Czechoslovak Mathematical Journal

Froim Marcus

Encore sur les surfaces de troisième espèce de Terracini

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 2, 230–236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100664

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

ENCORE SUR LES SURFACES DE TROISIÈME ESPÈCE DE TERRACINI

FROIM MARCUS, Jassy

(Reçu le 2 janvier 1964)

On démontre que les images de toutes les surfaces de troisème espèce de Terracini sur l'hyperquadrique de Klein de S_5 sont des congruences C_0, c'est-à-dire des congruences de S_n avec les nappes focales non-dégénérées qui admettent un réseau conjugué à invariants égaux à zéro.

On fait voir que la classe des surfaces de troisième espèce de Terracini est plus étendue que celle donnée en [3] qui contient seulement les surfaces limite de Tzitzéica-Wilczynski.

Enfin on démontre, contrairement au résultat obtenu en [3], qu'il existe des surfaces de troisième espèce de Terracini qui sont transformées par congruences W en quadriques.

Soit pq une congruence de droites de l'espace projectif S_n, dont les nappes focales sont non-dégénérées, et que l'on suppose rapportées aux développables u = const. et v = const.

En disposant d'une manière convenable du facteur de proportionnalité des coordonnées p et q, on peut poser

$$(1) \qquad p_v = \gamma q\,; \quad q_u = \beta p \qquad (\beta\gamma \neq 0)\,.$$

Si la congruence admet un réseau conjugué à invariants égaux, alors d'après B. SEGRE [1], pq est une congruence C. Dans ce cas, le réseau est décrit par le point

$$(2) \qquad z = Up - Vq\,,$$

avec $U = U(u)$ et $V = V(v)$, et il existe une fonction Φ de u, v telle que [1]

$$(3) \qquad \beta = \Phi_u\,; \quad \gamma = \Phi_v\,;$$
$$(U^2 - V^2)\,\Phi_{uv} - VV'\,\Phi_u + UU'\,\Phi_v = 0\,.$$

D'après un théorème de Koenigs la congruence admet un deuxième réseau à invariants égaux, et que l'on obtient en prenant le conjugué harmonique du point d'appui du premier réseau par rapport aux points focaux de chaque rayon de la congruence.

Deux tels réseaux forment une paire Γ de réseaux conjugués avec la congruence C. D'après B. Segre [1] une congruence C admet généralement une seule telle paire. Si elle admet deux, elle admet une infinité.

Nous dirons brièvement congruence C_0, une congruence de droites d'un S_n avec les nappes focales non dégénérées, si elle admet un réseau conjugué à invariants égaux à zéro. Avec ces hypothèses, le transformé de Koenigs-Moutard de ce réseau ne peut pas être aussi un réseau à invariants égaux à zéro. Une paire de tels réseaux sera notée par Γ_0. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites soit de type C_0 est qu'il existe une fonction Φ de u, v et deux fonctions $U(u)$ et $V(v)$, tels que

$$\beta = \Phi_u\,; \quad \gamma = \Phi_v\,, \tag{4}$$
$$(U^2 - V^2)\,\Phi_{uv} - VV'\,\Phi_u + UU'\,\Phi_v = 0\,, \quad V\Phi_{uv} + V'\,\Phi_u - U\,\Phi_u\Phi_v = 0\,.$$

En ce cas le point

$$z^* = Up - Vq\,, \tag{5}$$

décrit le réseau $z^*_{uv} = 0$. A différence d'une congruence C, dans le cas d'une congruence C_0 la fonction Φ ne peut pas être arbitraire. Si $U = \pm V = a$, alors la congruence C_0 admet une seule paire de réseaux Γ_0 et $z = p \mp q$ décrira le réseau à invariants égaux à zéro.

Dans ce cas, il résulte

$$\Phi_{uv} = \pm\,\Phi_u\Phi_v\,. \tag{6}$$

Donc

$$\Phi = \mp \log(F + \Psi)\,, \tag{7}$$

avec $F = F(u)$ et $\Psi = \Psi(v)$.

Si U, V Φ forment une solution de (4) et si l'on cherche la fonction Φ telle que les conditions (4) soient aussi satisfaites pour $U + c$ et $V \pm c$, alors on trouve

$$\Phi = \mp \log(F + \Psi)\,; \quad U = c^*F_1 + c_1^*\,; \quad V = \mp\, c^*\Psi \pm c_1^* \tag{8}$$
$$(c^*, c_1^* = \text{const.})\,.$$

Réciproquement, si Φ est une solution de (6), alors il résulte de (4).

$$\frac{U'}{F'} = \mp\,\frac{V'}{\Psi'} = c^*\,. \tag{9}$$

Si $c^* = 0$, alors $U = \pm V = a$ $(a = \text{const.})$ et la congruence C_0 correspondante admet une seule paire de réseaux Γ_0. En ce cas, le point $z = p - q$ décrira le réseau à invariants égaux à zéro, tandis que $z = p + q$ décrit le réseau transformé de Koenigs.Moutard, ou à l'envers.

Si $c^* \neq 0$ alors on obtient

$$U = c^*F + d_1\,; \quad V = \mp\, c^*\Psi \pm d_1 \tag{10}$$

et nous avons

$$z^* = (c^*F + d_1)\,p - (\mp\, c^*\Psi \pm d_1)\,q\,. \tag{11'}$$

La congruence C_0 admet alors ∞^1 paires de réseaux Γ_0.

Sans continuer ici l'étude des congruences C_0, considérons une surface (x) de S_3 rapportée aux lignes asymptotiques et l'image de la surface sur une variété quadratique de l'espace S_5. Comme il est bien connu, l'image de la surface est une congruence de droites et en ce cas les coefficients β, γ de (1) sont les coefficients bien connus de la théorie des surfaces [2]. De (4) et (7) il résulte que la congruence quadratique, image de la surface (x), est une congruence C_0 si et seulement si

$$\beta = \mp \frac{F'(u)}{F + \Psi}\,; \quad \gamma = \mp \frac{\Psi'(v)}{F + \Psi}\,. \tag{11}$$

Les surfaces (x) correspondantes existent et dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument et de trois constantes, car les conditions de complète intégrabilité des équations fondamentales de la théorie des surfaces s'intégrent et l'on obtient [2]

$$\begin{aligned} L &= -\frac{3}{2}\frac{F'^2}{(F+\Psi)^2} + \frac{F''}{F+\Psi} + CF^2 \pm C_1F + C_2\,, \\ M &= -\frac{3}{2}\frac{\Psi'^2}{(F+\Psi)^2} + \frac{\Psi''}{F+\Psi} + C\Psi^2 \mp C_1\Psi + C_2\,. \end{aligned} \tag{12}$$

De (11) il résulte

$$\beta_v = \gamma_u = \pm\, \beta\gamma\,. \tag{13}$$

Donc

$$(\log \beta)_{uv} = (\log \gamma)_{uv} = \beta\gamma\,. \tag{14}$$

Par conséquent, les asymptotiques u et v appartiennent à des complexes linéaires [2] et les surfaces (x) correspondantes sont des surfaces de Terracini.

Nous avons donc le

Théorème. *L'image d'une surface sur l'hyperquadrique de Klein de S_5 est une congruence C_0 avec un seule paire ou avec ∞^1 paires de réseaux Γ_0 si et seulement si elle est une surface de Terracini avec*

$$\beta = \mp \frac{F'(u)}{F + \Psi}\,; \quad \gamma = \mp \frac{\Psi'(v)}{F + \Psi}\,.$$

Il reste maintenant à préciser l'espèce d'une telle surface. Pour cela nous considérons la représentation paramétrique des surfaces de Terracini donnée en [3] par O. ROZET et N. LEGRAIN, en coordonnées de Wilczynski.

Avec les notations classiques de Fubini-Čech, les expressions de β, γ qui résultent de la représentation paramétrique des surfaces de première, deuxième et troisième espèce données en [3] sont respectivement:

$$\text{(I)} \qquad \beta = \frac{2VU^{30}}{\sigma(V^{01} - U^{10})^2}\,; \quad \gamma = \frac{-2UV^{03}}{\sigma(V^{01} - U^{10})^2}\,;$$

$$\sigma(V^{01} - U^{10})^2 = 2(UU^{20} - VV^{02}) - \overline{U^{10^2}} + \overline{V^{01^2}}),$$

$$\beta = -\frac{vU^{30}}{\sigma}\,; \quad \gamma = -\frac{uV^{03}}{\sigma}\,; \quad (\sigma = uU^{20} + vV^{02} - U^{10} - V^{01}),$$

$$\beta = -\frac{U^{30}}{\sigma}\,; \quad \gamma = -\frac{V^{03}}{\sigma}\,; \quad (\sigma = U^{20} + V^{02}),$$

U et V étant des fonctions arbitraires respectivement de u et v, avec la réserve que ni U ni V ne soient pas de polynômes du second degré. Ajoutons encore l'observation de O. Rozet et N. Legrain, qu'une surface (x) de la troisième espèce ne peut pas être transformée par une congruence W en une quadrique.

Dans [4] nous avons demontré que ce résultat de O. Rozet et N. Legrain résulte immédiatement de certains résultats dus à Fubini-Čech, étant donné que les surfaces qui d'après [3] sont des surfaces de Terracini de troisième espèce appartiennent au cas limite des surfaces de Tzitzéica-Wilczynski [2]. De (I_3) et (11) il résulte que les images de toutes les surfaces-limite de Tzitzéica-Wilczynski sur l'hyperquadrique de Klein de S_5 sont des congruences C_0 avec une seule ou avec ∞^1 paires de réseaux Γ_0.

En posant

$$(14') \qquad U^{20} = cF + c_1\,; \quad V^{02} = c\Psi - c_1\,,$$

et en tenant compte de (12), il résulte que les surfaces déterminées par (11) sont projectivement appliquables, respectivement projectives-similaires avec les surfaces-limite de Tzitzéica-Wilczynski. De (I) on déduit de même que les images sur la variété quadratique V_4^2 des surfaces de deuxième espèce avec

$$(15) \qquad U^{20} = c\log u + c_1\,; \quad V^{02} = \mp\, c\log v \mp c_1\,,$$

$$F = -\frac{C^*}{u}\,; \qquad = \pm\frac{C^*}{v}$$

et seulement dans ce cas sont des congruences C_0.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier s'il existe aussi quelques classes de surfaces de première espèce dont l'image sur l'hyperquadrique de Klein soit aussi des congruences C_0. Nous avons donc le

Théorème. *En dehors de quelques classes de surfaces de deuxième et peut-être de première espèce, les images sur l'hyperquadrique de Klein de toutes les surfaces de Terracini qui appartiennent au cas-limite de Tzitzéica-Wilczynski ou sont projectivement applicables ou projectives-similaires avec ces surfaces, sont des congruences* C_0.

2. Montrons maintenant qu'une surface de troisième espèce ne peut pas être projectivement applicable avec une surface de première ou de deuxième espèce de Terracini. En effet, dans le premier cas il résulterait [3]

$$(U + V)(U^{20} + V^{02}) = 0 \tag{17}$$

et dans le deuxième cas

$$(u - v)(V^{02} - U^{20}) = 0\,. \tag{18}$$

Mais ces relations doivent être exclues d'après la réserve faite sur les fonctions U et V.

Par conséquent, de (14′) et (12) il résulte que la représentation paramétrique des surfaces de troisième espèce donnée en [3] ne contient pas, au moins, toutes les surfaces de troisième espèce de Terracini, car les surfaces déterminées par (11) et (12) dépendent encore de 3 constantes arbitraires.

Mais cela n'est pas tout, car nous montrerons qu'il existe des surfaces projectivement applicables avec les surfaces limite de Tzitzéica-Wilczynski représentées paramétriquement dans [3] et qui, d'après l'observation du commencement de ce paragraphe, sont aussi des surfaces de troisième espèce, peuvent être, contrairement à la conclusion faite en [3], transformées par congruences W en quadriques.

Pour la démonstration nous nous servirons de la méthode de Fubini pour l'étude des congruences W.

Soit

$$\frac{\mathrm{d}u}{A} = \frac{\mathrm{d}v}{B} \tag{19}$$

l'équation d'une famille de développables d'une congruence W ayant pour la première nappe focale une des surfaces déterminées par (11) et (12). Alors A et B est une solution du système

$$A_v + B = 0\,; \quad B_u + A = 0\,. \tag{20}$$

Supposons que la deuxième nappe focale de la congruence est une quadrique. Alors [2]

$$\beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N}\,; \quad \gamma = -\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}\,, \tag{21}$$

N étant une solution de l'équation en N de Fubini [2]

$$N_{uv} + \frac{A}{B} \beta N_v + \frac{B}{A} \gamma N_u = 0 , \tag{22}$$

et vérifiant aussi la condition [2]

$$N = (2BB_{vv} + 2B^2M - B_v^2) - (2AA_{uu} + 2A^2L - A_u^2) . \tag{23}$$

De (20) et (21) il résulte

$$\frac{A_v}{A} = \frac{N_v}{N} ; \quad \frac{B_u}{B} = \frac{N_u}{N} . \tag{24}$$

De même, de (20), (24) et (22) on déduit

$$(\log N)_{uv} = (\log N)_u (\log N)_v . \tag{25}$$

Donc

$$N = \frac{1}{F_1(u) + \Psi_1(v)} . \tag{26}$$

Considérons le cas où $F_1(u) = F(u)$ et $\Psi_1(v) = \Psi(v)$. Dans ce cas, de (24) nous aurons

$$A = \frac{U}{F + \Psi} ; \quad B = \frac{V}{F + \Psi} , \tag{27}$$

et de (20) et (11) il résulte $U = V = -a$ (a = const. que l'on peut rendre égale à 1). Donc

$$A = B = \frac{1}{F + \Psi} . \tag{28}$$

En introduisant dans la condition (23) les expressions trouvées de N, A, B, et les valeurs (12) de L et M, on trouve

$$C = 0 , \quad C_1 = -\tfrac{1}{2} \tag{29}$$

et les surfaces correspondantes dépendent, en dehors de deux fonctions arbitraires d'un argument, d'une seule constante et admettent ∞^1 déformations projectives. Nous avons donc le

Théorème. *Il existe des surfaces de troisième espèce de Terracini qui peuvent être transformées par congruences W en quadriques. Elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument et d'une constante.*

Bibliographie

[1] *B. Segre:* Sulle congruenze di rette che ammettono reti conjugate ad invarianti uguali. Memoire della Accad. d'Italia, Vol. 1930.
[2] *G. Fubini-E. Čech:* Geometria proiettiva differenziale. N. Zanichelli, Bologna 1926.
[3] *O. Rozet-N. Legrain-Pissard:* Sur le congruences *W* dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotes de deux familles dans des complexes linéaires. Bulletin de la Société Royale de Sciences de Liège, *23*, 1954, 280—296.
[4] *F. Marcus:* Sur les surfaces de troisième espèce de Terracini. Czeckoslovak Mathematical Journal, *6* (*81*), Praga 1956, 559—562.

Резюме

ЕЩЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ ТЕРРАЧИНИ ТРЕТЬЕГО РОДА

ФРОИМ МАРКУС (Froim Marcus), Яссы

Конгруэнция L в проективном пространстве P_n называется конгруэнцией C_0, если она допускает сопряженную сеть с нулевыми значениями инвариантов; см. [1]. В работе показано, что клейновские образы всех поверхностей Террачини третьего рода являются квадратическими конгруэнциями типа C_0. Показано, что параметрическое представление поверхностей третьего рода, приведенное в [3], не является полным, так как содержит лишь предельные поверхности поверхностей Цицейка-Вильчинского. В заключение доказывается, что существуют поверхности Террачини третьего порядка, которые можно с помощью конгруэнций W преобразовать в поверхности второго порядка; этим самым опровергается одно утверждение из [3].