Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Kufner

Lösungen des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen in Räumen mit Belegungsfunktionen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 4, 621–633

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100699

Чехословацкий математический журнал т. 15 (90) 1965, Прага

LÖSUNGEN DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS FÜR ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN RÄUMEN MIT BELEGUNGSFUNKTIONEN

ALOIS KUFNER, Praha

(Eingegangen am 1. März 1965)

Mit Hilfe einiger Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit spezieller Belegungsfunktion wird hier die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung des Dirichletschen Problems in diesen Räumen bewiesen.

EINLEITUNG

Die Theorie der Sobolevschen Räume $W_p^{(k)}(\Omega)$ hängt eng mit den Lösungen partieller Differentialgleichungen zusammen, und ganz ähnlich kann man dies auch von den Sobolevschen Räumen mit Belegungsfunktionen $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ sagen. Die Anregung zum Studium der Räume mit Gewichtsfunktionen gaben Probleme, die bei der Lösung ausgearteter oder singulärer elliptischer Differentialgleichungen entstanden; die Gewichtsfunktion ist dabei durch die Ausartung bzw. Singularität der Gleichung bestimmt. In dieser Richtung erschien eine Reihe von Arbeiten – es sei hier z.B. der Artikel von I. A. KIPRIJANOV [1] erwähnt.

Der umgekehrte Zutritt, wann es sich um eine normale – d.h. nichtausgeartete und nichtsinguläre – elliptische Differentialgleichung handelt und wann man die Lösungen in Räumen mit einer vornherein gewählten Belegungsfunktion sucht, ist seltener; man findet ihn bei M. I. VIŠIK [7], J. NEČAS [5] und H. MOREL [4].

Die Räume $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ erweitern im gewissen Sinn die Menge der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen: im Fall $\alpha > 0$ können Lösungen des Dirichletschen Problems mit speziellen Randbedingungen existieren, die dem Sobolevschen Raum $W_2^{(k)}(\Omega)$ n i c h t angehören, aber die schon in $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ liegen.

Diese Arbeit knüpft sich an die erwähnte Arbeit von J. Nečas an, in der als Gewichtsfunktion die Potenz der Entfernung von der Grenze des Gebietes Ω benützt wird. Hier wollen wir zeigen, dass man die entsprechenden Ergebnisse aus [5] – d.h. die Aussagen über die Existenz und Unizität der schwachen Lösungen des Dirichletschen Problems in den Räumen $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ – auch auf den Fall übertragen kann, wenn als Gewichtsfunktion die Potenz der Entfernung von einem festen Punkte auf der Grenze des Gebietes Ω auftritt. Dabei werden wir einige Eigenschaften der Räume $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ mit dieser Belegungsfunktion benützen, die in der Arbeit des Verfassers [3] abgeleitet wurden. Da die hier angewandten Methoden den Betrachtungen in [5] sehr ähnlich sind, werden wir die Beweise meistens nur kurz andeuten.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind (ohne Beweise) im zweiten Teil der vorläufigen Mitteilung [2] zusammengefasst.

1. BEZEICHNUNGEN, DEFINITIONEN UND HILFSSÄTZE

Es sei $X = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$ ein beliebiger Punkt des N-dimensionalen Euklidschen Raumes E_N, $N \geqq 2$. Weiter sei Ω ein beschränktes Gebiet in E_N mit der Grenze S, P ein fester Punkt auf S und

$$r(X) = |X - P| \tag{1.1}$$

die Entfernung des Punktes X von P.

Wir werden sagen, dass ein beschränktes Gebiet Ω vom Typ $\mathfrak{K}^{(0)}$ ist (und schreiben dann $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$), wenn man die Grenze S lokal mit Hilfe stetiger Funktionen beschreiben kann und wenn das Gebiet Ω im Punkte $P \in S$ die Kegeleigenschaft von aussen hat (eine präzisere Definition siehe in [3]).

Es sei $i = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten. Wir bezeichnen mit $|i|$ die Summe der Komponenten i_j und mit D^i die partielle Ableitung

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_N^{i_N}} . \tag{1.2}$$

Weiter sei α eine reelle Zahl und k eine ganze nichtnegative Zahl. Dann bezeichnen wir mit $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ den Raum aller komplexwertigen, fast überall auf Ω definierten Funktionen u, deren partielle Ableitungen $D^i u$ der Ordnung $|i| \leqq k$ (im Sinne der Distributionen) mit der Gewichtsfunktion $r^\alpha(X)$ quadratisch integrierbar sind:

$$\int_\Omega |D^i u|^2 \, r^\alpha(X) \, \mathrm{d}X < \infty \quad (0 \leqq |i| \leqq k) .$$

Für $\alpha = 0$ schreiben wir $W^{(k)}_2(\Omega)$, für $k = 0$ schreiben wir $L_{2,\alpha}(\Omega)$.

Die Räume $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{k,\alpha} = \sum_{|i|=0}^{k} \int_\Omega D^i u D^i \bar{v} \, r^\alpha(X) \, \mathrm{d}X . \tag{1.3}$$

Mit $\mathring{W}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ bezeichnen wir die Abschliessung der Menge $\mathscr{D}(\Omega)$ aller in E_N unendlich differenzierbaren Funktionen, die einen kompakten Träger in Ω haben, in der Norm

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{k,\alpha}}\,.$$

Wir bezeichnen weiter

$$\|u\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \left[\sum_{|i|=k} \int_\Omega |D^i u|^2\, r^\alpha(X)\, \mathrm{d}X\right]^{1/2}. \tag{1.4}$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 1.1. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, α eine beliebige reelle Zahl, k und s nichtnegative ganze Zahlen, $s \leqq k$. Dann ist*

$$\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset \mathring{W}_{2,\alpha-2s}^{(k-s)}(\Omega) \tag{1.5}$$

und es existiert eine solche positive Zahl c, dass für alle Funktionen $u \in \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{\mathring{W}_{2,\alpha-2s}^{(k-s)}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \tag{1.6}$$

gilt. Der Ausdruck (1.4) *ist eine Norm in $\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$, die mit der Norm $\|u\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)}$ äquivalent ist.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes 3.3 in [3] für $p = 2$.

Fundamentale Bedeutung für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen elliptischer Differentialgleichungen hat der Satz von Lax und Milgram (vgl. z.B. L. Nirenberg [6]). Wir wollen hier eine Verallgemeinerung dieses Satzes anführen, die von J. Nečas (siehe [5]) bewiesen wurde:

Satz 1.2. *Es seien H_1 und H_2 zwei Hilbert-Räume und es sei $\mathsf{B}(v, u)$ eine sesquilineare Form, die auf $H_1 \times H_2$ definiert ist und folgende Bedingungen erfüllt:*

$$|\mathsf{B}(v, u)| \leqq c_1\|v\|_{H_1}\,\|u\|_{H_2}\,; \tag{1.7}$$

$$\sup_{\substack{v\in H_1\\ \|v\|_{H_1}\leqq 1}} |\mathsf{B}(v, u)| \geqq c_2\|u\|_{H_2}\,; \tag{1.8}$$

$$\sup_{\substack{u\in H_2\\ \|u\|_{H_2}\leqq 1}} |\mathsf{B}(v, u)| \geqq c_3\|v\|_{H_1} \tag{1.9}$$

(c_1, c_2 und c_3 sind positive Konstanten). Es sei weiter F ein Funktional auf dem Raume H_1.

Dann existiert genau ein Element $u \in H_2$ und eine solche positive Konstante c, dass für alle $v \in H_1$

$$\mathsf{B}(v, u) = \mathsf{F}(v)$$

ist und dass die Ungleichung

$$\|u\|_{H_2} \leqq c\|F\|_{H_1'}$$

gilt.

Die Bedingung (1.7) bedeutet die Stetigkeit der Form $B(v, u)$; die Bedingungen (1.8) und (1.9) nennen wir die H_2- bzw. H_1-Elliptizität der Form $B(v, u)$.

Wenn wir das Element $u \in H_2$ fixieren, ist der Ausdruck $B(v, u)$ ein lineares Funktional auf H_1 und nach dem Satz von Riesz existiert also genau ein Element $Z(u) \in H_1$ so, dass $B(v, u) = (v, Z(u))_{H_1}$ ist (auf der rechten Seite steht das Skalarprodukt in H_1). Damit ist eine Abbildung Z des Raumes H_2 in H_1 gegeben. Es gilt nun (siehe [5])

Satz 1.3. *Die Behauptungen des Satzes* 1.2 *gelten auch dann, wenn wir die Bedingung (1.9) durch die folgende Bedingung ersetzen: Die Menge $Z(H_2)$ ist dicht in H_1.*

Wir werden im weiteren noch folgende einfache Eigenschaft der Belegungsfunktion $r(X)$ anwenden:

Hilfssatz 1. *Es sei $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten, $|q| \geqq 1$, und β eine reelle Zahl. Dann existiert eine solche positive Konstante $c_{q,\beta}$, dass die Ungleichung*

$$|D^q r^\beta| \leqq |\beta| \, c_{q,\beta} r^{\beta - |q|} \tag{1.10}$$

gilt. Wenn die Menge der Zahlen β beschränkt ist, $|\beta| \leqq M$, ist auch $c_{q,\beta} \leqq \leqq c_q (c_q = c_q(M))$ und es gilt

$$|D^q r^\beta| \leqq |\beta| \, c_q r^{\beta - |q|} . \tag{1.11}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

2. EINIGE EIGENSCHAFTEN DES DIFFERENTIALOPERATORS

Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, k eine natürliche Zahl, i und j Vektoren mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten, $0 \leqq |i| \leqq k$, $0 \leqq |j| \leqq k$. Weiter seien a_{ij} beschränkte messbare, fast überall auf Ω definierte Funktionen.

Wir werden den Differentialoperator

$$\boldsymbol{A} = (-1)^{|i|} D^i(a_{ij} D^j) \tag{2.1}$$

untersuchen; es wird hier und auch im weiteren die übliche Summationskonvention benützt – in (2.1) wird also über alle Vektoren i, j summiert, für die $0 \leqq |i| \leqq k$

und $0 \leqq |j| \leqq k$ ist. $\boldsymbol{A}$ ist also ein Differentialoperator der Ordnung $2k$. Dem Operator $\boldsymbol{A}$ ist die sesquilineare Form

$$B(v, u) = \int_\Omega \bar{a}_{ij}(X)\, D^i v D^j \bar{u}\, \mathrm{d}X \tag{2.2}$$

zugeordnet.

Wir werden voraussetzen, dass der Operator $\boldsymbol{A}$ elliptisch ist, d.h. dass für alle Funktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ die Ungleichung

$$|B(\varphi, \varphi)| \geqq c \|\varphi\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} \tag{2.3}$$

gilt; c ist die Konstante der Elliptizität des Operatoren $\boldsymbol{A}$.

Es sei α eine reelle Zahl, $\varphi(X)$ eine Funktion aus $\mathscr{D}(\Omega)$ und $r(X)$ die Funktion aus (1.1). Wir setzen $\psi = \varphi r^\alpha$; dann ist

$$B(\psi, \varphi) = B(\varphi r^\alpha, \varphi) = B(\varphi r^{\alpha/2}, \varphi r^{\alpha/2}) + I(\alpha) \tag{2.4}$$

mit

$$I(\alpha) = \int_\Omega \bar{a}_{ij}(X) \left[D^i(\varphi r^\alpha)\, D^j \bar{\varphi} - D^i(\varphi r^{\alpha/2})\, D^j(\bar{\varphi} r^{\alpha/2})\right] \mathrm{d}X\ ; \tag{2.5}$$

in (2.5) ist sinnvoll $|i| + |j| \geqq 1$ vorauszusetzen, denn für $|i| = |j| = 0$ verschwindet die Funktion im Integral identisch. Da nun

$$D^i(\varphi r^\beta) = D^i(\varphi) \,.\, r^\beta + c_{mn} D^m(\varphi)\, D^n(r^\beta) \tag{2.6}$$

ist (es wird über alle Vektoren m, n summiert, für die $m + n = i$ und $|n| \geqq 1$ ist; c_{mn} sind gewisse bekannte Konstanten), ist das Integral $I(\alpha)$ eine Summe von Ausdrücken des Typus

$$J_1 = b_{ijmn} \int_\Omega \bar{a}_{ij}(X)\, D^m(\varphi)\, D^n(r^\alpha)\, D^j(\bar{\varphi})\, \mathrm{d}X \tag{2.7}$$

mit $m + n = i$, $|n| \geqq 1$, und des Typus

$$J_2 = d_{stmn} \int_\Omega \bar{a}_{ij}(X)\, D^m(\varphi)\, D^n(r^{\alpha/2})\, D^s(\bar{\varphi})\, D^t(r^{\alpha/2})\, \mathrm{d}X \tag{2.8}$$

mit $m + n = i$, $s + t = j$, $|n| + |t| \geqq 1$ (m, n, s, t, i, j sind hier feste Vektoren, b_{ijmn} und d_{stmn} bekannte Konstanten).

Es sei nun M eine beliebige (genügend grosse) positive Zahl; wir setzen voraus, dass $|\alpha| \leqq M$ ist, und wollen jetzt die Ausdrücke J_1 und J_2 abschätzen. Da diese Ausdrücke Ableitungen der Funktion r^α oder $r^{\alpha/2}$ enthalten und $|\alpha| \leqq M$ ist, werden wir die Ungleichung (1.11) anwenden und haben dann mit $M_{ij} = \sup_{X \in \Omega} \operatorname{ess} |a_{ij}(X)|$

$$|J_1| \leqq |b_{ijmn}| \, M_{ij}|\alpha| \, . \, c_n \int_\Omega |D^m \varphi| \, r^{\alpha - |n|} \, |D^j \varphi| \, \mathrm{d}X =$$

$$= B_{ijmn}|\alpha| \int_\Omega |D^m \varphi| \, r^{\alpha/2 - |n|} \, |D^j \varphi| \, r^{\alpha/2} \, \mathrm{d}X \, .$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung bekommen wir sogleich

$$|J_1| \leqq |\alpha| \, B_{ijmn} \|D^m \varphi\|_{L_{2,\alpha-2|n|}} \cdot \|D^j \varphi\|_{L_{2,\alpha}} \, . \tag{2.9}$$

Da $|j| \leqq k$ ist, gilt $\|D^j \varphi\|_{L_{2,\alpha}} \leqq \|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}}$. Aus der Ungleichung (1.6) des Satzes 1.1 folgt für $|q| \leqq k$ $\|D^{q-n} \varphi\|_{L_{2,\alpha-2|n|}} \leqq c_1 \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(|q|)}} \leqq c_1 \|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}}$. Da $m + n = i$ und $|i| \leqq k$, $|n| \geqq 1$ ist, gilt also

$$\|D^m \varphi\|_{L_{2,\alpha-2|n|}} = \|D^{i-n} \varphi\|_{L_{2,\alpha-2|n|}} \leqq c_1 \|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}}$$

und aus (2.9) folgt

$$|J_1| \leqq |\alpha| \, B^*_{ijmn} \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}} \, . \tag{2.10}$$

Ganz ähnlich schätzen wir auch den Ausdruck J_2 im Fall $|n| + |t| = 1$ ab und bekommen dann

$$|J_2| \leqq |\alpha| \, D^*_{stmn} \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}} \, ; \tag{2.11}$$

im Fall $|n| \geqq 1$, $|t| \geqq 1$ enthält der Ausdruck J_2 zweimal die Ableitung der Funktion $r^{\alpha/2}$, wir müssen also auch zweimal die Ungleichung (1.11) anwenden und haben endlich

$$|J_2| \leqq \alpha^2 D^*_{stmn} \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}} \, . \tag{2.12}$$

Da $I(\alpha)$ eine Summe der Ausdrücke J_1 und J_2 ist, folgt aus (2.10), (2.11) und (2.12) die Abschätzung

$$|I(\alpha)| \leqq (c_2|\alpha| + c_3 \alpha^2) \, \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}} \, . \tag{2.13}$$

Der Operator $\boldsymbol{A}$ ist elliptisch und (2.3) ergibt also

$$|B(\varphi r^{\alpha/2}, \varphi r^{\alpha/2})| \geqq c \|\varphi r^{\alpha/2}\|^2_{W_2^{(k)}} = c \sum_{|i|=0}^{k} \int_\Omega |D^i(\varphi r^{\alpha/2})|^2 \, \mathrm{d}X \, . \tag{2.14}$$

Nach Anwendung der Formel (2.6) ist dann $(s + t = m + n = i)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |D^i(\varphi r^{\alpha/2})|^2 \, \mathrm{d}X \geqq & \int_\Omega |D^i \varphi|^2 \, r^\alpha \, \mathrm{d}X - \\ & -2|c_{st}| \int_\Omega |D^i \varphi| \, r^{\alpha/2} \, |D^s \varphi| \, |D^t r^{\alpha/2}| \, \mathrm{d}X - \\ & - |c_{st} c_{mn}| \int_\Omega |D^s \varphi| \, |D^t r^{\alpha/2}| \, |D^m \varphi| \, |D^n r^{\alpha/2}| \, \mathrm{d}X \, ; \end{aligned} \tag{2.15}$$

die beiden letzten Integrale können wir ähnlich wie die Ausdrücke J_1 und J_2 durch $(c_4|\alpha| + c_5\alpha^2)\ \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}(|i|)}$ abschätzen und aus (2.15) folgt dann

$$\int_\Omega |D^i(\varphi r^{\alpha/2})|^2 \,\mathrm{d}X \geqq (1 - c_4|\alpha| - c_5\alpha^2)\ \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}(|i|)} \,.$$

Diese Ungleichung gibt zusammen mit (2.14) das Resultat

$$|B(\varphi r^{\alpha/2}, \varphi r^{\alpha/2})| \geqq (c - cc_6|\alpha| - cc_7\alpha^2)\ \|\varphi\|^2_{W_{2,\alpha}(k)} \,. \tag{2.16}$$

Aus (2.4), (2.13), und (2.16) und aus der offensichtlichen Ungleichung $\|\varphi\|_{W_{2,\alpha}(k)} \geqq \geqq \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}(k)}$ folgt

$$|B(\psi, \varphi)| \geqq |B(\varphi r^{\alpha/2}, \varphi r^{\alpha/2})| - |I(\alpha)| \geqq (c - c_8|\alpha| - c_9\alpha^2)\ \|\varphi\|^2_{\mathring{W}_{2,\alpha}(k)} \,.$$

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass

$$\|\psi\|^2_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)} \leqq \|\psi\|^2_{W_{2,-\alpha}(k)} = \|\varphi r^\alpha\|^2_{W_{2,-\alpha}(k)} \leqq (1 + c_{10}|\alpha| + c_{11}\alpha^2)\ \|\varphi\|^2_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)}$$

ist. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\psi = \varphi r^\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$ und $|\alpha| \leqq M$ ist also

$$\frac{|B(\psi, \varphi)|}{\|\psi\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)}} \geqq \frac{c - c_8|\alpha| - c_9\alpha^2}{\sqrt{(1 + c_{10}|\alpha| + c_{11}\alpha^2)}}\ \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}(k)} \tag{2.17}$$

und es gilt der folgende Satz.

Satz 2.1. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $\boldsymbol{A}$ ein elliptischer Operator der Ordnung $2k$ und $B(v, u)$ die entsprechende sesquilineare Form. Dann existiert ein offenes Intervall I, welches den Punkt Null enthält, und eine positive, auf I definierte Funktion $c(\alpha)$; man kann weiter jeder Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ eine Funktion $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ zuordnen, für die $\|\chi\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)(\Omega)} = 1$ ist, und es gilt*

$$|B(\chi, \varphi)| \geqq c(\alpha)\ \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}(k)(\Omega)} \tag{2.18}$$

für alle $\alpha \in I$.

Beweis. Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$; wir setzen $\psi = \varphi r^\alpha$ und $\chi = \psi / \|\psi\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)}$. Offensichtlich ist auch $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Aus (2.17) folgt

$$|B(\chi, \varphi)| = \frac{1}{\|\psi\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}(k)}} |B(\psi, \varphi| \geqq c(\alpha)\ \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}(k)}$$

mit

$$c(\alpha) = \frac{c - c_8|\alpha| - c_9\alpha^2}{\sqrt{(1 + c_{10}|\alpha| + c_{11}\alpha^2)}} \,.$$

Die Funktion $f(\alpha) = c - c_8|\alpha| - c_9\alpha^2$ hat zwei symmetrische Nullpunkte α^* und

$-\alpha^*$ $(\alpha^* > 0)$; weiter ist $|\alpha| \leqq M$. Wenn wir also $\alpha_0 = \min(\alpha^*, M)$ und $I = (-\alpha_0, \alpha_0)$ wählen, ist $c(\alpha) > 0$ für $\alpha \in I$ und der Satz ist bewiesen.

Satz 2.2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1 existiert ein offenes Intervall $\tilde{I}$, welches den Punkt Null enthält, und eine positive, auf $\tilde{I}$ definierte Funktion $\tilde{c}(\alpha)$; man kann weiter jeder Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ eine Funktion $\tilde{\chi} \in \mathscr{D}(\Omega)$ zuordnen, für die $\|\tilde{\chi}\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = 1$ ist, und es gilt*

$$|B(\varphi, \tilde{\chi})| \geqq \tilde{c}(\alpha) \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \tag{2.19}$$

für alle $\alpha \in \tilde{I}$.

Der Beweis dieses Satzes ist eine Analogie des Beweises des Satzes 2.1: wir müssten für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ $\tilde{\psi} = \varphi r^{-\alpha}$ wählen und dann die Form $B(\varphi, \tilde{\psi})$ abschätzen.

Wenn die Form $B(v, u)$ die Bedingung $B(v, u) = \overline{B(u, v)}$ erfüllt, ist – wie man leicht zeigen kann – $I = \tilde{I}$.

Da die Funktionen a_{ij} durch die Konstanten M_{ij} beschränkt sind, bekommen wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und mit Hilfe des Satzes 1.1:

$$\begin{aligned} |B(v, u)| &\leqq M_{ij} \int_\Omega |D^i v| \, r^{-\alpha/2}(X) \, |D^j u| \, r^{\alpha/2}(X) \, dX \leqq \\ &\leqq c_1 \|v\|_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \cdot \|u\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq \\ &\leqq c_2 \|v\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \cdot \|u\|_{\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$H_1 = \mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega), \quad H_2 = \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega) \tag{2.21}$$

einführen, ist laut (2.20) die Form $B(v, u)$ stetig auf $H_1 \times H_2$, d.h. es ist die Bedingung (1.7) des Satzes 1.2 erfüllt, und zwar für allen reellen Werte des Parameters α. Für gewisse spezielle Werte α sind auch die beiden weiteren Bedingungen des Satzes 1.2 erfüllt:

Satz 2.3. *Es sei $B(v, u)$ die Form (2.2), I und $\tilde{I}$ die Intervalle aus den Sätzen 2.1 und 2.2. Dann ist die Form $B(v, u)$ $\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$-elliptisch für $\alpha \in I$ und $\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$-elliptisch für $\alpha \in \tilde{I}$.*

Beweis. Wir werden die Bezeichnungen (2.21) benützen. Nach dem Satz 2.1 existiert zu jeder Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ eine in $H_1 = \mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$ normierte Funktion $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ so, dass

$$|B(\chi, \varphi)| \geqq c(\alpha) \|\varphi\|_{H_2}$$

ist (mit $c(\alpha) > 0$ für $\alpha \in I$). Da $\|\chi\|_{H_1} = 1$ ist, gilt offensichtlich

$$\sup_{\substack{v \in H_1 \\ \|v\|_{H_1} \leqq 1}} |B(v, \varphi)| \geqq |B(\chi, \varphi)| \geqq c(\alpha) \|\varphi\|_{H_2}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Da die Menge $\mathscr{D}(\Omega)$ in H_2 dicht ist, gilt die letzte Ungleichung auch für $\varphi \in H_2$ und die Form $B(v, u)$ ist also H_2-elliptisch, d.h. $\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$-elliptisch. Ganz ähnlich folgt die $\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$-Elliptizität aus dem Satz 2.2 und der Satz 2.3 ist damit bewiesen.

3. DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM

Den Raum aller Funktionalen auf dem Hilbert-Raum $\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ werden wir $W_{2,-\alpha}^{(-k)}(\Omega)$ bezeichnen. Für $F \in W_{2,-\alpha}^{(-k)}(\Omega)$ und $v \in \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ definieren wir $\bar{F}$ folgenderweise: $\bar{F}(v) = \overline{F(\bar{v})}$; wir werden auch die formale Schreibweise $\bar{F}(v) = (v, F)$ benützen.

Satz 3.1. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, α eine reelle Zahl, k eine natürliche Zahl, i ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten, $|i| \leqq k$, $g_i \in L_{2,\alpha}(\Omega)$. Weiter sei*

$$G = (-1)^{|i|} D^i g_i \tag{3.1}$$

(im Sinne der Distributionen). Dann ist G ein Funktional auf $\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$, d.h. $G \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$, und es gilt

$$\|G\|_{W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)} \leqq c \sum_i \|g_i\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} . \tag{3.2}$$

Beweis. Für $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist

$$\bar{G}(v) = (v, G) = \int_\Omega D^i(v)\, \bar{g}_i \, \mathrm{d}X = \int_\Omega D^i(v)\, r^{-\alpha/2}\, \bar{g}_i r^{\alpha/2} \, \mathrm{d}X \, ;$$

unter Anwendung der Hölderschen Ungleichung und des Satzes 1.1 haben wir

$$|(v, G)| \leqq \|D^i v\|_{L_{2,-\alpha}(\Omega)} \cdot \|g_i\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \leqq$$
$$\leqq \|v\|_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \cdot \sum_i \|g_i\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \leqq c \|v\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \cdot \sum_i \|g_i\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} .$$

Daraus folgt durch $\|G\|_{W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)} = \sup\limits_{\|v\|_{\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}} \leqq 1} |(v, G)|$ die Ungleichung (3.2) und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Der Satz 3.1 gilt auch dann, wenn wir $g_i \in L_{2,\alpha+2(k-|i|)}(\Omega)$ voraussetzen; auf der rechten Seite der Ungleichung (3.2) steht dann natürlich der Ausdruck $c \sum_i \|g_i\|_{L_{2,\alpha+2(k-|i|)}(\Omega)}$.

Es sei nun A ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2k$ aus (2.1) und $B(v, u)$ die entsprechende Form (2.2). Weiter sei F ein Funktional auf $\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$, d.h. $F \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$, und u_0 eine Funktion aus $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$.

Wir sagen, dass die Funktion $u \in W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ das Dirichletsche Problem

$$\mathsf{A}u = \mathsf{F} \quad \text{auf} \quad \Omega$$

mit Randbedingungen, die durch die Funktion u_0 bestimmt sind, im schwachen Sinne löst, wenn

a) für alle Funktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichung

$$\mathsf{B}(v, u) = \bar{\mathsf{F}}(v)$$

gilt und

b) $u - u_0 \in \mathring{W}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ ist.

Satz 3.2. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, A ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2k$ und I und $\tilde{I}$ die Intervalle aus den Sätzen 2.1 und 2.2. Weiter sei $\alpha \in I \cap \tilde{I}$, $u_0 \in \in W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ und $\mathsf{F} \in W^{(-k)}_{2,\alpha}(\Omega)$.*

Dann hat das Dirichletsche Problem genau eine Lösung $u \in W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ und es ist

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}(k)} \leqq c\{\|u_0\|_{W_{2,\alpha}(k)} + \|\mathsf{F}\|_{W_{2,\alpha}(-k)}\}\,. \tag{3.3}$$

Beweis. Wir benützen die Bezeichnungen (2.21) und setzen

$$\mathsf{G} = \mathsf{F} - (-1)^{|i|}\, D^i(a_{ij}D^j u_0)\,. \tag{3.4}$$

Da $u_0 \in W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ ist, sind $D^j u_0$ und $a_{ij}D^j u_0$ Elemente des Raumes $L_{2,\alpha}(\Omega)$; nach dem Satz 3.1 ist also $\mathsf{G} \in W^{(-k)}_{2,\alpha}(\Omega) = H'_1$.

Die Form $\mathsf{B}(v, u)$ erfüllt – wie in der Ungleichung (2.20) und im Satz 2.3 gezeigt wurde – für $\alpha \in I \cap \tilde{I}$ alle Bedingungen des Satzes 1.2; darum existiert genau eine Funktion $w \in H_2$ so, dass für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichung $\mathsf{B}(v, w) = (v, \mathsf{G})$ gilt und dass

$$\|w\|_{H_2} \leqq c_1 \|\mathsf{G}\|_{H_1'} \tag{3.5}$$

ist.

Wir setzen nun

$$u = u_0 + w\,;$$

Dann ist $u - u_0 = w \in \mathring{W}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ und für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist

$$\mathsf{B}(v, u) = \mathsf{B}(v, u_0) + \mathsf{B}(v, w) = (v, (-1)^{|i|}\, D^i(a_{ij}Du_0)) + \\ + (v, \mathsf{F} - (-1)^{|i|}\, D^i(a_{ij}D^j u_0)) = (v, \mathsf{F})\,;$$

die Funktion u löst also das Dirichletsche Problem und ist eindeutig bestimmt. Die Ungleichung (3.3) folgt nun mit Hilfe des Satzes 1.1 aus (3.5) und (3.2).

Satz 3.3. *Alle Behauptungen des Satzes* 3.2 *gelten auch dann, wenn man die Bedingung* $\alpha \in I \cap \tilde{I}$ *durch die Bedingung* $\alpha \in I$, $\alpha \geqq 0$ *ersetzt.*

Beweis. Es seien H_1 und H_2 wieder die Hilbert-Räume aus (2.21). Für eine feste Funktion $u \in H_2$ sei $Z(u)$ das Element des Raumes H_1, welches das lineare Funktional $B(v, u)$ auf H_1 repräsentiert; dann ist die Menge $Z(H_2)$ dicht in H_1 (siehe J. Nečas [5]). Hiervon, aus dem Satz 2.3 und aus der Ungleichung (2.20) folgt, dass alle Voraussetzungen des Satzes 1.3 erfüllt sind; es existiert also genau eine Lösung $w \in H_2$ der Gleichung $B(v, w) = (v, G)$ mit G aus (3.4) für alle $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ und es gilt (3.5). Der Rest des Beweises gleicht dem Beweis des Satzes 3.2: die Funktion $u = u_0 + w$ ist die gesuchte Lösung des Dirichletschen Problems.

4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die Sätze des Abschnittes 3 garantieren die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems nicht für alle α, sondern für spezielle Werte dieses Parameters: $\alpha \in I \cap \tilde{I}$ oder $\alpha \in I$, $\alpha \geqq 0$. Die Existenz der Intervalle $I, \tilde{I}$ wurde im Abschnitt 2 für allgemeine Differenzialoperatoren bewiesen; für spezielle Operatoren kann man diese Intervalle näher bestimmen:

Es sei z.B. $N = 2$, $P = [0, 0]$ der Punkt auf der Grenze des Gebietes Ω, von dem wir die Entfernung messen. Weiter sei $K = \{x, y \mid 0 \leqq \operatorname{arctg} y/x \leqq \omega\}$ mit $0 \leqq \leqq \omega < 2\pi$ ein Winkel mit dem Scheitelpunkt $P = [0, 0]$ und $\Omega \subset E_N - K$. Für solche Gebiete gelten u.a. diese Aussagen:

1. Das Dirichletsche Problem für den Laplaceschen Operator $-\Delta = -\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$ ist in $W_{2,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ eindeutig lösbar für jedes α, das die Ungleichung

$$|\alpha| < \frac{2\pi}{2\pi - \omega}$$

erfüllt.

2. Das Dirichletsche Problem für den biharmonischen Operator Δ^2 ist in $W_{2,\alpha}^{(2)}(\Omega)$ eindeutig lösbar für alle α, für die

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{2}{3} \left[-1 + \sqrt{\left(1 + 3 \frac{\pi^2}{(2\pi - \omega)^2} \right)} \right] ; 2 \right\}$$

gilt.

Die Eigenschaften der Räume $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$, die wir hier ausnützen, gelten nicht nur für die Gewichtsfunktion $r^\alpha(X) = |X - P|^\alpha$, sondern auch für andere Belegungsfunktionen, z.B.

$$r^\alpha(X) = \min_{1 \leqq s \leqq t} |X - P_s|^\alpha \tag{4.1}$$

oder

$$(4.2) \qquad r^\alpha(X) = |X - P_1|^{\alpha_1} \cdot |X - P_2|^{\alpha_2} \dots |X - P_t|^{\alpha_t},$$

wo $P_1, P_2, \dots, P_t$ feste Punkte auf der Grenze des Gebietes Ω sind, in denen Ω die Kegeleigenschaft von aussen hat (siehe [3]).

Darum gelten alle Sätze des Abschnittes auch für die Räume $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ mit den Belegungsfunktionen (4.1) und (4.2).

Literaturverzeichnis

[1] *И. А. Киприянов:* О вариационном методе решения одного класса вырождающихся эллиптических уравнений, ДАН СССР *152*, 1 (1963), 35—38.

[2] *A. Kufner:* Über Sobolevsche Räume mit Belegungsfunktion und das Dirichletsche Problem, Comm. Math. Univ. Carolinae *6*, 1 (1965), 105–110.

[3] *A. Kufner:* Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion, Czech. Math. J. *15* (*90*), 4 (1965), 597–620.

[4] *H. Morel:* Introduction de poids dans l'étude de problèmes aux limites, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 299–414.

[5] *J. Nečas:* Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, *16*, 4 (1962), 305–326.

[6] *L. Nirenberg:* Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. *8* (1955), 649–675.

[7] *М. И. Вишик:* О первой краевой задаче для эллиптических уравнений в новой функциональной постановке, ДАН СССР *107*, 6 (1956), 781—784.

Резюме

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

АЛОИС КУФНЕР (Alois Kufner), Прага

В работе исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для эллиптического оператора (2.1) с ограниченными измеримыми коэффициентами в весовых пространствах $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ введенных в [3] (для $p = 2$).

Существование и единственность решения вытекает из теоремы 1.2 – обобщенной теоремы Лакса и Милграма – которая доказана в [5], или из теоремы 1.3, являюшейся некоторым видоизменением теоремы 1.2.

В п. 2 изучены свойства формы $B(v, u)$ из (2.2). Доказывается существование открытых интервалов I и $\tilde{I}$, содержающих точку $\alpha = 0$, и функцйи $c(\alpha)$ и $\tilde{c}(\alpha)$,

положительных на I и $\tilde{I}$ и таких, что для $\alpha \in I$ $(\alpha \in \tilde{I})$ имеет место неравенство (2.18) (неравенство (2.19)). Из этих неравенств следует, что выполнены условия теоремы 1.2 (теорема 2.3).

В п. 3 показано, что обобшенные производные $D^i g$ порядка $|i| \leqq k$ функции $g \in L_{2,\alpha}(\Omega)$ являются элементами пространства $W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$ функционалов над $\mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$ (теорема 3.1). Для $F \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$ и $u_0 \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ исследована далее задача Дирихле $\boldsymbol{A}u = F$ с граничными условиями, определенными функцией u_0 (т.е. $u - u_0 \in \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$). Доказывается, что для $\alpha \in I \cap \tilde{I}$ (теорема 3.2) или для $\alpha \in I$, $\alpha \geqq 0$ (теорема 3.3) существует одно и только одно слабое решение задачи Дирихле и что имеет место неравенство (3.3).

В заключение приведен пример: для $N = 2$ и специальной области даны оценки отрезков I и $\tilde{I}$ в случае операторов $-\Delta$ и Δ^2.