Marko Švec

Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 3, 378–393

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100681

Чехословацкий математический журнал т. 15 (90) 1965, Прага

EINIGE ASYMPTOTISCHE UND OSZILLATORISCHE EIGENSCHAFTEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y''' + A(x)\, y' + B(x)\, y = 0$

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Eingelangt am 23. Mai 1964)

Gewidmet dem Herrn Professor O. BORŮVKA
zu seinem 65. Geburtstag.

Man untersucht die Existenz, die asymptotischen Eigenschaften und die Eindeutigkeit der Lösung von (1), die keine Nullstelle hat.

Wir werden die Gleichung

$$y''' + A(x)\, y' + B(x)\, y = 0 \tag{1}$$

untersuchen. Wir setzen voraus, dass die Funktionen $A(x)$, $B(x)$ in einem Intervall (a, ∞) stetig sind und dass alle ihre Ableitungen, die in unseren Betrachtungen vorkommen werden, existieren und in (a, ∞) stetig sind. Weitere Voraussetzungen über diese Funktionen werden auf den betreffenden Stellen gemacht.

Es sei

$$W''' + A(x)\, W' + [A'(x) - B(x)]\, W = 0 \tag{2}$$

die zu (1) adjungierte Gleichung.

Zwei folgende Eigenschaften werden in unseren Erwägungen eine wichtige Rolle spielen:

(V_1) *Jede Lösung von* (1), *welche in einem Punkte* x_0, $x_0 \in (a, \infty)$, *eine zweifache Nullstelle besitzt, hat keine Nullstelle, die kleiner als* x_0 *ist.*

(V_2) *Jede Lösung von* (1), *welche in einem Punkte* x_0, $x_0 \in (a, \infty)$, *eine zweifache Nullstelle besitzt, hat keine Nullstelle, die grösser als* x_0 *ist.*

Aus diesen Eigenschaften folgen mehrere weitere Eigenschaften der Lösungen von (1). (S. [1], [2].) Wir werden von folgenden Gebrauch machen:

I. *Hat die Gleichung* (1) *die Eigenschaft* (V_1) $[(V_2)]$, *so hat die adjungierte Gleichung* (2) *die Eigenschaft* (V_2) $[(V_1)]$ ([1], L 2.9).

II. *Wenn die Gleichung* (1) *die Eigenschaft* (V_1) *hat, so haben alle Lösungen von* (1), *die irgendeine Nullstelle haben, denselben (oszillatorischen) Charakter, d. h. sie sind entweder alle oszillatorisch oder alle nichtoszillatorisch. Die Lösungen, die durch eine gemeinsame Nullstelle* x_0 *gehen, trennen ihre Nullstellen im Intervall* (x_0, ∞) *voneinander.* ([1], Satz 3.4, S. 927.)

III. *Wenn die Gleichung* (1) *die Eigenschaft* (V_1) *hat, so hat sie eine Lösung, die keine Nullstelle besitzt. Ist dabei die Gleichung* (1) *nichtoszillatorisch, so gibt es drei unabhängige Lösungen von* (1), *die keine Nullstelle besitzen.* ([2])

Im folgenden werden wir uns bemühen, aus den Eigenschaften der Koeffizienten $A(x)$, $B(x)$ die Eigenschaft (V_1) bzw. (V_2) abzuleiten.

Multiplizieren wir die Gleichung (1) durch y bzw. y'. Wir erhalten für jede Lösung $y(x)$ von (1) die Identitäten:

$$(yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + \tfrac{1}{2}A(x)\,y^2)' = [\tfrac{1}{2}A'(x) - B(x)]\,y^2\,, \tag{3}$$

bzw.

$$(y'y'' + \tfrac{1}{2}B(x)\,y^2)' = y''^2 - A(x)\,y'^2 + \tfrac{1}{2}B'(x)\,y^2\,. \tag{4}$$

Hilfssatz 1. Es sei $A(x) \leqq 0$. *Dann hat die Gleichung*

$$Y'' + A(x)\,Y = 0 \tag{g}$$

eine Hauptlösung $z(x)$, *d. h. die Lösung, für welche* $\int^\infty z^{-2}(t)\,dt = \infty$ *gilt.* ([3]) *Wenn für* $x \in (x_0, \infty)$ *diese Hauptlösung* $z(x) > 0$ *ist, so ist für* $x > x_0$

$$z'(x) \leqq 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} z'(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) \quad \textit{existiert}$$

und ist endlich und nichtnegativ.

Beweis. Die Gleichung (g) ist nichtoszillatorisch. Es sei $u(x)$ eine Lösung von (g), und es sei $u(x) > 0$ für $x > x_0$. Dann ist entweder $\int^\infty u^{-2}(t)\,dt = \infty$, also $u(x)$ ist eine Hauptlösung, oder $\int^\infty u^{-2}(t)\,dt < \infty$. Dann setzen wir $y(x) = u(x)\int_x^\infty u^{-2}(t)\,dt$. Man überzeugt sich leicht, dass $y(x)$ eine Hauptlösung von (g) ist.

Es sei nun $z(x)$ eine Hauptlösung von (g), und es sei $z(x) > 0$ für $x > x_0$. Aus der Gleichung (g) erhalten wir, dass $z''(x) \geqq 0$ ist. Also, $z'(x)$ nimmt nicht ab und deshalb ist $\lim_{x\to\infty} z'(x) = \alpha > -\infty$.

Es sei $0 < \alpha$. Dann ist für grosse x $\tfrac{1}{2}\alpha < z'(x)$. Es existiert also ein $\zeta > a$ so, dass

$$\tfrac{1}{2}\alpha(x - \zeta) < z(x) - z(\zeta) \text{ für } x > \zeta\,, \quad 0 < z^{-1}(x) < [\tfrac{1}{2}(x - \zeta)\,\alpha + z(\zeta)]^{-1}$$

und endlich

$$0 < \int_\zeta^\infty z^{-2}(t)\,dt \leqq \int_\zeta^\infty [\tfrac{1}{2}(t - \zeta)\,\alpha + z(\zeta)]^{-2}\,dt < \infty$$

ist. Das ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, dass $z(x)$ eine Hauptlösung ist.

Es sei $\alpha < 0$. Dann ist für genug grosse x $z'(x) < \frac{1}{2}\alpha < 0$, woraus folgt, dass für grosse x $z(x) < 0$ sein muss. Also wieder ein Widerspruch.

Diese Widersprüche beweisen, dass $\lim_{x\to\infty} z'(x) = \alpha = 0$ ist. Da aber $z'(x)$ nicht abnimmt, muss $z'(x) \leqq 0$ sein. Das bedeutet, dass $z(x)$ nicht zunimmt. Also $\lim_{x\to\infty} z(x)$ existiert, ist endlich und nichtnegativ.

Hilfssatz 2. *Es sei $z(x)$ eine Hauptlösung von*

$$Y'' + \tfrac{1}{4}A(x)\, Y = 0\,,$$

wo $A(x) \leqq 0$ in (a, ∞) ist. *Es sei $z(x) \neq 0$ für $x > b$. Dann führt die Transformation*

$$y(x) = f(x)\, v(t(x))\,, \quad t(x) = \int_b^x z^{-2}(\tau)\, d\tau\,, \quad f(x) = z^2(x)\,,$$

die Gleichung (1) in die Gleichung

$$\dddot{v} + z^6(x)\,[B(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)]\, v = 0$$

über, wohin anstatt x die inverse Funktion zu $t(x)$ einzusetzen ist. Die Punkte bedeuten die Ableitungen nach t.

Beweis. Es sei $y(x) = f(x)\, v(t(x))$. Wenn wir die Ableitungen y''', y' ausrechnen und in die Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$(5)\qquad ft'^3\dddot{v} + (3ft't'' + 3f't'^2)\,\ddot{v} + (3f''t' + 3f't'' + ft^{(3)} + Aft')\,\dot{v} + \\ + (f^{(3)} + Af' + Bf)\, v = 0\,.$$

Setzen wir $ft't'' + f't'^2 = 0$.

Es ergibt sich, dass

$$(6)\qquad t' = f^{-1}$$

ist. Wenn wir nun aus (6) t'', $t^{(3)}$ ausrechnen und in (5) einsetzen, erhalten wir für v die Gleichung

$$(7)\qquad \dddot{v} + (2ff'' - f'^2 + Af^2)\,\dot{v} + f^2(f^{(3)} + Af' + Bf)\, v = 0\,.$$

Setzen wir nun

$$(8)\qquad 2ff'' - f'^2 + Af^2 = 0\,.$$

Es sei $f = z^2$. So erhalten wir für z die Gleichung

$$(9)\qquad z'' + \tfrac{1}{4}Az = 0\,.$$

Diese Gleichung ist nichtoszillatorisch, da $A(x) \leqq 0$ ist. Es sei $z(x)$ ihre Hauptlösung. Für $t(x)$ erhalten wir aus (6)

$$t(x) = \int_b^x z^{-2}(\tau)\,d\tau\,, \quad \lim_{x\to\infty} t(x) = \infty\,,$$

und aus (7), mit Rücksicht auf (8), erhalten wir für $v(t)$ die Gleichung

$$\dddot{v} + z^6(x)\left[B(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)\right] v = 0\,, \tag{10}$$

wohin für x die inverse Funktion zu $t(x)$ einzusetzen ist.

Hilffsatz 3. *Es sei $Q(x) \geqq 0$ in (a, ∞), und es gelte das Zeichen $=$ in keinem Intervall aus (a, ∞). Es sei $Q(x)$ in (a, ∞) stetig. Wenn die Gleichung*

$$y''' + Q(x)\,y = 0 \tag{11}$$

eine oszillatorische Lösung hat, so ist jede ihre Lösung entweder oszillatorisch oder sie hat keine Nullstelle. Ist $y(x)$ eine ihrer Lösungen, die keine Nullstelle hat, so gilt die Behauptung:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} y(x),\ y'(x),\ y''(x)\ \textit{sind monotone Funktionen},\ \operatorname{sgn} y(x) = \\ = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x);\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y''(x) = 0. \end{cases}$$

Es gibt nur eine einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) solche Lösung.

Wenn die Gleichung (11) eine nichtoszillatorische Lösung $u(x)$ hat, die wenigstens eine Nullstelle hat, oder wenn sie keine Nullstelle hat und $\lim_{x\to\infty} u(x) \neq 0$ *ist, so ist (11) nichtoszillatorisch.*

Beweis. Den Beweis dieses Hilfssatzes, mit der Ausnahme der Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$, siehe [4], Satz 2. Die Eindeutigkeit von $y(x)$ folgt aus (8), Satz 3.

Satz 1. *Es sei* $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \leqq 0$ und *das Zeichen $=$ gelte in keinem Teilintervall von (a, ∞). Dann hat die Gleichung (1) die Eigenschaft (V_1) (und darum auch die Eigenschaften* **I, II, III**). *Ist noch $A(x) \leqq 0$, dan gibt es eine Lösung $u(x)$ von (1), die keine Nullstelle hat und für die noch die Relationen*

$$u(x)u'(x)u''(x) \neq 0\,, \ \operatorname{sgn} u(x) = \operatorname{sgn} u''(x) \neq \operatorname{sgn} u'(x)\,, \ \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$$

gelten. Hat dabei die Gleichung (1) eine oszillatorischke Lösung, so ist $u(x)$ die einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) nichtoszillatorische Lösung von (1) und es gilt, dass auch $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ ist.

Beweis. Die Eigenschaft (V_1) folgt aus der Voraussetzung $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \leqq 0$ und aus (3). Die Existenz einer Lösung, die keine Nullstelle hat, ist durch die Eigenschaft **III** gesichert. Wir werden eine solche Lösung ohne Nullstellen konstruieren.

Es sei $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, eine Folge von reellen Zahlen, und es sei $x_0 \in (a, \infty)$ irgendeine Zahl. Es sei weiter $y_n(x)$ die Lösung von (1), die durch die Bedingungen

$$y_n(x_n) = y_n'(x_n) = 0\,, \tag{12}$$

$$y_n^2(x_0) + y_n'^2(x_0) + y_n''^2(x_0) = 1 \tag{13}$$

bestimmt ist. Aus der Eigenschaft (V_1) folgt, dass $y_n(x) \neq 0$ für $x \in (a, x_n)$ ist. Nehmen wir $y_n(x) > 0$ an. Es seien $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, die Lösungen von (1), die durch die Anfangsbedingungen

$$u_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik}\,, \quad i, k = 0, 1, 2\,,$$

bestimmt sind. δ_{ik} bedeutet das Kronecker'sche Symbol. Die Lösung $y_n(x)$ lässt sich in der Form

$$y_n(x) = a_n u_0(x) + b_n u_1(x) + c_n u_2(x) \tag{14}$$

darstellen, wobei $y_n(x_0) = a_n$, $y_n'(x)_0 = b_n$, $y_n''(x_0) = c_n$ ist. Die Bedingung (13) gibt jetzt die Realtion

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 1\,. \tag{15}$$

Diese Relation bedeutet, dass die Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ begrenzt sind. Man kann also aus diesen Folgen die konvergenten Teilfolgen $\{a_{n_i}\}$, $\{b_{n_i}\}$, $\{c_{n_i}\}$ auswählen. Es sei $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a_0$, $\lim_{i\to\infty} b_{n_i} = b_0$, $\lim_{i\to\infty} c_{n_i} = c_0$. Aus (15) erhält man, dass

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1 \tag{16}$$

ist. Aus (14) folgt, dass

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} \left[a_{n_i} u_0(x) + b_{n_i} u_1(x) + c_{n_i} u_2(x)\right] =$$
$$= a_0\, u_0(x) + b_0\, u_1(x) + c_0\, u_2(x) = u(x)$$

ist. Man sieht, dass $u(x)$ eine nichttriviale Lösung von (1) ist. Es ist leicht ersichtlich, dass auch

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i}^{(k)}(x) = u^{(k)}(x)\,, \quad k = 1, 2, 3\,,$$

ist. Da aber $y_n(x) > 0$ für $x < x_n$ ist, ergibt sich, dass $u(x) \geqq 0$ für $x \in (a, \infty)$ ist. Das bedeutet aber, dass $u(x)$ nur zweifache Nullstellen besitzen kann. Berücksichtigen wir aber die Eigenschaft (V_1), sehen wir, dass $u(x)$ höchstens eine (zweifache) Nullstelle besitzen kann. Wir beweisen, dass $u(x)$ die in dem Satz angeführten Eigenschaften hat.

Es sei $F_y(x) = y(x)\, y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + \frac{1}{2}A(x)\, y^2(x)$. Aus (3) und aus der Voraussetzung, dass $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \leqq 0$ und in keinem Teilintervall identisch Null ist, folgt, dass $F_y(x)$ eine abnehmende Funktion ist. Da $F_{y_{n_i}}(x_{n_i}) = 0$ ist,

ist $F_{y_{n_i}}(x) > 0$ für $x \in (a, x_{n_i})$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{i \to \infty} F_{y_{n_i}}(x) = F_u(x) \geqq 0\,, \quad x \in (a, \infty)\,,$$

ist. Die Funktion $F_u(x)$ ist eine abnehmende Funktion. Aus diesen letzten zwei Tatsachen folgt, dass $F_u(x) = u(x)\,u''(x) - \frac{1}{2}u'^2(x) + \frac{1}{2}A(x)\,u^2(x) > 0$ ist. Daraus folgt, dass $u(x)$ keine zweifache Nullstelle besitzen kann. Somit ist bewiesen, dass $u(x) > 0$ ist.

Es sei nun $A(x) \leqq 0$. Da $F_{y_{n_i}}(x) > 0$ für $x \in (a, x_{n_i})$ und $F_u(x) > 0$ für $x \in (a, \infty)$ ist, erhalten, dass wir

$$(17) \qquad y_{n_i}(x)\,y''_{n_i}(x) - \tfrac{1}{2}y'^2_{n_i}(x) > -\tfrac{1}{2}A(x)\,y^2_{n_i}(x) \geqq 0\,, \quad x \in (a, x_{n_i})\,,$$

$$(18) \qquad u(x)\,u''(x) - \tfrac{1}{2}u'^2(x) > -\tfrac{1}{2}A(x)\,u^2(x) \geqq 0\,, \quad x \in (a, \infty)\,,$$

ist. Daraus folgt, dass $y''_{n_i}(x) > 0$ für $x \in (a, x_{n_i})$ und $u''(x) > 0$ für $x \in (a, \infty)$ ist. Also $u'(x)$ nimmt in (a, ∞) und $y'_{n_i}(x)$ in (a, x_{n_i}) zu. Da $y'_{n_i}(x_{n_i}) = 0$ ist, ist $y'_{n_i}(x) < 0$ in (a, x_{n_i}). Daraus erhalten wir, dass $u'(x) < 0$ in (a, ∞) ist. Da aber $u'(x)$ zunimmt, existiert $\lim_{x \to \infty} u'(x)$ und ist nichtpositiv. Die Funktion $u(x)$ hat somit folgende Eigenschaften: sie ist positiv und nimmt in (a, ∞) ab. Es existiert also $\lim_{x \to \infty} u(x)$ und dieser ist nichtnegativ. Aus diesen Tatsachen erhalten wir, dass $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$ ist.

Wir haben bisher bewiesen, dass $u(x)\,u'(x)\,u''(x) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u(x) = \operatorname{sgn} u''(x) \neq \operatorname{sgn} u'(x)$ ist.

Da $A(x) \leqq$ ist, können wir die Hilfssätze 2 und 3 verwenden. Es sei $z(x)$ eine Hauptlösung von $Y'' + \frac{1}{4}A(x)\,Y = 0$, und es sei $t(x) = \int_b^x z^{-2}(\tau)\,d\tau$. Die Substitution $y(x) = z^2(x)\,v(t(x))$ führt die Gleichung (1) in die Gleichung

$$(19) \qquad \dddot{v} + z^6(x)\left[B(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)\right] v = 0$$

über. Dabei ist nach der Voraussetzung $B(x) - \frac{1}{2}A'(x) \geqq 0$. Aus der Substitution $y(x) = z^2(x)\,v(t(x))$ sehen wir, dass die Gleichungen (1) und (19) zugleich oszillatorisch bzw. nichtoszillatorisch sind und zwischen den oszillatorischen bzw. nichtoszillatorischen Lösungen beider Gleichungen eine eineindeutige Abbildung besteht.

Es habe (1) eine oszillatorische Lösung. Dann hat auch (19) eine oszillatorische Lösung. Dann hat aber nach dem Hilfssatz 3 (19) nur eine einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) nichtoszillatorische Lösung. Es sei diese Lösung $v_1(t)$. Für diese Lösung gilt, unter anderem, dass $v_1(t) \neq 0$, $\lim_{t \to \infty} v_1(t) = \lim_{t \to \infty} v'_1(t) = \lim_{t \to \infty} v''_1(t) = 0$ ist. Die Gleichung (1) hat also auch nur eine einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) nichtoszillatorische Lösung. Diese ist $u(x)$, $u(x) = z^2(x)\,v_1(t(x))$. Da $\lim_{x \to \infty} z^2(x) < \infty$ ist, ist $\lim_{x \to \infty} u(x) = \lim_{x \to \infty} z^2(x) \lim_{x \to \infty} v_1(t(x)) = 0$.

Satz 2. *Es sei* $A'(x) \leqq 0$, $A(x) \leqq 0$, $\lim_{x\to\infty} A(x) \neq 0$, $B(x) \geqq 0$, *und es gelte* $B(x) \equiv 0$ *in keinem Teilintervall von* (a, ∞). *Dann gelten alle Behauptungen des Satzes* 1 *und darüber hinaus*:

$$u(x),\ u'(x),\ u''(x) \text{ sind monotone Funktionen,}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0\,, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\infty} A(x)\, u^2(x) = 0\,. \tag{21}$$

Die Funktion $u(x)$ *ist die einzige überall von Null verschiedene Lösung (bis auf die lineare Abhängigkeit), die die Eigenschaft* (20) *hat (unabhängig davon, ob* (1) *oszillatorisch oder nichtoszillatorisch ist).*

Alle Lösungen von (1), *die die Bedingungen* $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ *nicht erfüllen, haben denselben oszillatorischen Charakter (d. h. entweder sind alle oszillatorisch oder keine).*

Beweis. Aus den gemachten Voraussetzungen erhalten wir, dass $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \leqq \leqq 0$, $A(x) \leqq 0$ ist. Es gelten also alle Behauptungen des Satzes 1. Für die Lösung u(x) gilt also: $u(x) > 0$, $u'(x) < 0$, $u''(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} u(x)$ existiert. Nun erhalten wir aus der Gleichung (1), dass für $x \in (a, \infty)$

$$u'''(x) = -A(x)\, u'(x) - B(x)\, u(x) \leqq 0$$

ist. Also $u''(x)$ nimmt in (a, ∞) ab und ist positiv. Da $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$ ist, muss auch $\lim_{x\to\infty} u''(x) = 0$ sein.

Wir haben im Beweise des Satzes 1 bewiesen, dass

$$F_u(x) = u(x)\, u''(x) - \tfrac{1}{2}u'^2(x) + \tfrac{1}{2}A(x)\, u^2(x) \geqq 0$$

ist und in (a, ∞) abnimmt. Es existiert also $\lim_{x\to\infty} F_u(x)$ und ist nichtnegativ. Da $\lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim u''(x) = 0$ ist, ist

$$\lim_{x\to\infty} F_u(x) = \tfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} A(x)\, u^2(x) \geqq 0\,.$$

Da aber $A(x) \leqq 0$ und $\lim_{x\to\infty} A(x) \neq 0$ ist, muss

$$\lim_{x\to\infty} A(x)\, u^2(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \tag{21}$$

sein.

Wir zeigen jetzt, dass $u(x)$ die einzige Lösung von (1) ist, die die Eigenschaft (20) hat und von Null verschieden ist.

Es seien $u_1(x) = u(x)$ und $u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (1), und es gelte

(22) $$\lim_{x\to\infty} u_i(x) = \lim_{x\to\infty} u_i'(x) = \lim_{x\to\infty} u_i''(x) = 0\,, \quad u_i(x) > 0\,, \quad x \in (a, \infty)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Es sei $x_0 \in (a, \infty)$, und es sei $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Diese letzte Bedingung kann man immer erfüllen, denn es genügt die Lösungen $u_i(x)$ durch passende Konstanten c_i zu multiplizieren und dann statt u_1, u_2 die Lösungen c_1u_1, c_2u_2 zu betrachten. Die Zahl x_0 können wir also willkürlich wählen.

Wir werden jetzt einige Fälle unterscheiden. Es gibt zwei Hauptfälle:

A. Die Lösung von (1) $v(x) = u_2(x) - u_1(x)$ ist oszillatorisch.

B. Die Gleichung (1) hat keine oszillatorische Lösung. Also $v(x) = u_2(x) - u_1(x)$ ist nichtoszillatorisch. Durch die Wahl von x_0 können wir es so einrichten, dass für $x > x_0$ $v(x) \neq 0$, $v(x_0) = 0$ ist.

Fall A. In diesem Fall hat also die Gleichung (1) eine oszillatorische Lösung. Nach dem Satz 1 hat sie dann nur eine einzige nichtoszillatorische Lösung. Also $u_1(x)$ und $u_2(x)$ müssen linear abhängig sein.

Fall B. Wir werden zwei Fälle unterscheiden:

B 1. Es ist für $x \in (x_0, \infty)$ $v(x) = u_2(x) - u_1(x) > 0$. Also $v(x_0) = 0$, $v'(x_0) \geqq 0$.

B 2. Es ist für $x \in (x_0, \infty)$ $v(x) = u_2(x) - u_1(x) < 0$.

Der Fall B 1 enthält drei Unterfälle:

B 1a. Die Funktion $W(x) = u_1(x)\,u_2'(x) - u_1'(x)\,u_2(x) > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$.

B 1b. Die Funktion $W(x) < 0$ für $x \in (x_0, \infty)$.

B 1c. Die Funktion $W(x)$ hat in (a, ∞) unendlich viele Nullstellen, die eine unbegrenzte Folge bilden.

Fall B 1a. Es sei also $W(x) > 0$. Die Funktion $v(x)$ genügt der Gleichung

(23) $$\begin{vmatrix} v, & u_1, & u_2 \\ v', & u_1', & u_2' \\ v'', & u_1'', & u_2'' \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad W(x)\,v'' - W'(x)\,v' + (u_1'u_2'' - u_1''u_2')\,v = 0\,.$$

Es sei $G(x) = u_1'u_2'' - u_1''u_2'$. Aus (22) folgt, dass $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$ ist. Wenn wir die Ableitung $G'(x)$ ausrechnen, so erhalten wir, dass in (x_0, ∞) $G'(x) = B(x)\,W(x) \geqq 0$ ist. Also nimmt $G(x)$ in (x_0, ∞) zu, und da $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$ ist, muss $G(x) < 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ sein. Die Gleichung (23) lässt sich in der Form

$$\left(\frac{v'}{W(x)}\right)' + \frac{G(x)}{W^2(x)}\,v = 0$$

schreiben. Es folgt daraus, dass $(v'/W(x))' > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ ist. Also nimmt $v'/W(x)$ in (x_0, ∞) zu, und da $v'(x_0)/W(x_0) \geqq 0$ ist, ist $v'(x)/W(x)$ in (x_0, ∞) positiv. Daraus folgt, dass $v'(x) > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ ist. Darum nimmt $v(x)$ in (x_0, ∞) zu. Da aber $v(x_0) = 0$ ist, ist $\lim_{x\to\infty} v(x) > 0$. Das ist aber ein Widerspruch, da $\lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} u_2(x) - \lim_{x\to\infty} u_1(x) = 0$ ist.

Fall B 1b. Es sei nun $W(x) < 0$. In diesem Fall kommen wir auf gleichem Wege wie in B 1a zu einem Widerspruch.

Fall B 1c. $W(x)$ habe unendlich viele Nullstellen, die eine unbegrenzte Folge bilden. Da $W(x)$ eine Lösung von (2) ist, bedeutet das, dass die Gleichung (2) eine oszillatorische Lösung hat. Nach [1], Th. 4.7, S. 933, hat dann auch die Gleichung (1) eine oszillatorische Lösung, und darum hat sie nach Satz 1 nur eine einzige nicht-oszillatorische Lösung. Die Lösungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ sind also linear abhängig.

Wir müssen noch bemerken, was geschieht, wenn $W(x)$ nur endlich viele Nullstellen hat. Es sei z. B. ξ die letzte Nullstelle, d. h. $W(\xi) = 0$, $W(x) \neq 0$ für $x > \xi$. Wir können die Zahl x_0 immer so wählen, dass $\xi < x_0$ ist.

Fall B 2. In diesem Fall ist $v(x) = u_2(x) - u_1(x) < 0$. Also $0 < u_2(x) < u_1(x)$. Da $\lim_{x\to\infty} u_1(x) = \lim_{x\to\infty} u_2(x) = 0$ ist, können wir eine solche Zahl η, $a < \eta$, finden, dass $0 < u_2(x) < u_1(x) < 1$ für $x \in (\eta, \infty)$ ist. Dann ist auch $0 < u_2^2(x) < u_1^2(x)$ für $x \in (\eta, \infty)$. Wenn wir nun (21) berücksichtigen, erhalten wir, dass

$$(24) \qquad \lim_{x\to\infty} (-A(x))\, u_2^2(x) = \lim_{x\to\infty} (-A(x))\, u_1^2(x) = 0$$

ist. Bilden wir jetzt die Funktion $F_v(x) = v(x)\, v''(x) - \frac{1}{2}v'^2(x) + \frac{1}{2}A(x)\, v^2(x)$. Wir wissen schon, dass diese Funktion in (a, ∞) abnimmt. Da aber $v(x_0) = 0$ ist, ist $F_v(x_0) = -\frac{1}{2}v'^2(x_0) \leqq 0$. Also ist $F_v(x) < 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ und $\lim_{x\to\infty} F_v(x) < 0$. Berücksichtigt man, dass aus (22) $\lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v'(x) = \lim_{x\to\infty} v''(x) = 0$ folgt, so erhalten wir, dass

$$(25) \qquad \lim_{x\to\infty} F_v(x) = \tfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} A(x)\, v^2(x) < 0$$

ist. Aber mittels (24) erhalten wir, dass

$$\lim_{x\to\infty} A(x)\, v^2(x) = \lim_{x\to\infty} A(x)\, (u_2^2(x) + u_1^2(x) - 2\, u_1(x)\, u_2(x)) =$$
$$= -2 \lim_{x\to\infty} A(x)\, u_1(x)\, u_2(x) \geqq 0$$

ist. Das steht im Widerspruch mit (25).

Wir haben also bewiesen, dass die Annahme der linearen Unabhängigkeit von $u_1(x)$ und $u_2(x)$ in jedem von den untersuchten Fällen zu einem Widerspruch führt.

Es bleibt uns nun zu beweisen, dass alle Lösungen von (1), die die Bedingungen $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ nicht erfüllen, denselben (oszillatorischen) Charakter haben. Dies folgt aus der Voraussetzung $A(x) \leqq 0$, $B(x) \geqq 0$. (S. [5].)

Bemerkung. Die Sätze 1 und 2 verallgemeinern einige Resultate des Autors [4] und [7] und von M. Greguš [6], [8].

Satz 3. *Es sei* $A(x) \leqq 0$, $B(x) \geqq 0$, $B'(x) \geqq 0$. *Dabei gelte* $B(x) \equiv 0$ *in keinem Teilintervalle von* (a, ∞). *Dann gelten alle Behauptungen des Satzes* 2, *nur statt* (21) *gilt nun*

$$\lim_{x \to \infty} B(x)\, u^2(x) = 0 .$$

Beweis. Es sei $y(x)$ eine Lösung von (1), und es sei

$$H_y(x) = y'(x)\, y''(x) + \tfrac{1}{2}B(x)\, y^2(x) . \tag{26}$$

Aus (4) und aus den gemachten Voraussetzungen über $A(x)$ und $B(x)$ folgt, dass $H_y(x)$ in (a, ∞) zunimmt. Es sei nun $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, wobei $x_0 \in (a, \infty)$ ist. Es ist dann $H_y(x_0) = 0$ und $H_y(x) < 0$ für $x \in (a, x_0)$. Daraus folgt, dass $y'(x)\, y''(x) \neq 0$ für $x \in (a, x_0)$ ist, und daraus folgt weiter, dass $y(x) \neq 0$ für $x \in (a, x_0)$ sein muss. Damit haben wir aber bewiessen, dass die Gleichung (1) auch in diesem Falle die Eigenschaft (V_1) besitzt (und also auch die Eigenschaften **I, II, III**). Die Existenz einer Lösung $u(x)$ von (1), die keine Nullstelle besitzt, ist durch **III** gesichert. Wir finden sie durch ähnliche Konstruktion wie im Beweise des Satzes 1.

Es sei $\{x_n\}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$, eine Folge von reellen Zahlen, $\{y_n(x)\}$, $y_n(x_n) = y'_n(x_n) = 0$, $y_n^2(x_0) + y_n'^2(x_0) + y_n''^2(x_0) = 1$, die Folge der Lösungen von (1). Man kann die Folge $\{x_n\}$ so wählen, dass $\lim_{n \to \infty} y_n(x)$ existiert. Setzen wir $\lim_{n \to \infty} y_n(x) = u(x)$. Die Funktion $u(x)$ ist eine nichttriviale Lösung von (1). Nehmen wir an, dass $y_n(x) > 0$ für $x \in (a, x_n)$ ist. Da $H_{y_n}(x) = y'_n(x)\, y''_n(x) + \tfrac{1}{2}B(x)\, y_n^2(x) < 0$ für $x \in (a, x_n)$ ist, ist $y'_n(x)\, y''_n(x) < 0$ für $x \in (a, x_n)$. Aus allen diesen Tatsachen erhalten wir, dass $y'_n(x) < 0$ und $y''_n(x) > 0$ in (a, x_n) ist. Aus den bisher bewiesenen Tatsachen wissen wir, dass

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) > 0 , \quad u'(x) = \lim_{n \to \infty} y'_n(x) \leqq 0 , \quad u''(x) = \lim_{n \to \infty} y''_n(x) \geqq 0$$

ist. Aus der Gleichung (1) bekommen wir jetzt, dass

$$u'''(x) = -A(x)\, u'(x) - B(x)\, u(x) \leqq 0$$

ist. Das Zeichen = gilt in keinem Intervall. Daraus folgt, dass $u''(x)$ in (a, ∞) abnimmt. Da aber $u''(x) \geqq 0$ ist, muss $u''(x) > 0$ sein. Ähnlich folgt aus $u''(x) > 0$, $u'(x) \leqq 0$, dass $u'(x) < 0$ ist. Die Funktionen $u(x), u'(x), u''(x)$ sind also monoton und dabei ist $u(x) > 0$, $u'(x) < 0$, $u''(x) > 0$. Es folgt daraus, dass $\lim_{x \to \infty} u'(x) =$

$= \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0$ ist. Wir beweisen jetzt, dass auch $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ ist. Wir beweisen das indirekt. Es sei $\lim_{x\to\infty} u(x) = k > 0$. Da $u(x)$ abnimmt, ist $u(x) > k$. Nun folgt aus den über $B(x)$ und $B'(x)$ gemachten Voraussetzungen, dass $\lim_{x\to\infty} B(x)$ eine positive Zahl oder ∞ ist. Es sei $0 < M < \lim_{x\to\infty} B(x)$. Dann bekommen wir für grosse x, dass $B(x)\, u(x) > Mk > 0$ und

$$u'''(x) = -A(x)\, u'(x) - B(x)\, u(x) < -Mk < 0$$

ist. Aus dieser letzten Ungleichheit folgt, dass für grosse x $u''(x) < 0$ ist. Dieser Widerspruch beweist, dass $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ ist.

Man sieht leicht, dass aus den Bedingungen

$$\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x) \tag{27}$$

die Relationen $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$ folgen, wenn $y(x)$ eine Lösung von (1) ist.

Wir zeigen jetzt, dass für jede Lösung $y(x)$ von (1), die die Bedingungen (27) erfüllt, die Relation

$$\lim_{x\to\infty} B(x)\, y^2(x) = 0 \tag{28}$$

gilt. Es sei $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) > 0$ und es sei $\lim_{x\to\infty} B(x)\, y^2(x) = K > 0$. Also für grosse x ist $B(x)\, y^2(x) > \frac{1}{2}K > 0$. Da $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ ist, ist für grosse x $0 < y^2(x) < y(x)$ und darum für diese x auch $B(x)\, y(x) > \frac{1}{2}K > 0$. Aus der Gleichung (1) erhalten wir nun, dass für grosse x $y''' = -A(x)\, y'(x) - B(x)\, y(x) < -\frac{1}{2}K < 0$ ist. Aus dieser letzten Ungleichung folgt aber, dass für grosse x $y''(x) < 0$ sein muss. Das widerspricht unserer Voraussetzung. Es gilt also (28).

Im weiteren beweisen wir, dass $u(x)$ die einzige Lösung von (1) ist, die die Eigenschaft (20) hat und überall von Null verschieden ist. Das Verfahren ist fast dasselbe wie im Beweise des Satzes 2.

Es seien $u(x) = u_1(x)$ und $u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (1), und es sei

$$\lim_{x\to\infty} u_i^{(j)}(x) = 0\,, \quad u_i(x) > 0\,, \quad i = 1, 2\,, \quad j = 0, 1, 2\,.$$

Es sei weiter $x_0 \in (a, \infty)$ und $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Man kann es immer so einrichten, dass diese letzte Bedingung erfüllt wird. Untersuchen wir die Lösung $v(x) = u_2(x) - u_1(x)$. Wir müssen dieselben Fälle wir im Beweise des Satzes 2 unterscheiden:

Fall A. $v(x)$ ist oszillatorisch.

Fall B 1a. Für $x > x_0$ gilt: $v(x) > 0$ und $W(x) = u_1(x)\, u_2'(x) - u_1'(x)\, u_2(x) > 0$.

Fall B 1b. Für $x > x_0$ ist $v(x) > 0$ und $W(x) < 0$.

Fall B 1c. Für $x > x_0$ ist $v(x) > 0$ und $W(x)$ oszillatorisch.

Fall B 2. Für $x > x_0$ ist $v(x) < 0$.

Fall A. Ist $v(x)$ oszillatorisch, so gibt es eine Zahl t_0 so, dass $v'(t_0) = 0$ ist. Dann ist aber $2H_v(t_0) = B(t_0)\, v^2(t_0) > 0$. Weil $H_v(x)$ in (a, ∞) zunimmt, ist $H_v(x) > 0$ für $t_0 < x$ und

$$\lim_{x\to\infty} H_v(x) = \lim_{x\to\infty} \left[v'(x)\, v''(x) + \tfrac{1}{2}B(x)\, v^2(x)\right] = \tfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} B(x)\, v^2(x) > 0 .$$

Es sei $\{x_n\}$ eine Folge der Nullstellen von $v(x)$, und es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann ist $B(x_n)\, v^2(x_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} B(x_n)\, v^2(x_n) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch.

Das Beweisverfahren in den Fällen B 1a, B 1b, B 1c ist dasselbe wie im Beweise des Satzes 2. In allen drei Fällen erhalten wir einen Widerspruch.

Fall B 2. In diesem Fall ist $v(x) = u_2(x) - u_1(x) < 0$. Also ist $0 < u_2(x) < u_1(x)$. Da $\lim_{x\to\infty} u_1(x) = \lim_{x\to\infty} u_2(x) = 0$ ist, erhalten wir für grosse x, dass $0 < u_2^2(x) < u_1^2(x)$ und $0 < B(x)\, u_2^2(x) < B(x)\, u_1^2(x)$ ist. Nach (28) ist $\lim_{x\to\infty} B(x)\, u_1^2(x) = 0$. Darum ist auch $\lim_{x\to\infty} B(x)\, u_2^2(x) = 0$.

Nun haben wir folgende Situation: $v(x_0) = 0$, $v(x) < 0$ für $x > x_0$, also $v'(x_0) \leqq$ $\leqq 0$; $\lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v'(x) = \lim_{x\to\infty} v''(x) = 0$. Die Funktion $H_v(x)$ nimmt in (a, ∞) zu. Es existiert also $\lim_{x\to\infty} H_v(x)$ und es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} H_v(x) = \lim_{x\to\infty} \left[v'(x)\, v''(x) + \tfrac{1}{2}B(x)\, v^2(x)\right] = \tfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} B(x)\, v^2(x) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} B(x) \left[u_2^2(x) + u_1^2(x) - 2u_1(x)\, u_2(x)\right] = - \lim_{x\to\infty} B(x)\, u_1(x)\, u_2(x) \leqq 0 .$$

Also ist $H_v(x) = v'(x)\, v''(x) + \tfrac{1}{2}B(x)\, v^2(x) < 0$ für $x \in (a, \infty)$. Daraus folgt, dass $v'(x)\, v''(x) < 0$ ist. Da $v'(x_0) \leqq 0$ ist, muss $v'(x) < 0$ in (a, ∞) sein. Also nimmt $v(x)$ in (a, ∞) ab, und da $v(x_0) = 0$ ist, muss $\lim_{x\to\infty} v(x) < 0$ sein. Das ist aber ein Widerspruch, denn es soll $\lim_{x\to\infty} v(x) = 0$ sein.

In allen Fällen erhielten wir einen Widerspruch, welcher beweist, dass $u_1(x)$ und $u_2(x)$ linear abhängig sind.

Die Behauptung, dass die Lösungen von (1), die die Bedingungen

$$\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$$

nicht erfüllen, denselben oszillatorischen Charakter haben, folgt aus den Bedingungen $A(x) \leqq 0$, $B(x) \geqq 0$. (S. [5].)

Satz 4. *Es sei* $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \geqq 0$ *und es gelte das Zeichen* $=$ *in keinem Teilintervall von* (a, ∞). *Dann hat die Gleichung* (1) *die Eigenschaft* (V_2) *und sie hat eine Lösung* $u(x)$, *die keine Nullstelle hat. Ist noch* $A(x) \leqq 0$, *so gilt für* $u(x) > 0$, *dass* $u''(x) > 0$, $u'(x) > 0$ *und* $\lim_{x \to \infty} u(x) = \infty$ *ist.*

Beweis. Es sei $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \geqq 0$. Also nach (3) ist die Funktion $F_y(x) = y(x)\, y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + \frac{1}{2}A(x)\, y^2(x)$ eine zunehmende Funktion. Nehmen wir an, dass $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ ist. Dann ist $F_y(x_0) = 0$ und $F_y(x) > 0$ für $x > x_0$. Das bedeutet, dass $y(x)$ in (x_0, ∞) keine Nullstelle hat. Die Gleichung (1) hat also die Eigenschaft (V_2). Bei der Konstruktion der Lösung $u(x)$, die keine Nullstelle hat, können wir das Verfahren aus dem Beweise des Satzes 1 verwenden. Die Folge $\{x_n\}$ der zweifachen Nullstellen von $y_n(x)$ soll nun zu a konvergieren. Wir erhalten, dass $u(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$ und

$$F_u(x) = u(x)\, u''(x) - \tfrac{1}{2}u'^2(x) + \tfrac{1}{2}A(x)\, u^2(x) > 0 \tag{29}$$

für $x \in (a, \infty)$ ist. Nehmen wir an, dass $u(x) > 0$ und $A(x) \leqq 0$ ist. Aus (29) ergibt sich, dass $u(x)\, u''(x) > 0$ sein muss. Daraus folgt, dass $u''(x) > 0$ ist. Also $u'(x)$ nimmt zu. Aus der Annahme $y_n(x) > 0$ für $x > x_n$ folgt weiter, dass in (x_n, ∞), $y_n''(x) > 0$, $y_n'(x) > 0$ ist. Daraus erhalten wir, dass $u'(x) = \lim_{n \to \infty} y_n'(x) \geqq 0$ ist. Aus $u''(x) > 0$ folgt nun, dass $u'(x) > 0$ ist. Aus $u''(x) > 0$, $u'(x) > 0$ folgt weiter, dass $\lim_{x \to \infty} u(x) = \infty$ ist.

Satz 5. *Es sei* $A(x) \leqq 0$, $B(x) \leqq 0$. *Dann hat die Gleichung* (1) *die Eigenschaft* (V_2) *und für jede ihrer Lösungen* $y(x)$ *mit einer zweifachen Nullstelle gilt*: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} y'(x) = \infty$, $y''(x) > 0$ (*falls für grosse* x $y(x) > 0$ ist) *und nimmt für grosse* x *nicht ab. Die Gleichung* (1) *hat auch eine Lösung* $u(x)$, *die keine Nullstelle hat. Ist* $B(x) \equiv 0$ *in keinem Teilintervall von* (a, ∞), *so ist* $\varepsilon\, u(x) > 0$, $\varepsilon\, u'(x) > 0$, $\varepsilon\, u''(x) > 0$, $\lim_{x \to \infty} \varepsilon\, u(x) = \lim_{x \to \infty} \varepsilon\, u'(x) = \infty$ und $\varepsilon\, u''(x)$ *nimmt in* (a, ∞) *zu* $[\varepsilon = \pm 1]$.

Beweis. Es sei $y(x)$, $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, eine nichttriviale Lösung von (1). Es sei $y''(x_0) > 0$. Dann ist $y(x) > 0$ für $x > x_0$. Ist dies nicht wahr, so sei x_1 die erste rechts von x_0 liegende Nullstelle von $y(x)$ und $x_2 < x_1$ die erste rechts von x_0 liegende Nullstelle von $y'(x)$. Also, $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_2)$. Aus der Gleichung (1) bekommen wir, dass $y'''(x) = -A(x)\, y'(x) - B(x)\, y(x) \geqq 0$ für $x \in (x_0, x_2)$ ist. Also, $y''(x)$ nimmt in (x_0, x_2) nicht ab, und da $y''(x_0) > 0$ ist, ist $y''(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_2)$. Das bedeutet, dass $y'(x)$ in (x_0, x_2) zunimmt. Da $y'(x_0) = 0$ ist, ist $y'(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_2)$ und $y'(x_2) > 0$. Das ist ein Widerspruch, der beweist, dass $y(x) > 0$ und auch $y'(x) > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ ist. Aus diesen Tatsachen und aus der Gleichung (1) bekommen wir, dass $y'''(x) \geqq 0$ für $x \in (x_0, \infty)$ ist. Daraus folgt, dass $y''(x)$ in (x_0, ∞) nicht abnimmt. Also ist $y''(x)$ dort positiv und nicht kleiner als $y''(x_0)$. Das bedeutet aber, dass $\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} y'(x) = \infty$ ist. Die Eigenschaft (V_2) der Gleichung (1) ist klar. Aus dieser Eigenschaft folgt die Existenz einer

Lösung $u(x)$ von (1), die keine Nullstelle hat. Man konstruiert sie als $\lim_{n\to\infty} y_n(x)$, wobei $y_n(x)$ eine Lösung von (1) ist, für welche folgendes gilt: $y_n(x_n) = y_n'(x_n) = 0$, $y_n(x) > 0$, $y_n'(x) > 0$, $y_n''(x) > 0$ für $x \in (x_n, \infty)$, $y_n^2(x_0) + y_n'^2(x_0) + y_n''^2(x_0) = 1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Wir erhalten, dass $u(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \geqq 0$, $u'(x) = \lim_{n\to\infty} y_n'(x) \geqq 0$, $u''(x) = \lim_{n\to\infty} y_n''(x) \geqq 0$ ist. Da $u(x)$ eine nichttriviale Lösung von (1) ist, kann sie nur eine (zweifache) Nullstelle haben. Da aber $u'(x) \geqq 0$ ist, kann $u(x)$ keine Nullstelle haben.

Es gelte nun $B(x) \equiv 0$ in keinem Teilintervall von (a, ∞). Dann ist $u'''(x) = -A(x)\, u'(x) - B(x)\, u(x) \geqq 0$, wobei das Zeichen = nur in diskreten Punkten gelten kann. Aus dieser Tatsache folgt, dass $u''(x)$ in (a, ∞) positiv ist und zunimmt. Dasselbe gilt auch für $u'(x)$ und $u(x)$. Daraus folgt, dass $\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \infty$ ist.

Bemerkung 2. Die Voraussetzung „$B(x) \equiv 0$ in keinem Teilintervall von (a, ∞)" ist nicht überflüssig, wie es die Gleichung $y''' = 0$ zeigt. Diese hat keine solche Lösung $u(x)$ ohne Nullstelle, für welche $u(x) > 0$, $u'(x) > 0$, $u''(x) > 0$ gilt.

Satz 6. *Es sei $A(x) \leqq 0$, $B(x) \leqq 0$, $A'(x) - B(x) \leqq 0$. Dann sind die Gleichungen* (1) *und* (2) *nichtoszillatorisch und jede ihrer Lösungen hat höchstens zwei Nullstellen.*

Beweis. Verwendet man den Satz 5 auf (1) und (2), so erhält man, dass die beiden Gleichungen die Eigenschaft (V_2) haben. Aus der Eigenschaft **I** erhalten wir, dass beide Gleichungen auch die Eigenschaft (V_1) haben. Die Behauptung des Satzes folgt dann aus [2], Satz 2.

Literaturverzeichnis

[1] *Hanan M.:* Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pacific. J. Math. *11* (1961), 919—944.

[2] *Швец М.*: Несколко замецаний о линейном дифференциальном уравнении третьего порядка. Чех. мат. ж., т. *15* (*90*) (1965,) 42—49.

[3] *Mařík J.* und *Ráb M.:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x)\, y$ im nichtoszillatorischen Fall, Czech. mat. J., t. *10* (*85*) (1960), 501—522.

[4] *Švec M.:* Sur une propriété des intégrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)\, y = 0$, $n = 3,4$. Czech. mat. J., *7* (*82*) (1957), 450—461.

[5] *Vilari G.:* Sul carattere oscilatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. III. Ser. *13* (1958), 73—78.

[6] *Greguš M.:* Über einige Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0$, $A \leqq 0$. Czech. mat. J., *11* (*86*) (1961), 106—114.

[7] *Švec M.:* On various properties of the solutions of third- and fourth-order linear differential equations. Proc. of the Conference "Differential equations and their applications", Prague, 1962.

[8] *Greguš M.:* Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Ann. di Mat. Pura ed Appl., S IV, *LXIII*, (1963), 1—10.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава

В работе решаются вопросы существования, асимптотического поведения и однозначности решения дифференциального уравнения (1) без нулевой точки. Вопрос о существовании такого решения был решен для линейного дифференциального уравнения третьего порядка в работе [2] при условии, что это уравнение обладает свойством (V_1): *Каждое решение приведенного уравнения, которое имеет в некоторой точке* x_0 *двухкратный нуль, не имеет нулевой точки для* $x < x_0$; или же свойством (V_2): *Каждое его решение, которое имеет двухкратный нуль в* x_0, *не имеет нулевой точки для* $x > x_0$. В настоящей работе решается на основании свойств коэффициентов $A(x)$, $B(x)$ в первую очередь вопрос об асимптотическом поведении решения без нулевой точки и вопрос об однозначности такого решения. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \leqq 0$ *и пусть знак = не имеет места ни в каком частичном интервале интервала* (a, ∞). *Тогда уравнение* (1) *обладает свойством* (V_1) (*и, следовательно, свойствами* **I, II, III**). *Если* $A(x) \leqq 0$, *то существует решение* $u(x)$ *уравнения* (1), *которое не имеет нулевой точки и для которого выполнено следующее:*

$$u(x)\, u'(x)\, u''(x) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} u(x) = \operatorname{sgn} u''(x) \neq \operatorname{sgn} u'(x)\,, \quad \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0\,.$$

Если при этом уравнение (1) *имеет колеблющееся решение, то* $u(x)$ *является единственным* (*вплоть до линейной зависимости*) *неколеблющимся решением и справедливо для него следующее:* $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $A'(x) \leqq 0$, $A(x) \leqq 0$, $\lim_{x\to\infty} A(x) \neq 0$, $B(x) \geqq 0$ *и пусть* $B(x) \equiv 0$ *не имеет места ни в каком частичном интервале интервала.*

Тогда выполнены все утверждения теоремы 1 *и, помимо этого еще:* $u(x)$, $u'(x)$ $u''(x)$ *являются монотонными функциями, и*

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0\,, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\infty} A(x)\, u^2(x) = 0\,. \tag{21}$$

Решение $u(x)$ *является единственным* (*вплоть до линейной зависимости*) *решением, всюду отличным от нуля и выполняющим соотношение* (20) (*независимо*

от того, колеблется ли уравнение (1) *или нет). Все решения уравнения* (1), *которые не удовлетворяют условиям* $\operatorname{sgn} u(x) = \operatorname{sgn} u''(x) \neq \operatorname{sgn} u'(x)$ *имеют одинаковый колебательный характер.*

Теорема 3. *Пусть* $A(x) \leqq 0$, $B(x) \geqq 0$, $B'(x) \geqq 0$. *Пусть соотношение* $B(x) \equiv 0$ *не имеет места ни на наком частичном интервале интервала* (a, ∞). *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 2, *только вместо* (21) *выполнено:* $\lim\limits_{x\to\infty} B(x)\, u^2(x) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\frac{1}{2}A'(x) - B(x) \geqq 0$ *и пусть знак* $=$ *не имеет места ни в каком частичном интервале интервала* (a, ∞). *Тогда уравнение* (1) *обладает свойством* (V_2) *и имеет решение* $u(x)$ *без нулевой точки. Если* $A(x) \leqq 0$, *то:* $u''(x) > 0$, $u'(x) > 0$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$.

Теорема 5. *Пусть* $A(x) \leqq 0$, $B(x) \leqq 0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет свойство* (V_2) *и для каждого его решения* $y(x)$ *с двухкратным нулем выполнено следующее:* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty$ *и* $y''(x) > 0$ *(если* $y(x) > 0$ *для больших* x*) и не убывает. Уравнение* (1) *имеет тоже решение* $u(x)$ *без нулевой точки. Если* $B(x) \equiv 0$ *не выполнено ни на каком частичном интервале интервала* (a, ∞), *то* $\varepsilon\, u(x) > 0$, $\varepsilon\, u'(x) > 0$, $\varepsilon\, u''(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\, u(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\, u'(x) = \infty$, $\varepsilon\, u''(x)$ *на* (a, ∞) *возрастает.* $\varepsilon = \pm 1$.

Теорема 6. *Пусть* $A(x) \leqq 0$, $B(x) \leqq 0$, $A'(x) - B(x) \leqq 0$. *Тогда уравнение* (1) *и уравнение* (2) *являются неколебательными и каждое их решение не имеет больше двух нулевых точек.*