Miroslav Sova

Условия дифференцируемости в линейных топологических пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 3, 339–362

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100737

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

МИРОСЛАВ СОВА (Miroslav Sova), Прага

(Поступило в редакцию 7/I 1963г.)

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1] и состоит из двух частей. В первой части приведены некоторые специальные теоремы о дифференцируемости, и в связи с этим произведено сравнение с некоторыми другими определениями дифференциалов. Вторая часть посвящена дифференцируемости некоторых специальных функций, определенных при помощи различных аналитических средств. Здесь, в особенности, доказано, что существуют некоторые, естественным способом определенные функции, которые являются компактно дифференцируемыми, но не ограниченно (по Фреше) дифференцируемыми. Затем показаны некоторые приложения теорем о подстановке и о пределе.

В работе [1] я допустил один недочет. Я не был ознакомлен с работой [5] и считал, что идея классификации дифференциалов по системе множеств (в [1] опорные системы), на которых дифференциальное отношение сходится равномерно, является новой. На самом деле эта мысль появилась уже в работе [5]. Извиняюсь за эту оплошность перед автором работы Х. С.-э-Сильва. Однако, по своему содержанию обе работы ([1] и [5]) перекрываются совсем незначительно;мож но указать только теорему 3,2,2 из [1], которая приведена в [5] для опорной системы λ.`В работе [5] вовсе не исследуются свойства компактных дифференциалов, которые представляют собой, в определенном смысле, самый естественный класс дифференциалов, обладающих весьма простыми свойствами. Их изучение является основной целью работы [1] и настоящей работы.

Дифференциалы в линейных топологических пространствах изучаются также в работе [6]. Сравнение работ [1] и [6] в общем случае более затруднительно влсествие различного понимания принципов. В частном случае, когда областью определения служит пространство Банаха, работа [6] не приносит ничего нового, дело касается просто дифференциала Фреше и Гато в обыкновенном смысле. С другой стороны, сущность работы [1] не изменится и в том случае, когда в качестве области определения возьмем пространство Банаха.

Благодарю М. М. Вайнберга за то, что обратил мое внимание на работы [5] и [6] в реферате, помещенном в Реф. ж., 1965, реф. ОБ0000. В этом реферате М. М. Вайнберг делает мне некоторые замечания, с которыми не могу согласиться. Прежде всего он обращает мое внимание на то, что производную по направлению употребляли уже когда-то раньше. Не знаю, откуда мне это знать, потому что автор не приводит никаких источников. Кроме этого, речь идет о деле настолько тривиальном и очевидном для каждого, кто занимается этой проблематикой, что мне совсем не понятно, почему автор реферата вообще пишет об этом. Что касается последнего его замечания насчет моего, в некотором смысле унижающего, изречения по поводу значения дифференциала Гато в предисловии к [1], признаю, что это утверждение весьма субъективно и что мне было бы трудно доказать его. Несмотря на это, ссылка М. М. Вайнберга на работу [7] это утверждение не отрицает. Легко можно, то есть, обнаружить, что в [7] предполагается компактная дифференцируемость в нашем смысле (см. 1,3,4 в этой работе).

1. УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

1,0. ОРИЕНТАЦИЯ

В этой части работы будем заниматься исследованием некоторых специальных условий локальной и глобальной дифференцируемости, которые позволят нам также выяснить соотношения между употребляемыми нами понятиями и другими определениями дифференцируемости.

1,1. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

1,1,1. (дифференцируемост в пространстве конечной размерности). Пусть D — пространство конечной размерности. Тогда все опорные системы на D совпадают и, следовательно, существует на D только один „естественный" дифференциал. Тогда мы говорим просто о дифференцируемости и о дифференциале.

1,1,2. *Пусть $D = R$ — одномерное пространство и пусть $f \in \mathscr{F}(R, E)$. В таком случае f является дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда f имеет в точке x производную по 1 и по -1, причем* $(\partial^{\cdot}/\partial 1)(x)(f) = - (\partial^{\cdot}/(-1))(x)(f)$.

1,1,3. *Функция $f \in \mathscr{F}(R, E)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, если существует $u \in E$ так, что $s^{-1}(f(x + s) - f(x)) \to u$ для $s \neq 0$, $s \to 0$.*

1,1,4. Обозначим $f^{\cdot}(x) = \lambda^{\cdot}(x)(f)(1)$. Этот вектор из E назовем производной от функции f в точке x. Если f глобально дифференцируема, то через f' обозначим функцию, определенную таким образом: $f'(x) = f^{\cdot}(x)$.

1,1,5. Функции $\varphi \in \mathscr{C}(R, E)$ будем называть кривыми в E. Значит, это непрерывные функции на R со значениями в E.

1,1,6. Какую нибудь систему кривых $\mathscr{K}$ в E мы назовем удобной, если выполнено следующее:

1) $\varphi \in \mathscr{K} \Rightarrow \varphi$ дифференцируема в точке 0,

2) если $x \in E$ и h_n – сходящаяся последовательность, $0 < t_n \leqq 1$, $t_n \searrow 0$, t_n – простая последовательность, то существует $\varphi \in \mathscr{K}$ так, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(t_n) = x + t_n h_n$.

1,1,7. *Система всех кривых в E, которые дифференцируемы в точке* 0, *является удобной системой.*

Доказательство. Псуть h_n является сходящейся, $0 < t_n$, t_n простой, $t_n \searrow 0$. Пусть $\lim h_n = h$. Обозначим через $K(h_n, t_n)$ кривую φ, определенную следующим образом:

$$t_{n+1} < s \leqq t_n \Rightarrow \varphi(s) = \frac{t_n - s}{t_n - t_{n+1}}\, t_{n+1}\, h_{n+1} + \frac{s - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}}\, t_n h_n\,;$$

$$s > t_1 \Rightarrow \varphi(s) = \frac{t_1 - s}{t_1 - t_2}\, t_2 h + \frac{s - t_2}{t_1 - t_2}\, t_1 h_1\,; \quad s \leqq 0 \Rightarrow \varphi(s) = sh\,.$$

Тогда, очевидно, $\varphi(0) = 0$. Далее ясно, что φ во всех точках $s \neq 0$ непрерывна.

Итак, достаточно доказать, что она дифференцируема в точке 0 и что имеет проиводную h. По -1 это очевидно. По 1 это вытекает из следующего обстоятельства: если $t_{n+1} < s \leqq t_n$, то положим

$$\alpha = \frac{t_n - s}{t_n - t_{n+1}}\,, \quad \beta = \frac{s - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}}\,.$$

Имеем $0 \leqq \alpha$, $\beta \leqq 1$, $\alpha + \beta = 1$. Затем $s = \alpha t_{n+1} + \beta t_n$ и $\varphi(s) = \alpha t_{n+1} h_{n+1} + \beta t_n h_n$. Следовательно,

$$\frac{\varphi(s)}{s} - h = \frac{\alpha t_{n+1} h_{n+1} + \beta t_n h_n}{\alpha t_{n+1} + \beta t_n} - h =$$

$$= \frac{\alpha t_{n+1}}{\alpha t_{n+1} + \beta t_n}(h_{n+1} - h_n) + \frac{\beta t_n}{\alpha t_{n+1} + \beta t_n}(h_n - h) \to 0$$

так как $h_{n+1} - h \to 0$, $h_n - h \to 0$,

$$0 \leqq \frac{\alpha t_{n+1}}{\alpha t_{n+1} + \beta t_n} \leqq 1\,, \quad 0 \leqq \frac{\beta t_n}{\alpha t_{n+1} + \beta t_n} \leqq 1\,.$$

1,1,8. *Пусть D — пространство Фреше, E — произвольное линейное топологическое пространство, $\mathscr{K}$ удобная система кривых в D, $f \in \mathscr{F}(D, E)$. В таком случае f является к-дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда существует линейный оператор $L \in \mathscr{L}(D, E)$, для которого имеет место следующее: если $\varphi \in \mathscr{K}$, $\varphi(0) = x$, то $f \circ \varphi$ дифференцируема в точке 0 и $(f \circ \varphi)^{\cdot}(0) = L(\varphi^{\cdot}(0))$.*

Доказательство. 1) если f к-дифференцируема в точке x, то по теореме 3,2,2 из [1] будет и $f \circ \varphi$ дифференцируемой в точке 0, и доказываемое соотношение имеет место.

2) Наоборот. Пусть существует такое L и пусть $h_n \to h$, $t_n > 0$, $t_n \searrow 0$; из удобности системы $\mathscr{K}$ вытекает, что существует $\varphi \in \mathscr{K}$ так, что $\varphi(t_n) = x + t_n h_n$. Тогда

$$\frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} = \frac{f(\varphi(t_n)) - f(\varphi(0))}{t_n} \to (f \circ \varphi)^{\cdot}(0) = L(\varphi^{\cdot}(0)) = L(h)\,,$$

что требовалось доказать.

1,1,9. Если пространство D имеет конечную размерность и в качестве удобной системы кривых возьмем все кривые, дифференцируемые в точке 0, то получим определение Адамара, которое было также обобщено для линейных топологических пространств.

1,1,10. (дифференцируемость по Фреше). *Пусть D — пространство Банаха, $f \in \mathscr{F}(D, E)$. f является локально λ-дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, если существует линейное отображение $L \in \mathscr{L}(D, E)$, для которого выполнено: $h_n \to 0$, $h_n \neq 0 \Rightarrow$*

$$[*] \qquad \frac{f(x + h_n) - f(x) - L(h_n)}{\|h_n\|} \to 0\,.$$

Замечание. Это обыкновенное определение дифференциала Фреше в пространствах Банаха.

Доказательство. α) Пусть f-локально λ-дифференцируема в точке x и пусть не имеет места соотношение [*]. Тогда существует $V \in \mathfrak{B}(E)$ и h_n, $h_n \to 0$, $(f(x + h_n) - f(x) - L(h_n))/\|h_n\| \in V$. Положим $g_n = h_n/\|h_n\|$. Тогда $\|g_n\| \leqq 1$ и справедливо равенство

$$\frac{f(x + \|h_n\|\, g_n) - f(x)}{\|h_n\|} - L(g_n) = \frac{f(x + h_n) - f(x) - L(h_n)}{\|h_n\|} \notin V$$

но это противоречие, потому что g_n ограничена, $\|h_n\| \to 0$ и, следовательно, из λ-дифференцируемости вытекает

$$\frac{f(x + \|h_n\| h_n) - f(x)}{\|h_n\|} - L(g_n) \to 0 .$$

β) Наоборот. Пусть выполнено [*]; нам надо доказать, что f λ-дифференцируема. Пусть h_n ограничена и $t_n > 0$, $t_n h_n \to 0$. Мы можем, конечно, ограничиться последовательностями, для которых $\|h_n\| > 0$ и влседствие этого

$$\frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - L(h_n) = \|h_n\| \frac{f(x + t_n h_n) - f(x) - L(t_n h_n)}{|t_n| \|h_n\|} =$$
$$= \|h_n\| \frac{f(x + t_n h_n) - f(x) - L(t_n h_n)}{\|t_n h_n\|} .$$

Потому что $\|h_n\|$ ограничена, вытекает из [*] сразу же, что все выражение стремится к нулю, что требовалось доказать.

1,2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ ОПЕРАТОРОВ И ФУНКЦИЙ

1,2,1. *Пусть E_1, E_2, E_3 — лин. топ. пр. и δ_1, δ_2 — опорные системы в E_1 и E_2. Писть, далее, $G_n, G \in \mathscr{L}^{\delta_1 \delta_2}(E_1, E_2)$ и $H_n, H \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$. Если $G_n \to G$ в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_2)$ и $H_n \to H$ в $\mathscr{L}_{\delta_2}(E_2, E_3)$ и H_n равностепенно непрерывны в $\mathscr{L}(E_2, E_3)$, то $H_n \circ G_n \to$ $\to H \circ G$ в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_3)$.*

Доказательство. $H_n \circ G_n - H \circ G = H_n \circ (G_n - G) + (H_n - H) \circ G$. Потому что по предположению $G \in \mathscr{L}^{\delta_1, \delta_2}(E_1, E_2)$, очевидно, что второй член сходится к нулю в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_3)$. Для первого члена используем предположение, что H_n равностепенно непрерывны и $G_n \to G$ в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_2)$.

1,2,2. *Пусть E_1, E_2, E_3 — лин. топ. пр., E_2 бочечное и δ_1, δ_2 — опорные системы в E_1, E_2. Пусть, далее, $G_n, G \in \mathscr{L}^{\delta_1, \delta_2}(E_1, E_2)$ и $H_n, H \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$. Если $G_n \to G$ в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_2)$ и $H_n \to H$ в $\mathscr{L}_{\delta_2}(E_2, E_3)$, то $H_n \circ G_n \to H \circ G$ в $\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_3)$.*

Замечание. E_2 может быть, в частности, пр. Фр.

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему, потому что равностепенная непрерывность вытекает из теоремы Банаха-Штейнхауса для боцечново пространства.

В следующих теоремах означает символ D всегда пр., Фр., E лин. топ. пр.

1,2,3. *Пусть $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$. Тогда $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ в том и только в том случае, когда для каждого $h \in D$: $F(.)(h) \in \mathscr{C}(D, E)$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Пусть $x_n \in D$, $x_n \to x_0$. Для каждого $h : F(x_n)(h) \to F(x_0)(h)$ и, следовательно, по теореме Банаха-Штейнхауса $F(x_n)(h) \to F(x_0)(h)$ равномерно на компактных множествах, что, по существу, значит $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$.

1,2,4. *Пусть $f_\alpha \in \mathscr{C}(D, E)$ и пусть $f_\alpha \to f$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$. Тогда $f \in \mathscr{C}(D, E)$.*

Доказательство вытекает просто из непрерывности f_α на компактных множествах.

1,2,5. *Пусть $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ и пусть для каждого $h : F(.)(h) \in \mathscr{C}(D, E)$. Тогда $h_n \to 0 \Rightarrow F(.)(h_n) \to 0$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$. Тогда по предположению $F(x_n)(h) \to$ $\to F(x)(h)$ для каждого $h \in D$. Потому что D — пр. Фр., в силу теоремы Банаха-Штейнхауса справедливо следующее: если g_k — сходящаяся последовательность, то $F(x_n)(g_k) \to F(x_0)(g_k)$ равномерно для всех $k = 1, 2, \dots$ при $n \to \infty$.

Утверждение теоремы мы теперь докажем от противного. Пусть $h_n \to 0$ и $F(.)(h_n) \nrightarrow 0$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$. Тогда существуют $V \in \mathfrak{V}(E)$, $K \in \kappa(D)$, последовательность h'_m, выбранная из h_n, и $x_n \in K$ так, что $F(x_n)(h'_n) \notin V$. Допустим, что h'_n выбрана так, что $x_n \to x_0$ в K. Следуя рассуждениям в начале доказательства, получим, что $F(x_n)(h'_m) \to F(x_0)(h'_m)$ равномерно для всех $m = 1, 2, \dots$ Так как $F(x_0) \in \mathscr{L}(D, E)$, будет $F(x_0)(h'_n) \to 0$, откуда получаем, что для больших $n : F(x_n)(h'_n) \in V$, в чем заключается противоречие.

1,2,6. *Пусть $F_n \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ и пусть*

1) *для каждого $n = 1, 2, \dots, h \in D$ выполнено $F_n(.)(h) \in \mathscr{C}(D, E)$,*

2) *для каждого $h \in D$, $F_n(.)(h) \to F(.)(h)$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$ при $n \to \infty$.*

Тогда $F_n \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ для $n \to \infty$ и $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$.

Доказательство. Определим L_n, $L \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$ следующим образом: $L_n(h)(x) = F_n(x)(h)$, $L(h)(x) = F(x)(h)$. Из предположения 1) и из теоремы 1,2,5 вытекает, что $L_n \in \mathscr{L}(D, \mathscr{F}_\kappa(D, E))$. По предположению 2) $L_n(h) \to L(h)$ для каждого $h \in D$ в пространстве $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$, если $n \to \infty$. По теореме 1,3,11 из [1] будет $L_n(h) \to L(h)$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$ равномерно на компактных множествах в h. Так как $L_n(h) \in \mathscr{C}(D, E)$ и $\mathscr{C}(D, E)$ является замкнутым подпространством в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$, будет и $L(h) \in \mathscr{C}(D, E)$. Значит, из доказанного следует, что для каждого $K \in \kappa(D)$, $H \in \kappa(D)$ и $V \in \mathfrak{V}(E)$ существует n_0 так, что $n \geqq n_0$, $x \in K$, $h \in D \Rightarrow L_n(h)(x) - L(h)(x) \in V$, следовательно, $F_n(x)(h) - F(x)(h) \in V$, откуда сразу же видно, что $F_n \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E))$, и достаточно применить уже только теорему 1,2,4.

1,2,7. *Пусть $F_n \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ и пусть*

1) *для каждого $n = 1, 2, \dots, h \in D$ будет $F_n(.)(h) \in \mathscr{C}(DE)$,*

2) $F_n(.)(h) \to F(.)(h)$ *в* $\mathscr{F}_\sigma(D, E)$ *для каждого* $h \in D$ *при* $n \to \infty$,

3) *если* $x_n \to x_0$, *то для каждого* $h \in D$: $F_n(x_n)(h) - F_n(x_0)(h) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Тогда $F_n \to F$ *в* $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ *для* $n \to \infty$ *и* $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$.

Доказательство. Для того, чтобы мы могли воспользоваться предыдущей теоремой, достаточно для каждого $h \in D$ доказать следующее: $F_n(.)(h) \to F(.)(h)$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$ $(n \to \infty)$. При фиксированном $h \in D$ обозначим: $F_n(x)(h) = g_n(x)$, $F(x)(h) = g(x)$ и докажем, что $g_n \to g$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$. Так как мы знаем, что для каждого $x : g_n(x) \to g(x)$ достаточно доказать, что g_n является равномерно основной на каждом компактном $K \subseteq D$. Сначала мы покажем, что g_n равностепенно непрерывны в каждой точке $x \in D$, т.е. что для каждого $V \in \mathfrak{B}(E)$ существует окрестность U точки x так, что $y \in U \Rightarrow g_n(y) - g_n(x) \in V$ для каждого n.

Допустим противное, что g_n не являются равностепенно непрерывными в некоторой точке x_0. Выберем убывающую последовательность U_n окрестностей точки x_0, образующих базис. Тогда существует $V \in \mathfrak{B}(E)$ так, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существуют $y_k \in D$ и n_k, для которых выполнено следующее: $y_k \in U_k$ и $g_{n_k}(y_k) - g_{n_k}(x_0) \notin V$. При этом n_k можно выбрать таким образом, что $n_k \geqq k$ и $n_{k+1} > n_k$. Последовательность x_n построим таким образом: для $n_k < n \leqq n_{k+1}$ положим $x_n = y_{k+1}$. Тогда $x_n \to x_0$, но $g_n(x_n) - g_n(x_0) \not\to 0$, что противоречит редположению 3). Итак, g_n равностепенно непрерывны в каждой точке $x \in D$.

Теперь выберем компактное множество $K \subseteq D$ и $V \in \mathfrak{B}(E)$. Для каждого $x \in D$ существует открытое множество $U(x) \subseteq D$ так, что $y \in U(x) \Rightarrow g_n(y) - g_n(x) \in \frac{1}{3}V$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ Система $\{U(x) : x \in D\}$ покрывает, очевидно, K; значит, мы можем выбрать конечное число элементов $x_1, \ldots, x_k \in K$ так, чтобы $U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_k) \supseteq K$. Потому что $g_n(x_i)$ является основной последовательностью для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, можем выбрать n_0 так, что $n, m \geqq n_0 \Rightarrow g_n(x_i) - g_m(x_i) \in \frac{1}{3}V$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Для любой точки $x \in K$ подберем i так, чтобы было $x \in U(x_i)$, и затем легко уже докажем, что $g_n(x) - g_m(x) \in V$ для каждого $n, m \geqq n_0$.

1,3. НЕПРЕРЫВНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

1,3,1. Пусть D – пр. Фр., E – лин. топ. пр. и δ – опроная система в D. Функцию $f \in \mathscr{F}(D, E)$ назовем непрерывно глобально δ-дифференцируемой, если она является глобально δ-дифференцируемой и если $\delta^*(f) \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, \mathrm{E}))$.

1,3,2. *Пусть* $f \in \mathscr{F}(D, E)$. f *является непрерывно глобально* δ*-дифференцируемой тогда и только тогда, если она глобально* κ*-дифференцируема и если* $\kappa^*(f) \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$. *Очевидно,* $\kappa^*(f) = \delta^*(f)$.

Доказательство. 1) если f непрерывно δ-дифференцируема, то условие выполнено.

2) пусть условие выполнено и пусть $h_n \in \Pi(\delta)$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$. Тогда по теореме о среднем значении [1] 2, 3, 6

$$\frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - \kappa^*(f)(x)(h_n) \in$$
$$\in \overline{co}\,\{\kappa^*(f)(x + \mu t_n h_n) - \kappa^*(f)(x)(h_n) : 0 \leqq \mu \leqq 1\}$$

что можно сделать произвольно малым, как вытекает из предположения, что $\kappa^*(f) \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$.

1,3,3. *Пусть δ — опорная система в D и пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. В таком случае f является непрерывно δ-дифференцируемой тогда и только тогда, когда существует $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ так, что для любых $x, h \in D$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$ выполнено*

$$\frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} \to F(x)(h).$$

Тогда $\delta^*(f) = F$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть, наоборот, условие выполнено. По теореме о среднем значении [1] 2, 3, 6

$$\frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - F(x)(h) \in \overline{co}\,\{(F(x + \mu t_n h_n) - F(x))(h_n) : 0 \leqq \mu \leqq 1\}.$$

Из непрерывности F при топологии $\mathscr{L}_\delta(D, E)$ легко вытекает, что правая часть является бесконечно малой, и из этого уже получаем доказываемое утверждение.

1,3,4. *Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. f является непрерывно к-дифференцируемой тогда и только тогда, когда существует $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ такое, что*

1) *для каждого $h \in D$: $F(.)(h) \in \mathscr{C}(D, E)$,*

2) *для каждого $x, h \in D$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$, $(f(x + t_n h) - f(x))/t_n \to F(x)(h)$. Тогда $\kappa^*(f) = F$.*

Доказательство. Из теоремы Банаха-Штейнхауса вытекает, что $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$; теперь можем применить предыдущую теорему.

1,3,5. *Пусть $f \in \mathscr{C}(D, E)$, f глобально дифференцируема по h и $\partial^*/(\partial h) f \in \mathscr{C}(D, E)$. Тогда существует также $\partial^*/[\partial(-h)] f$ и совпадает с $-\partial^*/(\partial h) f$. Более общее утверждение: для каждого действительного α существует $\partial^*/[\partial(\alpha h)] f$ и равняется $\alpha\, \partial^*/(\partial h) f$.*

Доказательство. Пусть $t_n > 0$, $t_n \to 0$; тогда по [1] 2, 3, 6

$$\frac{f(x + t_n(-h)) - f(x)}{t_n} = -\frac{f(x + t_n(-h_n) + t_n h_n) - f(x - t_n h_n)}{t_n} \in$$

$$\in -\overline{co}\left\{\frac{\partial}{\partial h} f(x + t_n h_n + \Theta_n t_n h_n) : 0 \leqq \Theta_n \leqq 1\right\} \to -\frac{\partial^*}{\partial h} f(x)\,.$$

1,3,6. *Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$, f глобально дифференцируема по h, g и $\partial^*/(\partial h) f$, $\partial^*/(\partial g) f \in \mathscr{C}(D, E)$. Тогда f глобально дифференцируема по $h + g$ и $\partial^*/[\partial(h + g)] f = \partial^*/(\partial h) f + \partial^*/(\partial g) f$.*

Доказательство. Пусть $t_n > 0$, $t_n \to 0$:

$$\frac{f(x + t_n(h + g)) - f(x)}{t_n} = \frac{f(x + t_n(h + g)) - f(x + t_n h)}{t_n} + \frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n}\,.$$

Второй член, очевидно, стремится к $\partial^*/(\partial h) f(x)$. Значит, остается доказать, что первый член стремится к $\partial^*/(\partial g) f(x)$. Имеем по [1] 2, 3, 6

$$\frac{f(x + t_n h + t_n g) - f(x + t_n h)}{t_n} \in \overline{co}\left\{\frac{\partial^*}{\partial g} f(x + t_n h + \Theta t_n g) : 0 \leqq \Theta \leqq 1\right\} \to \frac{\partial^*}{\partial g} f(x)$$

как следует из непрерывности $\partial^*/(\partial g) f$.

1,3,7. *Пусть $f \in \mathscr{C}(D, E)$. f является непрерывно к-дифференцируемой тогда и только тогда, когда f является для каждого $h \in D$ глобально дифференцируемой по h и когда*

1) $\partial^*/(\partial h) f \in \mathscr{C}(D, E)$,

2) $h_n \to 0 \Rightarrow \partial^*/(\partial h_n) f(x) \to 0$ *для каждого* x.

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Докажем их достаточность. Обозначим $F(x)(h) = \partial^*/(\partial h) f(x)$. Согласно условию 2) для $x \in D$ и $h_n \to 0$ будет $F(x)(h_n) \to 0$. Применяя условие 1) и теоремы 1,3,5 и 1,3,6, получим, что $F(x) \in \mathscr{L}(D, E)$. Справедливо соотношение $(f(x + t_n h) - f(x))/t_n \to F(x)(h)$ для $t_n > 0$, $t_n \to 0$. Далее, $F(x)(h)$ является непрерывной в x. Поэтому, ввиду теоремы 1,3,4, f является к-дифференцируемой и $\kappa^*(f)(x) = F(x)$.

1,4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

1,4,1. (*непрерывная дифференцируемость произведений функций*). *Пусть D — пр. Фр., E_1 — бочечное лин. топ. пр., E_2 — лин. топ. пр., δ — опорная система в D, γ — опорная система в E_1, $f \in \mathscr{F}(D, E_1)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E_1, E_2))$ и пусть*

1) *f непрерывно глобально δ-дифференцируема,*

2) *F непрерывно глобально δ-дифференцируема (относительно топологии $\mathscr{L}_\gamma(E_1, E_2)$),*

3) *$\delta^*(f)(x) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(E_1, E_2)$ для каждого x.*

Тогда $F \times f$ непрерывно глобально δ-диф. и

$$\delta^*(F \times f)(x) = F(x) \circ \delta^*(f)(x) + \delta^*(F \otimes f(x))(x)\,.$$

Доказательство. Из теоремы 3,1,3 из [1] вытекает, что $F \times f$ является глобально δ-диф. и что ее δ-дифференциал можно представить приведенной формулой. Итак, достаточно доказать непрерывность $\delta^*(F \times f)$. У второго члена это очевидно. Значит, дело касается только первого члена, но для этого утверждение имеет место по теореме 1,2,2.

1,4,2. *(Непрерывная дифференцируемость сложных функций.) Пусть D_1, D_2 — — два пр. Фр., E — лин. топ. пр., $f \in \mathscr{F}(D_1, D_2)$ $g \in \mathscr{F}(D_2, E)$, δ_1, δ_2 — опорные системы в D_1, D_2 и пусть*

1) *f глобально неперерывно δ_1-диф.,*

2) *$\delta_1^*(f)(x) \in \mathscr{L}^{\delta_1, \delta_2}(D_1, D_2)$ для каждого x,*

3) *g глобально непрерывно δ_2-диф.*

Тогда $g \circ f$ является непрерывно глобально δ-диф. и

[*] $$\delta_1^*(g \circ f)(x) = [\delta_2^*(g)(f(x))] \circ \delta_1^*(f)(x)\,.$$

Доказательство. Из теоремы 3,2,1 из [1] вытекает δ_1-дифференцируемость функции $g \circ f$ и равенство [*] для каждого x. Значит, достаточно доказать непрерывность $\delta_1^*(g \circ f)$. Но это непосредственно видно из теоремы 1,2,2, потому что f — непрерывная функция.

1,4,3. *Пусть D_1, D_2 — пр. Фр., E — лин. топ. пр., $f \in \mathscr{F}(D_1, D_2)$, $g \in \mathscr{F}(D_2, E)$ и пусть*

1) *f непрерывно глобально κ-диф. [ν-диф., λ-диф.],*

2) *g непрерывно глобально κ-диф. [ν-диф., λ-диф.].*

Тогда $g \circ f$ является непрерывно глобально κ-диф. [ν-диф., λ-диф.] и $\kappa^*(g \circ f)(x) = \kappa^*(g)(f(x)) \circ \kappa^*(f)(x)$ (аналогично для ν, λ).

1,4,4. *(Непрерывная дифференцируемость предела.) Пусть D — пр. Фр., E — — лин. топ. пр. Пусть $f_\alpha \in \mathscr{F}(D, E)$, $f \in \mathscr{F}(D, E)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$ и пусть*

1) *для каждого $x \in D : f_\alpha(x) \to f(x)$,*

2) *f_α непрерывно глобально δ-диф.,*

3) *$\delta^*(f_\alpha) \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{F}_\delta(D, E))$.*

Тогда f является непрерывно глобально δ-диф., $\delta^*(f) = F$.

Доказателство. Следствие теорем 3,3,1 и [1] из 1,2,4.

1,4,5. *Пусть* $f_n, f \in \mathscr{F}(D, E)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$ *и пусть*

1) *для каждого* $x \in D : f_n(x) \to f(x)$,

2) f_n *непрерывно глобально к-диф.*,

3) *для каждого* $h \in D : \kappa^*(f_n)(.)(h) \to F(.)(h)$ *в* $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$.

Тогда f *является непрерывно глобально к-диф. и* $\kappa^*(f) = F$.

Доказательство легко вытекает из теорем 1,2,6 и 1,4,4.

1,4,6. *Пусть* $f_n, f \in \mathscr{F}(D, E)$ *и* $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$ *и пусть*:

1) *для каждого* $x \in D : f_n(x) \to f(x)$,

2) f_n *непрерывно глобально к-диф.*,

3) *для каждого* $x, h \in D : \kappa^*(f_n)(x)(h) \to F(x)(h)$,

4) *если* $x_n \to x_0$, *то для каждого* $h \in D : \kappa^*(f_n)(x_n)(h_n) \to \kappa^*(f_n)(x_0)(h)$.

Тогда f *непрерывно глобально к-диф. и* $\kappa^*(f) = F$.

Доказателство легко вытекает из 1,2,7 и 1, 4, 5.

Замечание. В последней теореме минимализированы условия для верности предельного перехода.

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

2,0. ОРИЕНТАЦИЯ

Будем изучать некоторые нелинейные функции и их дифференцируемость. Эти функции послужат одновременно как иллюстрации некоторых выше введенных понятий.

Все время предполагаем, что задано фиксированное пространство неотрицательной меры (X, Σ, μ) в смысле определения III, 4,3 в [3].

Пространства Лебега, соответствующие пространствам меры (X, Σ, μ) будем обозначать символом $\mathfrak{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ $(p \geqq 1)$, в отличие от $L_p(X, \Sigma, \mu)$ в [3], потому что символом L пользуемся систематически для обозначения линейных операторов. Вместо $\mathfrak{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ будем иногда писать только $\mathfrak{L}_p$.

Предполагается, что читатель ознакомлем с гл. III из [3].

2.1. ПРИМЕР ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА $\mathfrak{L}_1(X, \Sigma, \mu)$, КОТОРАЯ ЛОКАЛЬНО κ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА, НО НЕ λ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА

2,1,1. В этом отделе будет $D = \mathfrak{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ и $E = R$ (действительные числа).

2,1,2. Пусть задана действительная функция $\xi^1(x, u)$ на $X \times R$ обладающая следующими свойствами:

a) $\xi^{(1)}(x, u)$ измерима на $X \times R$,

b) существует функция $a \in \mathfrak{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ и постоянная b так, что для почти каждого $x \in X$ будет для каждого $u \in R$

$$|\xi^{(1)}(x, u)| \leqq a(x) + b|u|$$

c) существует $\omega^1(x)$ так, что для почти всех $x \in X$ при $u \to 0$

$$\frac{\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)}{u} \to \omega^{(1)}(x)$$

d) существует число $c \geqq 0$ такое, что

$$|\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)| \leqq c|u|$$

для каждого $u \in R$ при почти каждом $x \in X$.

2,1,3. Теперь функции $\xi^{(1)}$ поставим в соответствие функцию $f^{(1)} \in \mathscr{F}(D, R)$ следующим образом: $f^{(1)}(u) = \int_X \xi^{(1)}(x, u(x))\, \mu(\mathrm{d}x)$ для каждого $u \in D$.

Это возможно ввиду 2,1,2.

2,1,4. Далее мы обозначим через $l^{(1)}$ линейный функционал из $\mathfrak{L}(D, R)$ определенный следующим образом: $l^{(1)}(h) = \int_X \omega^{(1)}(x)\, h(x)\, \mu(\mathrm{d}x)$ для $h \in D$.

Это также возможно, ввиду 2,1,2c, d.

2,1,5. $f^{(1)}$ *является к-дифференцируемой в точке* 0 *и* $\kappa^{\cdot}(0)(f) = l^{(1)}$.

Доказательство. Пусть $h_n \in D$ — какая-нибудь компактная (т.е. лежащая в компактном множестве) последовательность. Существует выбранная последовательность h_n' и $h \in D$ так, что $h_n' \to h$ в D.

Если к последовательности h_n' применить теоремы III, 3,6 и III, 6,3 из [3], то видно, что из h_n' можем выбрать последовательность h_n'', для которой выполнено следующее:

(I′) $h_n''(x) \to h(x)$ для почти каждого $x \in X$,

(II′) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ и $A \in \Sigma$ с $\mu(A) \leqq \delta$ выполнено: $\int_A |h_n''(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$,

(III′) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon \in \Sigma$ так, что

$\mu(A_\varepsilon) < \infty$ и $\int_{X - A_\varepsilon} |h_n''(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$ для $n = 1, 2, \ldots$

Пусть теперь $t_n > 0$, $t_n \to 0$ и пусть t'_n, t''_n выбраны таким же образом, как h'_n, h''_n. Тогда из 2,1,2c и из (I') вытекает, что

$$\text{(I)} \qquad \frac{\xi^{(1)}(x, t''_n h''_n(x)) - \xi^{(1)}(x, 0)}{t''_n} - \omega^{(1)}(x)\, h''_n(x) \to 0$$

для почти каждого $x \in X$.

Из 2,1,2c, d легко получим, что

$$\frac{\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)}{u} - \omega^{(1)}(x) \leqq 2c$$

для каждого $u \in R(u \neq 0)$ при почти каждом $x \in X$, что можем написать также в следующем виде: $|\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0) - \omega^{(1)}(x)\, u| \leqq 2c|u|$. Если теперь положим $u = t''_n h''_n$ и разделим на t''_n, получим для почти всех $x \in X$:

$$\frac{\xi^{(1)}(x, t''_n h''_n(x)) - \xi^{(1)}(x, 0)}{t''_n} - \omega^{(1)}(x)\, h''_n(x) \leqq 2c|h''_n(x)|\,.$$

Используя это неравенство и свойства (II'), (III') последовательности h''_n, получаем:

(II) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что

$$\int_A \left| \frac{\xi^1(x, t''_n h''_n(x)) - \xi^1(x, 0)}{t''_n} - \omega^{(1)}(x)\, h''_n(x) \right| \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$$

для всех $u = 1, 2, \ldots$ и $A \in \Sigma$, для которых $\mu(A) \leqq \delta$.

(III) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon \in \Sigma$ так, что $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ и

$$\int_{X - A_\varepsilon} \left| \frac{\xi^{(1)}(x, t''_n h''_n(x)) - \xi^{(1)}(x, 0)}{t''_n} - \omega^{(1)}(x)\, h''_n(x) \right| \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Теперь можем применить теорему III, 6, 15 из [3] и получим

$$\int_X \left| \frac{\xi^{(1)}(x, t''_n h''_n(x)) - \xi^{(1)}(x, 0)}{t''_n} - \omega^{(1)}(x)\, h''_n(x) \right| \mu(\mathrm{d}x) \to 0$$

то есть $(t''_n)^{-1}\,(f^{(1)}(t''_n h''_n) - f^{(1)}(0)) - l^{(1)}(h''_n) \to 0$. Отсюда легко видно, что то же самое имеет место для t_n, h_n, чем наше утверждение доказано.

2,1,6. *Пусть*

1) *существует* $A \in \Sigma$ *так, что* $\mu(A) > 0$.

2) *для каждого* $B \in \Sigma$ *с* $\mu(B) > 0$ *существует последовательность* $B_n \in \Sigma$, $B_{n+1} \subseteq B_n$, $B_n \subseteq B$, $\mu(B_n) > 0$ *и* $\bigcap_n B_n = 0$.

Если для почти всех $x \in X$ функция $\xi^{(1)}(x, u)$ является непрерывной от переменного u и $\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)$ является нелинейной по u, то $f^{(1)}$ не будет λ-дифференцируемой в точке 0.

Доказательство. Сначала мы покажем, что из условия нелинейности $\xi^{(1)}$ вытекает существование $h_0 \in \mathfrak{L}_1$ и $C \in \Sigma$ таких, что $\xi^{(1)}(x, h_0(x)) - \xi^{(1)}(x, 0) \neq \omega^{(1)}(x)\, h_0(x)$ для $x \in C$ и $\mu(C) > 0$.

Исходим от противного. Пусть $A \in \Sigma$, $0 < \mu(A) < \infty$. Для произвольного действительного u определим функцию h_u следующим образом: $h_u(x) = u$ для $x \in A$ и $h_u(x) = 0$ в остальных точках. Очевидно, что $h_u \in \mathfrak{L}_1$ и что для каждого $u \in R$, следовательно, будет: $\xi^{(1)}(x, h_u(x)) - \xi^{(1)}(x, 0) = \omega^{(1)}(x)\, h_u(x)$ для почти каждого $x \in X$ (предполагаем, то есть, что это выполнено для каждого $h \in \mathfrak{L}_1$). Обозначим символом N_u множество всех x, для которых приведенное тождество не имеет места. Значит, $\mu(N_u) = 0$. Положим $N = \bigcup\{N_u : u$ рационально$\}$. Тогда $\mu(N) = 0$ и для каждого $x \in A \setminus N$ и рационального u будет $\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0) = \omega^{(1)}(x)\, u$. Пусть теперь M — множество всех $x \in X$, для которых $\xi^{(1)}(x, u)$ непрерывна по u и $\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)$ нелинейна по u. Согласно предположению $\mu(X \setminus M) = 0$ и, следовательно, $\mu((A \setminus N) \cap M) > 0$. Легко видно, что для $x \in (A \setminus N) \cap M$ выходит $\xi^{(1)}(x, u) - \xi^{(1)}(x, 0)$ линейной, что противоречит предыдущему.

Итак, существует множество $Z \in \Sigma$ и число $\alpha > 0$ так, что $\mu(Z) > \alpha$ и $\xi^{(1)}(x, h_0(x)) - \xi^{(1)}(x, 0) - \omega^{(1)}(x)\, h_0(x) \geqq \alpha$ или $\xi^{(1)}(x, h_0(x)) - \xi^{(1)}(x, 0) - \omega^{(1)}(x)\, h_0(x) \leqq -\alpha$ для каждого $x \in Z$.

Далее очевидно, что существует подмножество $Z_0 \subseteq Z$, $Z_0 \in \Sigma$ и число $\beta > 0$ такое, что $\mu(Z_0) > 0$ и $|h_0(x)| \leqq \beta$ для $x \in Z_0$. Значит, по нашему предположению существует последовательность

$$Z_k \in \Sigma,\ Z_k \subseteq Z_0,\ Z_{k+1} \subseteq Z_k,\ \mu(Z_k) > 0 \quad \text{и} \quad \bigcap_k Z_k = \emptyset\,.$$

Теперь определим последовательность функций h_k следующим образом: $h_k(x) = 0$ для $x \in X \setminus Z_k$ и $h_k(x) = h_0(x)$ для $x \in Z_k$. Нетрудно видеть, что $h_k \in \mathfrak{L}_1$ и $h_k \to 0$ в $\mathfrak{L}_1$ для $k \to \infty$.

Из предыдущих рассуждений теперь легко получаем:

$$\left|\int_X (\xi^{(1)}(x, h_k(x)) - \xi^{(1)}(x, 0) - \omega^{(1)}(x)\, h_k(x))\, \mu(\mathrm{d}x)\right| \geqq \alpha\, \mu(Z_k)$$

и

$$\|h_k\| = \int_X |h_k(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \beta\, \mu(Z_k)$$

Из этих двух неравенств вытекает

$$\frac{|f^{(1)}(h_k) - f^{(1)}(0) - l^{(1)}(h_k)|}{\|h_k\|} \geqq \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots$ Так как $\|h_k\| \to 0$, последнее неравенство значит что $f^{(1)}$ не является λ-дифференцируемой в точке 0 (см. **1, 1, 10**).

Замечание. Как видно из предыдущего, существуют некоторые естественные нелинейные операторы, которые еще κ-дифференцируемы, но не λ-дифференцируемы.

Основная идея доказательства 2,1,6 принадлежит М. М. Вайнбергу [2]. Свойствами меры μ, предполагаемыми в 2,1,6, на которых в большой мере основывается доказательство, обладает, например, мера Лебега в евклидовых пространствах.

2,2. ПРИМЕР ФУНКЦИИ, КОТОРАЯ ГЛОБАЛЬНО κ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА, НО НЕ λ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА

2,2,1. то же, что в 2,1,1.

2,2,2. Пусть задана действительная функция $\xi^{(2)}(x, u)$ на $X \times R$, обладающая следующими свойствами:

a), b) как в 2,1,1 a), b);

c) для почти каждого $x : \xi^{(2)}(x, u)$ дифференцируема по u (производную обозначим через $\xi_u^{(2)}(x, u)$).

d) существует число c так, что для почти каждого x и для каждого u будет $|\xi^{(2)}(x, u)| \leqq c$

2,2,3. то же самое, как в 2,1,3.

2,2,4. Обозначим символом $F^{(2)} \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, R))$, определенную следующим образом: $u, h \in H \Rightarrow F^{(2)}(u)(h) = \int_X \xi_u^{(2)}(x, u(x))\, h(x)\, \mu(\mathrm{d}x)$. Значит, для каждого u будет $F^{(2)}(u)$ линейным функционалом, как вытекает из предположения 2,2,2.

2,2,5. *$f^{(2)}$ является глобально к-дифференцируемой и $\kappa^*(f^{(2)})(u) = F^{(2)}(u)$, как вытекает из* 2,1,5.

2,2,6. *Если выполнены условия, аналогичные приведенным в* 2,1,6, *то $f^{(2)}$ не бидет λ-дифференцируемой ни в какой точке, что можно доказать таким же способом, как в* 2,1,6.

2,2,7. *Если прибавить условие*:

e) $\xi^{(2)}(x, u)$ является непрерывной от u для почти каждого $x \in X$, *то $f^{(2)}$ непрерывно к-дифференцируема.*

Доказательство. Согласно 1,3,4 достаточно доказать, что $F^{(2)}(.)(h)$ непрерывна для каждого $h \in D$.

Итак, пусть $u_n \to u$ в $D = \mathfrak{L}_1$. По теоремам III, 3,6 и III, 6,2 в [3] $u_n(x) \to u(x)$ почти всюду. Следовательно,

(I) $\xi_u^{(2)}(x, u_n(x))\, h(x) \to \xi_u^{(2)}(x, u(x))\, h(x)$ почти всюду на X.

Далее, по предположению 2,2,2 $|\xi_u^{(2)}(x, u_n(x))\, h(x)| \leqq c\, h(x)$ и, значит,

(II) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что $\int_A |\xi_u^{(2)}(x, u_n(x))\, h(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \leqq \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $A \in \Sigma$, для которых $\mu(A) \leqq \delta$.

(III) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon \in \Sigma$ так, что $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ и $\int_{X-A_\varepsilon} |\xi_u^{(2)}(x, u_n(x))\, h(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$ для $n = 1, 2, \ldots$

Если теперь применим теорему III, 6,15 из [3], получим сразу же наше утверждение.

2,3. ПРИМЕР ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ, ЛОКАЛЬНО κ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ, НО НЕ λ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ

2,3,1. Пусть $D = E = \mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu)$.

2,3,2. Пусть задана действительная функция $\xi^{(3)}(x, u)$ на $X \times R$ обладающая следующими свойствами:

a) $\xi^{(3)}(x, u)$ измерима на $X \times R$

b) существует неотрицательная функция $a \in \mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu)$ и постоянная b так, что для почти каждого x: $|\xi^{(3)}(x, u)| \leqq a(x) + b|u|$ для каждого u,

c) существует $\omega^{(3)}(x)$ так, что для почти всех x:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\xi^3(x, u) - \xi^3(x, 0)}{u} = \omega^{(3)}(u)$$

d) существует число $c \geqq 0$ так, что $|\xi^3(x, u) - \xi^{(3)}(x, 0)| \leqq c|u|$ для почти каждого x и каждого u.

2,2,3. Теперь функции $\xi^{(3)}$ поставим в соответствие функцию $f^{(3)}$ следующим образом: $u \in D \Rightarrow f^{(3)}(u)\,(x) = \xi^{(3)}(x, u(x))$. Функцию $f^{(3)}$ назовем функцией Немыцкого. Легко видно, что для каждого $u \in D : f^3(u) \in E$, ибо из предположения 2,3,2b вытекает $|f^{(3)}(u)\,(x)| = |\xi^{(3)}(x, u(x))| \leqq a(x) + b|u(x)|$ и, следовательно, $f^{(3)}(u) \in E$.

2,3,4. Теперь обозначим через $L^{(3)}$ линейный оператор из $\mathscr{L}(D, E) : L^{(3)}(h)\,(x) = \omega^{(3)}(x)\, h(x)$. Это возможно, потому что $\omega^{(3)}$ – измеримая, почти ограниченная функция, как следует из условия 2,3,2.

2,3,5. *$f^{(3)}$ к-дифференцируема в точке* 0 *и* $\kappa^{\cdot}(0)\,(f^{(3)}) = L^{(3)}$.

Доказательство основано на тех же идеях, как в 2,1,5, и поэтому мы не будем его здесь выписывать.

2,3,6. *$f^{(3)}$ не является λ-дифференцируемой в точке* 0 *при условиях, приведенных в* 2,1,6.

Доказательство проводится аналогично, как в 2,1,6.

2,4. ПРИМЕР ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ, КОТОРАЯ ЯВЛЯЕТСЯ ГЛОБАЛЬНО κ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ, НО НЕ λ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ

2,4,1. как 2,3,1.

2,4,2. Пусть задана действительная функция $\xi^{(4)}(x, u)$ на $X \times R$ обладающая следующими свойствами:

a), b) как 2,3,2 a), b),

c) для почти каждого x: $\xi^{(4)}(x, u)$ дифференцируема по u (производную обозначим символом $\xi_u^{(4)}(x, u)$),

d) существует число $c \geqq 0$ так, что для почти каждого x и для каждого u будет $|\xi_u^{(4)}(x, u)| \leqq c$,

2,4,3. как 2,3,3.

2,4,4. Теперь определим функцию $F^{(4)} \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ таким образом: $h, u \in D \Rightarrow F^{(4)}(u)(h)(x) = \xi^{(4)}(x, u(x))\, h(x)$. Из предположений вытекает, что $F^{(4)}(u) \in \mathscr{L}(D, E)$.

2,4,5. $f^{(4)}$ *глобально к-дифференцируема, что легко вытекает из теоремы* 2,3,5.

2,4,6. *Однако, функция* $f^{(4)}$ *не является в общем случае λ-дифференцируемой (т.е. дифференцируемой по Фреше), как доказано в* 2,3,6.

2,4,7. *Если прибавим условие*

e) $\xi^{4)}(x, u)$ непрерывна для почти каждого x,

то $f^{(4)}$ *непрерывно к-дифференцируема.*

Доказательство аналогично доказательству 2,2,7.

2,5. ПРИМЕР ЛОКАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

2,5,1. как 2,3,1.

2,5.2. Пусть задана действительная функция $\xi^{(5)}(x, y, u)$ на $X \times X \times R$, обладающая следующими свойствами:

a) $\xi^{(5)}(x, y, u)$ измерима на $X \times X \times R$,

b) существуют неотрицательные функции $k \in \mathfrak{L}_2(X \times X, \Sigma \times \Sigma, \mu \times \mu)$, $a \in \mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu)$ и постоянная b так, что для почти каждого x и почти каждого y будет при любом u:

$$|\xi^{(5)}(x, y, u)| \leqq k(x, y)\,(a(y) + b|u|)$$

c) для почти каждого x и почти каждого y будет $\xi^{(5)}(x, y, u)$ дифференцируемой в точке 0. Эту производную обозначим через $\omega^{(5)}(x, y)$,

d) существует неортицательная функция $c \in \mathfrak{L}_2(X \times X, \Sigma \times \Sigma, \mu \times \mu)$ такая, что для почти каждого x и почти каждого y будет при любом u:

$$\left|\xi^{(5)}(x, y, u) - \xi^{(5)}(x, y, 0)\right| \leqq c(x, y)\,|u|$$

2,5,3. Функции $\xi^{(5)}$ поставим в соответствие функцию $f^{(5)} \in \mathscr{F}(D, E)$ следующим образом: $f^{(5)}(u)\,(x) = \int_X \xi^{(5)}(x, y, u(y))\,\mu(\mathrm{d}y)$ для каждого $u \in D$ и $x \in X$.

Эту функцию назовем функцией Урысона. Покажем, что для каждого $u \in D$: $f^{(5)}(u) \in E$. Из условия 2,5,2b вытекает: $\left|f^{(5)}(u)\,(x)\right| \leqq \left|\int_X \xi^{(5)}(x, y, u(y))\,\mu(\mathrm{d}y)\right| \leqq \leqq \int_X k(x, y)\,(a(y) + b|u(y)|)\,\mu(\mathrm{d}y)$. Из предположения об интегрируемости $k(x, y)^2$ следует, что последний член принадлежит $\mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu)$ и, следовательно, также $f^{(5)}(u) \in \mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu) = E$.

2,5,4. Теперь обозначим через $L^{(5)}$ линейный оператор из $\mathscr{L}(D, E)$ определенный следующим образом: $L^{(5)}(h)\,(x) = \int_X \omega^{(5)}(x, y)\,h(y)\,\mu(\mathrm{d}y)$ для $h \in D$ и $x \in X$.

Это возможно, потому что из предположения 2,5,2d вытекает, что $\omega^{(5)}(x, y) \leqq \leqq c(x, y)$; значит, достаточно применить [4], стр. 277, пример 2.

2,5,5. *$L^{(5)}$ является компактным оператором из $\mathscr{L}(D, E)$*

Доказательство вытекает опят из [4], стр. 277, пример 2.

2,5,6. *$f^{(5)}$ является в точке 0 к-дифференцириемой и* $\kappa^{\cdot}\,(0)\left(f^{(5)}\right) = L^{(5)}$

Доказательство. Пусть $h_n \in D$ — какая-нибудь компактная (т.е. в комапктном множестве лежащая) последовательность. Тогда существует выбранная последовательность h_n' и $h \in D$ так, что $h_n' \to h$ в D. Согласно теоремам III, 3,6 и III, 6,3 в [3] можем выбрать еще последовательность h_n'' так, что $h_n''(x) \to h(x)$ почти всюду.

Пусть, далее, $t_n \to t$, $t_n > 0$ и t_n' и t_n'' выбраны таким же способом, как h_n', h_n''.

Из условия 2,5,2c легко получим, что для почти каждого x и для почти каждого y будет

$$(\mathrm{I}^{\circ}) \qquad \frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n'' h_n''(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n''} - \omega^{(5)}(x, y)\,h_n''(y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Если теперь примении 2,5,2d, получим

$$[*] \qquad \left|\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\,h_n(y)\right| \leqq 2c(x, y)\,\left|h_n(y)\right|,$$

для почти каждого x и почти каждого y. Отсюда при помощи неравенства Шварца получаем

$$\int_A \left| \frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y) \right| \mu(\mathrm{d}y) \leqq$$

$$\leqq 2 \sqrt{\left[\int_A c(x, y)^2\, \mu(\mathrm{d}y)\right]} \cdot \sqrt{\left[\int_A h_n(y)^2\, \mu(\mathrm{d}y)\right]} \leqq$$

$$\leqq 2 \sqrt{\left[\int_A c(x, y)^2\, \mu(\mathrm{d}y)\right]} \cdot \sqrt{\left[\int_X h_n(y)^2\, \mu(\mathrm{d}y)\right]}$$

для почти каждого $x \in X$ и каждого $A \in \Sigma$.

Теперь обратим внимание на ограниченность $\int_X h_n(y)^2\, \mu(\mathrm{d}y)$ и свойство 2,5,2d; легко выведем

(II°) для каждого $\varepsilon > 0$ и для почти каждого $x \in X$ существует $\delta(x)$ так, что

$$\int_A \left| \frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n\, h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y) \right| \mu(\mathrm{d}y) \leqq \varepsilon$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $A \in \Sigma$ с $\mu(A) \leqq \delta(x)$.

(III°) для каждого $\varepsilon > 0$ и для почти каждого $x \in X$ существует $A_{\varepsilon,x} \in \Sigma$ так, что $\mu(A_{\varepsilon,x}) < \infty$ и

$$\int_{X \setminus A_{\varepsilon,x}} \left| \frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n\, h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y) \right| \mu(\mathrm{d}y) \leqq \varepsilon$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots$

Теперь при помощи теорем III, 3,6 и III, 3,15 из [3] получим (см. аналогичный ход рассуждений в 2,1,5)

$$\text{(I)} \qquad \int_X \left(\frac{\xi^{(5)}(x, y, t''_n\, h''_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t''_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h''_n(y) \right) \mu(\mathrm{d}y) \to 0$$

для почти каждого $x \in X$.

Используя неравенство Шварца, получаем из $c \in \mathfrak{L}_2$ (см. 2,5,2d) и $h_n \in \mathfrak{L}_2$

$$\left(\int_X c(x, y)\, |h_n(y)|\, \mu(\mathrm{d}y) \right)^2 \leqq \int_X c(x, y)^2\, \mu(\mathrm{d}y) \int_X h_n(y)^2\, \mu(\mathrm{d}y) = \|h_n\|^2 \int_X c(x, y)^2\, \mu(\mathrm{d}y),$$

Согласно теореме Фувини, функция $c_0(x) = \int_X c(x, y)^2 \mu(\mathrm{d}y)$ входит в $\mathfrak{L}_1$. Тепер получим из [*]

$$\int_A \left[\int_X \left(\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n\, h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y) \right) \mu(\mathrm{d}y) \right]^2 \mu(\mathrm{d}x) \leqq$$

$$\leqq \|h_n\|^2 \int_A c_0(x)\, \mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Применяя это последнее неравенство, получим легко:

(II) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что

$$\int_A \left[\int_X \left(\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y)\right) \mu(\mathrm{d}y)\right]^2 \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon \, .$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \delta$.

(III) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon \in \Sigma$ так, что $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ и

$$\int_{X \setminus A_\varepsilon} \left[\int_X \left(\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y)\right) \mu(\mathrm{d}y)\right]^2 \mu(\mathrm{d}x) \leqq \varepsilon$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Если же теперь применим теорему III, 6,15 из [3], получим

$$\frac{f^{(5)}(t_n'' h_n'') - f^{(5)}(0)}{t_n''} - L^{(5)}(h_n'') \to 0 \, ,$$

лдя $n \to \infty$. Отсюда путем простых рассуждений получим

$$\frac{f^{(5)}(t_n h_n) - f^{(5)}(0)}{t_n} - L^{(5)}(h_n) \to 0 \, ,$$

чем доказательство закончено.

2,5,7. Прибавим еще одно условие:

e) существует действительная неотрицательная функция d на X такая, что для почти каждого x и для почти каждого y будет при любом u

$$|\xi^{(5)}(x, y, u) - \xi^{(5)}(x, y, 0) - \omega^{(5)}(x, y)\, u| \leqq \mathrm{d}(x)\, u^2$$

2,5,8. *Если кроме* 2,5,2 *выполнено и* 2,5,7, *то* $f^{(5)}$ *является в точке* 0 λ*-дифференцируемой и* $\lambda'(0)\,(f^{(5)}) = L^{(5)}$.

Доказательство. Пусть h_n – произвольная ограниченная последовательность в D, $t_n > 0$, $t_n \to 0$. Согласно 2,5,7e получим

$$\left|\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y)\right| \leqq \frac{1}{t_n}\, \mathrm{d}(x)\, t_n^2\, h_n(y)^2 = t_n \mathrm{d}(x)\, h_n(y)^2$$

для почти каждого x и почти каждого y. Отсюда

(I) $$\int_X \left(\frac{\xi^{(5)}(x, y, t_n h_n(y)) - \xi^{(5)}(x, y, 0)}{t_n} - \omega^{(5)}(x, y)\, h_n(y)\right) - \mu(\mathrm{d}y) \to 0$$

для почти каждого x.

(II), (III) докажем аналогично, как в 2,5,6, и также заключение аналогично.

2,6. ПРИМЕР ГЛОБАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛ КОТОРОЙ ОБРАЗОВАН КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

2,6,1. как 2,3,1.

2,6,2. Пусть задана действительная функция $\xi^{(6)}(x, y, u)$ на $X \times X \times R$, обладающая следующими свойствами:

a, b) как 2,5,2 a, b),

c) для почти каждого x и почти каждого y функция $\xi^{(6)}$ дифференцируема по u. Производную обозначим через $\xi_u^{(6)}(x, y, u)$.

d) существует неотрицательная функция $c \in \mathfrak{L}_2(X \times X, \Sigma \times \Sigma, \mu \times \mu)$ такая, что для почти каждого x и почти каждого y будет при любом u: $|\xi_u^{(6)}(x, y, u)| \leqq \leqq c(x, y)$.

2,6,3. $f^{(6)}$ определим таким же образом, как $f^{(5)}$ в 2,5,3.

2,6,4. Теперь введем функцию $F^{(6)} \in \mathscr{F}(D, \mathfrak{L}(D, E))$ посредством такого определения: $F^{(6)}(u)(h)(x) = \int_X \xi_u^6(x, y, u(y))\, h(y)\, \mu(\mathrm{d}y)$ для любых $u, h \in D, x \in X$.

Рассуждения и доказательства в 2,6,4—2,6,8 велись бы совсем аналогично, как в 2,5,4—2,5,8, и поэтому мы их опускаем.

2,6,5. *$F(u)$ является компактным оператором из $\mathscr{L}(D, E)$ для каждого $u \in D$.*

2,6,6. *$f^{(6)}$ глобально к-дифференцируема и $\kappa^*(f^{(6)}) = F^{(6)}$.*

2,6,7. Прибавим условие

e) существует действительная функция d на X такая, что для почти каждого x и почти каждого y будет при любых u, v:

$$|\xi^{(6)}(x, y, u) - \xi^{(6)}(x, y, v) - \xi_u^6(x, y, u)(u - v)| \leqq \mathrm{d}(x)(u - v)^2 .$$

2,6,8. *Если выполнено* 2,6,2 *и* 2,6,7, *то $f^{(6)}$ глобально λ-дифференцируема и $\lambda^*(f^{(6)}) = F^{(6)}$.*

2,7. ПРИМЕР ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ О ПОДСТАНОВКЕ (ФУНКЦИЯ НЕМЫЦКОГО-УРЫСОНА)

2,7,1. как 2,3,1

2,7,2. Пусть заданы дведействительные функции $\xi^{(3)}(x, u)$ и $\xi^{(5)}(x, y, u)$, обладающие свойствами 2,3,2 и 2,5,2 соотв.

2,7,3. Теперь определим функцию $f^{(7)}$ таким образом:

$$f^{(7)}(u)(x) = \xi^{(3)}(x, \int_X \xi^{(5)}(x, y, u(y))\, \mu(\mathrm{d}y))\ ;$$

назовем ее функцией Немыцкого-Урысона.

Легко видно, что $f^{(7)} = f^{(3)} \circ f^{(5)}$.

2,7,4. *Функция $f^{(7)}$ является к-дифференцируемой в точке 0 и $\kappa^{\cdot}(0)(f^{(7)}) = L^{(3)} \circ L^{(5)}$ (определение $L^{(3)}$ и $L^{(5)}$ см. в 2,3,4, соотв. 2,5,4).*

Доказательство вытекает из 2,3,5 и 2,5,6, если использовать еще 3,2,2 в [1].

2,7,5. *Если прибавим еще условие 2,5,7, налагаемое на $\xi^{(5)}$, то $f^{(7)}$ будет λ-дифферен цируемой в точке 0 и $\lambda^{\cdot}(0)(f^{(7)}) = L^{(3)} \circ L^{(5)}$.*

Доказательство вытекает из 2,3,5, 2,5,8 и 2,5,5 с использвоанием 3,2,1 в [1].

2,8. ПРИМЕР ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛЕ (ФУНКЦИЯ ЛИХТЕНШТЕЙНА-НЕМЫЦКОГО)

2,8,1. как 2,3,1.

2,8,2. Пусть для $x \in X$, $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$ задана функция $\xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)$ измереима как функция переменных $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

2) $\int_X \ldots \int_X \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n) < \infty$.

3) $\xi_n^{(8)}$ симметричная от $y_1, \ldots, y_n$ функция, т.е. она не меняняется в результате какой-либо перестановки переменных $y_1, \ldots, y_n$. Функцию $\xi_n^{(8)}$ назовем ядром n-ой степени.

2,8,3. Каждому ядру n-ой степени поставим в соответствие функцию n-ого порядка на D в E:

$$q_n(h)(x) = \int_X \ldots \int_X \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, h(y_1) \ldots h(y_n)\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n)\ .$$

Легко можно обнаружить, что

$$\|q_n(h)\| \leqq \|h\|^n \sqrt{\int_X \ldots \int_X \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, \mu(\mathrm{d}x),\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n)}\ .$$

Множитель с радикалом обозначим символом $\|\xi_n^{(8)}\|$.

2,8,4. *Функция q_n λ-дифференцируема и $\lambda^*(q_n)(u)(h) = n \int_X \ldots \int_X \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, u(y_1) \ldots u(y_{n-1})\, h(y_n)\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n)$ и $\|\lambda^*(q_n)(u)\| \leqq n \|\xi_n^{(8)}\|\, \|u\|^{n-1}$ в чем можно легко убедиться непосредственно по определению дифференциала.*

2,8,5. Пусть дана последовательность ядер $\xi_n^{(8)}$, где $\xi_n^{(8)}$ является ядром n-ой степени по определению 2,8,2, и последовательность функций $\xi_n^{(4)}$, обладающих свойствами 2,4,2 и 2,4,7, и пусть

a) существует число $d \geqq 0$ так, что $\|\xi_n^{(8)}\| \leqq d^n$,

b) существует функция $a \in \mathfrak{L}_2(X, \Sigma, \mu)$ и постоянная $b \geqq 0$ так, что $|\xi_n^{(4)}(x, u)| \leqq$ $\leqq a(x) + b|u|$,

c) существует число $c \geqq 0$ такое, что $|(\partial/\partial u)\, \xi_n^{(4)}(x, u)| \leqq c$.

2,8,6. Обозначим через q_n функцию, принадлежащую к $\xi_n^{(8)}$ по определению 2,8,3, и через f_n функцию к $\xi_n^{(4)}$ по опр. 2,4,3.

2,8,7. Теперь положим для $u \in D$:

$$g(u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, \xi_n^{(4)}(y_1, u(y_1)) \ldots \xi_n^{(4)}(y_n, u(y_n))\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n).$$

Легко можно показать, что этот ряд сходится в E для каждого $u \in D$. Функцию g назовем функцией Лихтенштейна-Немыцкого. Далее положим для u, $h \in D$:

$$G(u)(h)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_X \ldots \int_X \xi_n^{(8)}(x, y_1, \ldots, y_n)\, \xi_n^{(4)}(y_1, u(y_1)) \ldots$$

$$\ldots \xi_n^{(4)}(y_{n-1}, u(y_{n-1})) \left(\frac{\partial}{\partial u}\, \xi_n^{(4)}\right)(y_n, u(y_n))\, h(y_n)\, \mu(\mathrm{d}y_1) \ldots \mu(\mathrm{d}y_n).$$

Тогда ряд для G сходится, очевидно, равномерно для u, h из ограниченных множеств. Отдельные члены ряда для g, очевидно, λ-дифференцируемы, причем λ-дифференциалы являются членами ряда для G. Применяя теорему о пределе 3,3,1 *из* [1], *легко получим, что g κ-дифференцируема и $\kappa^*(g) = G$.*

2,8,8. *Если для каждого n будет $\xi_n^{(4)}(x, u) = u$, то из функции Лихтенштейна-Немыцкого получим чистую функцию Лихтенштейна, которая глобально λ-дифференцируема, что можно доказать таким же способом, как κ-дифференцируемость в* 2,8,7.

Литература

[1] *М. Сова:* Общая теория дифференцируемости в линейных топологических пространствах. Чех. мат. ж. *14* (*89*), (1964), 485—508.

[2] *М. М. Вайнберг:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Москва 1956.

[3] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators. New York 1950.

[4] *K. Yosida:* Functional Analysis. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965.

[5] *J. Sebastião e Silva:* Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes. Atti dei Lincei *20* (1956), *p*. 743–750.
[6] *G. Marinescu:* Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes Bull. math. Roumaine, *1* (*49*) (1957), p. 77–86.
[7] *М. М. Вайнберг, Я. Л. Энгельсон:* Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах. Мат. сб. *45* (*87*), (1958), 417—421.

Адресс автора: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).

Summary

CONDITIONS OF DIFFERENTIABILITY IN LINEAR TOPOLOGICAL SPACES

MIROSLAV SOVA, Praha

This paper is a continuation of [1]. In the first part, some special theorems on differentiability are proved and some types of differentials, introduced in [1], are compared with differentials of Hadamard and Fréchet. In the second part, the differentiability of some special functions, defined by different analytical means, is studied. Especially, examples of functions are given which are compactly but not Fréchet differentiable.