des groupes.*

Théorème 1. *Soit* $\{G_m\}$ *et* $\{G_n\}$ *sousgroupes cycliques de* G *alors* $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ *est cyclique.*

Démonstration. D'après le lemme 4 on a (3) et d'après le lemme 5 on a (4). Le lemme 6 donne maintenant

$$\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\} = \{G_m\} . \{G_n\}/\{G_m\} \cap \{G_n\} \simeq$$
$$\simeq \{G_m\}/\{G_n\} \cap \{G_m\} \times \{G_n\}/\{G_n\} \cap \{G_m\} = \{G_m\}/\{G_{(m,n)}\} \times \{G_n\}/\{G_{(m,n)}\} .$$

Le groupe $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ est alors de produit direct des sousgroupes cycliques $\{G_m\}/\{G_{(m,n)}\}$ et $\{G_n\}/\{G_{(m,n)}\}$. Les ordres de ceux-ci étant relativement premiers, notre théorème en résulte.

3. Dans les hypothèses faites, le groupe $\{G_{[m,n]}\}$ est cyclique si les éléments des sousgroupes $\{G_m\}$ et $\{G_n\}$ sont permutables. Mais en général $\{G_{[m,n]}\}$ n'est pas cyclique comme nous le montre l'exemple suivant:

Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers impairs qui peuvent être précisés convenablement. Soit G le groupe généré par les éléments u et v qui vérifient les rélations suivantes:

$$u^{-1}vu = v^{1-p_1^{h_1}p_2^{h_2}} ; \quad v^{-1}uv = u^{1+p_1^{k_1}p_2^{k_2}}$$

$$u^m = u^{p_1^{2k_1}p_2^{r_2}} = 1 ; \quad v^n = v^{p_1^{s_1}p_2^{2h_2}} = 1$$

$$h_1 > k_1 ; \quad k_2 + h_2 > r_2 ; \quad k_1 + h_1 > s_1 ; \quad k_2 > h_2 .$$

Les rélations écrites nous donnent

$$u^k = u^{p_1^{k_1}p_2^{k_2}} = v^{p_1^{k_1}p_2^{h_2}} = v^h$$

$\{G_m\}$ et $\{G_n\}$ seront cycliques si nous choisissons les nombres premiers p_1 et p_2 de manière appropriée. Tout de même $\{G_{[m,n]}\}$ n'est pas cyclique.

En effet, on voit facilement que les éléments uv et uv^2 sont d'ordre $[m, n]$. Nous montrerons qu'il n'existe pas un nombre entier λ tel que $(uv)^\lambda = uv^2$ et cela signific que $\{G_{[m,n]}\}$ n'est pas cyclique.

Les rélations écrites auparavant nous montrent qu'une telle égalité peut avoir lieu seulement si $\lambda = 1 + \mu k$ où μ est un nombre naturel. Alors $(uv)^\lambda = uv^2$ nous donne

$$v^{\lambda + h\binom{\lambda}{2}} = v^2$$

c'est-à-dire

$$\mu k + h \frac{(1 + \mu k)\, \mu k}{2} \equiv 1\,, \quad \bmod n = p_1^{s_1} p_2^{2h_2}$$

Mais cette congruence n'a pas des solutions parce que sa première partie et le module sont divisibles par p_1 pendant que la deuxième partie n'est pas divisible par p_1.

L'hypothèse que $\{G_{m_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont cycliques ne donne pas que $\{G_{[m_1, m_2, \ldots, m_r]}\}/\{G_{(m_1, m, 2 \ldots, m_r)}\}$ est cyclique si $r > 2$.

Soit par exemple G le groupe abélien généré par les éléments u, v, w pour lesquels

$$u^p = v^q = w^r = 1\,.$$

Le groupe $\{G_{[p,q,r]}\}/\{G_{(p,q,r)}\}$ n'est pas en général cyclique, parce que le sousgroupe $\{G_{[p,q]}\}/\{G_{(p,q,r)}\}$ du groupe considéré n'est pas cyclique.

Nous avons tout de même:

Théorème 2. *Soit m_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ des nombres naturels tels que $(m_i, m_j) = 1$. Soit $\{G_{m_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ cyclique. Alors $\{G_{m_1 m_2 \ldots m_r}\}$ est aussi cyclique.*

Démonstration. Le théorème 1 nous montre que le théorème 2 est vraie si $r = 2$. Procédons par induction. Supposons donc que $\{G_{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}\}$ est cyclique. $m_1\, m_2 \ldots m_{r-1}$ et m_r étant relativement premiers le théorème 1 nous donne que $\{G_{[m_1 \ldots m_{r-1}, m_r]}\}$ est cyclique. On obtient le résultat énonce en observant que $[m_1 \ldots m_{r-1}, m_r] = m_1\, m_2 \ldots m_r$.

Des théorèmes démontrés on peut déduire le résultat suivant démontré aussi dans un travail précédent [7]:

Théorème 3. *Le groupe fini G est cyclique si et seulement si pour chaque nombre naturel m $\{G_m\}$ est cyclique.*

Soit $u = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ l'ordre du groupe G et sa décomposition en facterus premiers. L'hypothèse faite nous montre que $\{G_{p_i}^{k_i}\}$ est cyclique et le théorème 2 nous donne le résultat énoncé.

Selon O. Ore ([6] p. 267) un groupe infini est cyclique généralisé si chaque sousensemble fini d'éléments de G donne naissance à un sousgroupe cyclique fini.

Lemme 7. *Soit G un groupe cyclique généralisé. Alors pour chaque nombre naturel n l'équation*

$$x^n = 1 \tag{5}$$

possède dans G n solutions au plus.

Démonstration. Dans un groupe cyclique fini l'équation (5) a évidemment n solutions au plus. Supposons que l'équation (5) possède dans G au moins $n + 1$ solutions distinctes: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. D'après la supposition $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ est un sousgroupe cyclique fini de G et nous sommes parvenu à une contradiction.

Théorème 4. *Un groupe infini G est cyclique généralisé si et seulement si pour chaque n* $\{G_n\}$ *est cyclique et G n'a pas des éléments d'ordre infini.*

Démonstration. Soit G un groupe cyclique généralisé. G ne possède alors que des éléments d'ordre fini. Le sousgroupe $\{G_n\}$ est engendré par les solutions de l'équation (5). Par conséquent $\{G_n\}$ a un nombre fini de générateurs et d'après la supposition $\{G_n\}$ est cyclique fini.

Réciproquement soit G un groupe sans éléments d'ordre infini et pour chaque n $\{G_n\}$ soit un groupe cyclique.

Nous montrerons que chaque ensemble fini M d'éléments engendre un sousgroupe cyclique et normal de G. Nous procéderons par induction. Soit $M = u_1$. Si l'ordre de $\{u_1\}$ est égal à n alors $\{u_1\} = \{G_n\}$ et $\{u_1\}$ sera par suite un sousgroupe normal de G.

Supposons maintenant que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ est un sousgroupe cyclique H de G qui est normal dans G. Alors, ou bien $K = \{x_1, \ldots, x_k\} = H$ et alors notre affirmation est vraie, ou $K \neq H$. Comme H est fini et normal dans G et x_k d'ordre fini, il résulte que K est aussi fini. Mais alors les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites pour K, donc K est à son tour cyclique. Soit m l'ordre de K. Donc chaque élément de K est solution de l'équation $x^m = 1$, et l'on voit aisément que $K = \{G_m\}$.

On ne peut pas renoncer à la condition que G n'ait pas des éléments d'ordre infini. En effet, soit H un groupe cyclique généralisé et L un groupe cyclique infini. Alors pour $G = H \times L$ $\{G_n\}$ est cyclique et pourtant G n'est pas cyclique généralisé.

4. Dans sa note [12] F. Szász a posé le problème d'établir que si $\{G^m\}$ et $\{G^n\}$ sont abéliens alors aussi $\{G^{(m,n)}\}$ est abélien. Il a énoncé un problème similaire si $\{G^{m)}\}$ et $\{G^{(n)}\}$ sont nilpotents. Le premier problème a été résolu par Vl. Dlab [2].

Nous nous proposons de montrer que:

Théorème 5. *Si les sousgroupes* $\{G_m\}$ *et* $\{G_n\}$ *du groupe G sont abéliens alors* $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ *est aussi abélien.*

On démontre ce théorème d'une manière tout-à-fait analogue à la démonstration du théorème 1. Le théorème 5 est d'ailleurs un cas spécial du théorème 6.

Théorème 6. *Si les sousgroupes* $\{G_m\}$ *et* $\{G_n\}$ *du groupe G sont nilpotents et réguliers, alors aussi* $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ *est nilpotent et régulier.*

Nous démontrerons d'abord que si les hypothèses sont satisfaites alors $\{G_m\} \cap \cap \{G_n\} = \{G_{(m,n)}\}$.

Soit $g \in \{G_m\} \cap \{G_n\}$. Alors $g \in \{G_m\}$. Soit $\{G_m\}^{(p)}$ un p-Sylowgroupe de $\{G_m\}$ et $g_1^{(p)}, \ldots, g_k^{(p)}$ ses générateurs. Alors de $(g_i^{(p)})^m = 1$ suit sur la base de certaines propriètés connues des groupes réguliers (v. p. ex. [3] théor. 12.4.3.) que $g^m = 1$ de la même manière on a $g^n = 1$, donc $g^{(m,n)} = 1$. Par conséquent $g \in \{G_{(m,n)}\}$ et donc $\{G_m\} \cap \{G_n\} \subseteq \{G_{(m,n)}\}$.

L'inclusion réciproque $\{G_{(m,n)}\} \subseteq \{G_m\} \cap \{G_n\}$ découle du lemme 2. En utilisant les lemmes 5 et 6 on obtient maintenant les rélations

$$\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\} = \{G_m\} \cdot \{G_n\}/\{G_m\} \cap \{G_n\} \simeq$$
$$\simeq \{G_m\}/\{G_m\} \cap \{G_n\} \times \{G_n\}/\{G_m\} \cap \{G_n\} =$$
$$= \{G_m\}/\{G_{(m,n)}\} \times \{G_n\}/\{G_{(m,n)}\}$$

$\{G_m\}$ et $\{G_n\}$ étant nilpotents et réguliers les groupes — quotients $\{G_m\}/\{G_{(m,n)}\}$ et $\{G_n\}/\{G_{(m,n)}\}$ le sont aussi (voir [3], chap. 12,4.) et cela est vrai de même pour leur produit direct. Le théorème est démontré.

Bibliographie

[1] *Dlab Vl.:* On cyclic groups. Czech. Math. J. *10* (*85*), (1960) pp. 244—254.
[2] *Dlab Vl.:* A note on powers of a group. Acta Sci. Math. *25* (1964) pp. 177—178.
[3] *Hall M.:* The theory of groups. New York 1959.
[4] *Körneyi I.:* Über ein gruppentheoretisches Problem. Mat. Kut. Int. Közl. *7* (1962) pp. 64—66.
[5] *Ore O.:* Structures and group theory II. Duke Math. Journ. *4* (1938) pp. 247—269.
[6] *Pic Gh.:* Despre caracterizarea grupurilor ciclice. Com. Acad. R.P.R. *6* (1956) pp. 13—16.
[7] *Szász F.:* On cyclic groups. Fund. Math. *43* (1956) pp. 238—240.
[8] *Szász F.:* A characterisation of the cyclic groups. Rev. Math. pures et appl. *1* (1956) pp. 13—16.
[9] *Szász F.:* Über Gruppen deren sämtliche niehttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind. Acta Sci. Math. *17* (1956) pp. 83—84.
[10] *Szász F.:* On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *6* (1956) pp. 475—77.
[11] *Szász F.:* Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen sind". Acta Sci. Math. *23* (1962) pp. 64—66.

Adresse de auteur: Cluj, Str. Kogalnicenu 1, Roumanie (Universitatea „Bakeș-Bolyai", Facultatea de Matematica-Mecanica).

Резюме

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. ДЛАБА

ДЖОРДЖ ПИЦ, (Gheorghe Pic), Клуж

Пусть $\{G_n\}$ – подгруппа $\{G\}$, порожденная элементами $g \in G$, для которых $g^n = 1$. В работе исследуются определенные группы в зависимости от свойств подгрупп $\{G_n\}$. Таким образом доказано между прочим, что если подгруппы $\{G_n\}$ и $\{G_m\}$ являются циклическими, то тем же свойством обладает и группа $\{G_{[m,n]}\}/\{G_{(m,n)}\}$ (Теорема 1). Аналогичное свойство устанавливается в том случае, когда $\{G_n\}$ и $\{G_m\}$ являются абелевыми (теорема 5) или специальными и регулярными (теорема 6).