Miloslav Jůza

Les monosystèmes d'espaces projectifs dont les lignes asymptotiques sont des droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 4, 582–592

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100641

Чехословацкий математический журнал т. 14 (89) 1964, Прага

LES MONOSYSTÈMES D'ESPACES PROJECTIFS DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SONT DES DROITES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 5 septembre 1963)

Dans ce travail on étudie un type spécial de systèmes à un paramètre d'espaces projectifs à n dimensions qui est une généralisation à plusieurs dimensions de demiquadriques.

1. Nous étudierons, dans un espace projectif S_{2n+1} de dimension $2n + 1$, ses sousespaces S_n à n dimensions. Si nous déterminons ces sousespaces à l'aide de leurs coordonnées de Grassman, nous pourrons les considérer comme des points d'un espace projectif P_N de dimension $N = \binom{2n+2}{n+1} - 1$. Si $y_0, y_1, \ldots, y_{2n+1}$ est une base de l'espace S_{2n+1}, les espaces $[y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}]$ avec $i_0 < i_1 < \ldots i_n$ forment une base de l'espace P_N.

Dans l'espace S_{2n+1} ayons les courbes $x_0(t), \ldots, x_n(t)$. Le système des espaces $S_n(t) = [x_0(t), \ldots, x_n(t)]$ pour les valeurs de t prises dans un certain intervalle sera appelé monosystéme (voir [2], [3]). Supposons que le monosystème $[x_0(t), \ldots, x_n(t)]$ soit non développable, c'est-à-dire tel que nous ayons

$$(1) \qquad [x_0(t), \ldots, x_n(t), x_0'(t), \ldots, x_n'(t)] \neq 0$$

pour tout t. Les espaces générateurs $S_n(t)$ du monosystème forment une courbe dans l'espace P_N. Nous chercherons les conditions sous lesquelles cette courbe est située dans un sousespace P_M de l'espace P_N, de dimension M inférieure à N (pour $n = 1$ voir [1], par. 125–131.)

2. Posons

$$S^{i_0, i_1, \ldots, i_\lambda}_{i_{\lambda+1}, \ldots, i_n}(t) = [x'_{i_0}(t), \ldots, x'_{i_\lambda}(t), x_{i_{\lambda+1}}(t), \ldots, x_{i_n}(t)] .$$

Alors les

$$S^{i_0, \ldots, i_\iota, i_{\iota+1}, \ldots, i_\lambda}_{i_0, \ldots, i_\iota, i_{\lambda+\iota+2}, \ldots, i_n}(t) \quad \text{pour} \quad -1 \leqq \iota \leqq \tfrac{1}{2}n, \ \iota \leqq \lambda \leqq n$$

où les nombres $i_0, \ldots, i_\iota, i_{\iota+1}, \ldots, i_\lambda, i_{\lambda+\iota+2}, \ldots, i_n$ sont tous différents et $i_0 < \ldots < i_\iota$, $i_{\iota+1} < \ldots < i_\lambda$, $i_{\lambda+\iota+2} < \ldots < i_n$, forment (pour t fixé) une base de l'espace P_N.

Nous dirons que le point $S^{i_0,\ldots,i_\iota,i_{\iota+1},\ldots,i_\lambda}_{i_0,\ldots,i_\iota,i_{\lambda+\iota+2},\ldots,i_n}$ de cette base de l'espace P_N est du type R_ω, lorsque $\lambda = \omega$, $\iota = -1$, et qu'il est du type N_ω, lorsque $\lambda \leqq \omega$. Le symbole $\sum(R_\omega)$ ou $\sum(N_\omega)$ désignera une combinaison linéaire d'espaces du type R_ω, ou N_ω respectivement.

Nous introduisons encore la notation suivante:

Lorsque $i_0, \ldots, i_k$ sont des entiers, le nombre

$$\operatorname{sgn} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\mu=0}^{\lambda-1} (i_\lambda - i_\mu)$$

sera désigné par $\operatorname{sgn}(i_0, \ldots, i_k)$. Ensuite, le symbole

$$\sum_{(i_0,\ldots,i_n)}$$

dénotera la sommation étendue à toutes les permutations $i_0, i_1, \ldots, i_n$ des nombres $0, 1, \ldots, n$.

Ayons donc danc l'espace S_{2n+1} un monosystème non développable, formé des espaces $S_n(t) = [x_0(t), \ldots, x_n(t)]$. Nous pouvons choisir les courbes directrices d'une telle manière (voir [2], § 4) que le système suivant d'équations différentielles soit vérifié:

$$x_i'' = \sum_{j=0}^{n} a_i^j x_j\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Les courbes $x_0(t), \ldots, x_n(t)$ choisies de cette façon déterminent pour chaque t une base de l'espace P_N, décrite ci-dessus. Pour la dérivée (par rapport à t) de cette base nous trouvons immédiatement que pour $-1 \leqq \omega \leqq n$ nous avons (en posant $\sum(R_{n+1}) = 0$):

$$(\textstyle\sum(R_\omega))' = \sum(R_{\omega+1}) + \sum(N_{\omega-1})\,, \tag{3}$$

$$(\textstyle\sum(N_\omega))' = \sum(N_{\omega+1})\,. \tag{4}$$

Ensuite, nous avons pour $0 \leqq k \leqq n$ (en posant $S^{i_0,\ldots,i_{n+1}} = 0$)

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<i_1<\ldots<i_k\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} S^{i_0,\ldots,i_k}_{i_{k+1},\ldots,i_n}(-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k, i_{k-1}, \ldots, i_0)\Big)' = \\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}]'\,(-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k. \ldots, i_0) = \\
&= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}]\,(-1)^{i_0+\ldots+k+1}\operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) + \\
&\quad + \frac{(k+1)}{(k+1)!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k-1}}, \sum_{\lambda=0}^{n} a^\lambda_{i_k} x_\lambda, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}]\,. \\
&\qquad .(-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k, \ldots, i_0) =
\end{aligned} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} [x'_{i_0}, \dots, x'_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \dots, i_0) +$$

$$+ \frac{k(k+1)}{(k+1)!} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_s}[x'_{i_0}, \dots, x'_{i_{k-1}}, x_{i_0}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\dots+i_k} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_k, \dots, i_0) +$$

$$+ \sum (R_{k-1}) = (k+2) \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_0<\dots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} S^{i_0,\dots,i_{k+1}}_{i_{k+2},\dots,i_n}(-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \dots, i_0) +$$

$$+ \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-1}\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_k} S^{i_0,\dots,i_{k-1}}_{i_0,i_{k+1},\dots,i_n}(-1)^{i_0+\dots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k, \dots, i_0) + \sum (R_{k-1})$$

et pour $1 \leqq k < n$ nous avons

$$(6) \qquad \Big(\sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-1}\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_k} S^{i_0,\dots,i_{k-1}}_{i_0,i_{k+1},\dots,i_n} (-1)^{i_0+\dots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k, \dots, i_0)\Big)' =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_k}[x'_{i_0}, \dots, x'_{i_{k-1}}, x_{i_0}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}]' (-1)^{i_0+\dots+i_k} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_k, \dots, i_0) + \sum (N_{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_k}[x'_{i_0}, \dots, x'_{i_{k-1}}, x'_{i_{k+1}}, x_{i_0}, x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}+1} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \dots, i_0) + \sum (N_{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_{k+1}}[x'_{i_0}, \dots, x'_{i_k}, x_{i_0}, x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \dots, i_0) + \sum (N_{k-1}) =$$

$$= k \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_k\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} a^{i_0}_{i_{k+1}} S^{i_0,\dots,i_k}_{i_0,i_{k+2},\dots,i_n} (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \dots, i_0) + \sum (N_{k-1}) .$$

Nous introduisons la notation $S_n = [x_0, \dots, x_n]$. Alors, en posant de nouveau $S^{i_0,\dots,i_{n+1}} = 0$, nous trouvons

$$(7) \qquad S'_n = \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_n}} S^{i_0}_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{i_0} ,$$

$$S''_n = 2 \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_2<\dots<i_n}} S^{i_0 i_1}_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{i_0+i_1} \operatorname{sgn}(i_1, i_0) + \sum (R_{-1}) ,$$

$$S^{(k+1)}_n = (k+1)! \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_0<\dots<i_k\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} S^{i_0,\dots,i_{k-2}}_{i_0,i_k,\dots,i_n} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1}, \dots, i_0) +$$

$$+ C_k \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-2}\\ i_k<\dots<i_n}} a_{i_{k-1}}^{i_0} S_{i_0,i_k,\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-2}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1},\dots,i_0) + \sum(R_{k-2}) + \sum(N_{k-3}),$$

où $k = 2, \dots, n+1$, C_k sont des constantes positives.

Démonstration. Les formules pour S_n' et S_n'' sont faciles à déduire par différentiation directe de S_n. Nous obtenons la formule pour $S_n^{(k+1)}$, $k = 2$ à partir de la formule pour S_n'', d'après (5). Pour les autres k, la formule se démontre par récurrence. Supposons donc les relations (7) remplies pour un certain k, $2 \leqq k \leqq n$, $C_k > 0$. Alors d'après (3)–(6) nous avons

$$S_n^{(k+2)} = (S_n^{(k+1)})' = (k+1)! \{(k+2) \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_0<\dots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} S_{i_{k+2},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k+1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_{k+1},\dots,i_0) + \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-1}\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a_{i_k}^{i_0} S_{i_0,i_{k+1},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k,\dots,i_0)\} +$$

$$+ C_k(k-1) \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-1}\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a_{i_k}^{i_0} S_{i_0,i_{k+1},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k,\dots,i_0) +$$

$$+ \sum(R_{k-1}) + \sum(N_{k-2}) =$$

$$= (k+2)! \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_0<\dots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\dots<i_n}} S_{i_{k+2},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k+1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1},\dots,i_0) +$$

$$+ \{(k+1)! + (k-1) C_k\} \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\\ i_1<\dots<i_{k-1}\\ i_{k+1}<\dots<i_n}} a_{i_k}^{i_0} S_{i_0,i_{k+1},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_k} .$$

$$. \operatorname{sgn}(i_k,\dots,i_0) + \sum(R_{k-1}) + \sum(N_{k-2}),$$

de sorte que (7) a lieu pour $k+1$ aussi, avec

$$C_{k+1} = (k+1)! + (k-1) C_k > 0 .$$

3. Dans la matrice des coordonnées de $(S_n, S_n', S_n'', \dots, S_n^{(n+1)})$ (pour la base de l'espace P_N décrite au début du paragraphe 2) considérons le déterminant formé par les colonnes des coefficients de $S_{0,1,\dots,n}$, $S_{1,2,\dots,n}^0$, $S_{2,3,\dots,n}^{0,1}$, $\dots$, $S^{0,1,\dots,n}$. Dans ce déterminant de degré $n+2$, les éléments au dessus de la diagonale principale sont nuls, tandis que la diagonale est composée de nombres dont les valeurs absolues sont

$$1, 1!, 2!, 3!, \dots, (n+1)! .$$

Donc, le déterminant est différent de zéro, ce qui signifie que les points S_n, S_n', $\dots$, $\dots$, $S_n^{(n+1)}$ du monosystème non développable sont toujours linéairement indépendants. Le monosystème non développable ne se trouve donc dans aucun sousespace P_n à n dimensions de l'espace P_N.

4. Nous allons trouver les conditions auquelles doivent satisfaire les a_i^j de (2), pour que le monosystème soit contenu dans un sousespace P_{n+1} à $n + 1$ dimensions de l'espace P_N. Un tel monosystème sera appelé psuedodemiquadrique.

Dans ce but, considérons dans la matrice des coordonnées $(S_n, S'_n, S''_n, \ldots, S_n^{(n+2)})$ les déterminants formés par les colonnes des coefficients de $S_{0,1,\ldots,n}, S^0_{1,2,\ldots,n}, S^{0,1}_{2,3,\ldots,n}, \ldots, \ldots, S^{0,1,\ldots,n}, S^{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}_{i_0}$, où les nombres $i_0, \ldots, i_n$ sont tous différents et $i_1 < i_2 < < \ldots < i_{n-1}$. Dans chaque déterminant ainsi obtenu, les éléments au dessus de la diagonale sont nuls et la diagonale est composée de nombres dont les valeurs absolues sont

$$1, 1!, 2!, 3!, \ldots, (n + 1)!\,, \quad |C_{n+1}a^{i_0}_{i_n}|\,.$$

Tous ces déterminants peuvent donc s'annuler simultanément seulement si $a^i_j = 0$ pour $i \neq j$. Nous obtenons ainsi une condition nécessaire pour que le monosystème considéré soit une pseudodemiquadrique.

Donc, si le monosystème est une pseudodemiquadrique, le système d'équations (2) doit être de la forme

$$x''_i = a_i x_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Or, les fonctions a_i ne peuvent pas être arbitraires; elles doivent satisfaire à d'autres conditions encore. Nous allons déduire maintenant ces conditions.

Si nous posons de nouveau $S^{i_0,\ldots,i_{n+1}} = 0$, alors d'après (8) nous avons pour $0 \leqq k \leqq n$

$$\Big(\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_k\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} S^{i_0,\ldots,i_k}_{i_{k+1},\ldots,i_n}(-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k,\ldots,i_0)\Big)' = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_k)\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} [x'_{i_0},\ldots,x'_{i_k},x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_n}]'(-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k,\ldots,i_0) =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_k)\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} [x'_{i_0},\ldots,x'_{i_{k+1}},x_{i_{k+2}},\ldots,x_{i_n}](-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}}\operatorname{sgn}(i_{k+1},\ldots,i_0) +$$

$$+ \frac{1}{k!}\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} a_{i_k}[x'_{i_0},\ldots,x'_{i_{k-1}},x_{i_k},x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_n}](-1)^{i_0+\ldots+i_k}\operatorname{sgn}(i_k,\ldots,i_0) =$$

$$= (k+2)\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} S^{i_0,\ldots,i_{k+1}}_{i_{k+2},\ldots,i_n}(-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}}\operatorname{sgn}(i_{k+1},\ldots,i_0) +$$

$$+ \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k-1}\\ i_k<\ldots<i_n}} (a_{i_k}+\ldots+a_{i_n})\,S^{i_0,\ldots,i_{k-1}}_{i_k,\ldots,i_n}(-1)^{i_0+\ldots+i_{k-1}}\operatorname{sgn}(i_{k-1},\ldots,i_0)$$

et ensuite pour $-1 \leqq k < n$

$$(10)\quad \Big(\sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_k\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} (a_{i_{k+1}} + \ldots + a_{i_n})\, S^{i_0,\ldots,i_k}_{i_{k+1},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k, \ldots, i_0)\Big)' =$$

$$= \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_k\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} a_{i_{k+1}}[x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_n] (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) +$$

$$+ \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_k\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} (a_{i_{k+2}} + \ldots + a_{i_n}) [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) + \sum(N_k) =$$

$$= \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} (a_{i_0} + \ldots + a_{i_{k+1}}) [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) +$$

$$+ (k+2) \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} (a_{i_{k+2}} + \ldots + a_{i_n}) [x'_{i_0}, \ldots, x'_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}] (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) + \sum(N_k) =$$

$$= \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} (a_0 + \ldots + a_n)\, S^{i_0,\ldots,i_{k+1}}_{i_{k+2},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) +$$

$$+ (k+1) \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k+1}\\ i_{k+2}<\ldots<i_n}} (a_{i_{k+2}} + \ldots + a_{i_n})\, S^{i_0,\ldots,i_{k+1}}_{i_{k+2},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_{k+1}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(i_{k+1}, \ldots, i_0) + \sum(N_k).$$

En introduisant, une fois de plus, la notation

$$S_n = [x_0, \ldots, x_n] = \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_n}} [x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}],$$

nous aurons

$$(11)\qquad S'_n = \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_1<\ldots<i_n}} S^{i_0}_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{i_0},$$

$$S^{(k+1)}_n = (k+1)! \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_k\\ i_{k+1}<\ldots<i_n}} S^{i_0,\ldots,i_k}_{i_{k+1},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_k} \operatorname{sgn}(i_k, \ldots, i_0) +$$

$$+ C_k \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k-2}\\ i_{k-1}<\ldots<i_n}} (a_{i_{k-1}} + \ldots + a_{i_n})\, S^{i_0,\ldots,i_{k-2}}_{i_{k-1},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_{k-2}} \operatorname{sgn}(i_{k-2}, \ldots, i_0) +$$

$$+ D_k \sum_{\substack{(i_0,\ldots,i_n)\\ i_0<\ldots<i_{k-2}\\ i_{k-1}<\ldots<i_n}} (a_0 + \ldots + a_n)\, S^{i_0,\ldots,i_{k-2}}_{i_{k-1},\ldots,i_n} (-1)^{i_0+\ldots+i_{k-2}} \operatorname{sgn}(i_{k-2}, \ldots, i_0) +$$

$$+ \sum(N_{k-3}), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1$$

où $C_0 = D_0 = 0$ et

$$(12) \quad C_{k+1} = (k+1)! + (k-1)\,C_k, \ D_{k+1} = C_k + kD_k\,, \quad k = 0, \dots, n+1\,.$$

Démonstration. Nous déduisons les formules pour S_n' et S_n'' par différentiation directe de S_n. Pour les autres k, la formule sera démontrée par récurrence. Supposons donc que (11) a lieu pour un certain $k(1 \leqq k \leqq n)$, où C_k, D_k sont donnés par les formules (12). Alors en vertu de (4), (9) et (10) nous avons

$$S_n^{(k+2)} = (S_n^{(k+1)})' = (k+2)! \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0<\dots<i_{k+1} \\ i_{k+2}<\dots<i_n}} S_{i_{k+2},\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k+1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k+1}} \operatorname{sgn}(i_{k+1},\dots,i_0) +$$

$$+ (k+1)! \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0<\dots<i_{k-1} \\ i_k<\dots<i_n}} (a_{i_k} + \dots + a_{i_n})\, S_{i_k,\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1},\dots,i_0) +$$

$$+ C_k \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0<\dots<i_{k-1} \\ i_{k+1}<\dots<i_n}} (a_0 + \dots + a_n)\, S_{i_k,\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1},\dots,i_0) +$$

$$+ (k-1)\,C_k \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0<\dots<i_{k-1} \\ i_k<\dots<i_n}} (a_{i_k} + \dots + a_{i_n})\, S_{i_k,\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1},\dots,i_0) +$$

$$+ kD_k \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0<\dots<i_{k-1} \\ i_k<\dots<i_n}} (a_0 + \dots + a_n)\, S_{i_k,\dots,i_n}^{i_0,\dots,i_{k-1}} (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} \operatorname{sgn}(i_{k-1},\dots,i_0) + \sum (N_{k-2})\,.$$

Une modification facile donne alors les formules (11) et (12) pour $S_n^{(k+2)}$.

Dans la matrice des coordonnées de $(S_n, S_n', \dots, S_n^{(n+2)})$, considérons maintenant les déterminants formés par les colonnes des coefficients de $S_{0,1,\dots,n}$, $S_{1,2,\dots,n}^{0}$, $S_{2,3,\dots,n}^{0,1}$, …, …, $S_{n-1,n}^{n,1,\dots,n-2}$, $S^{0,1,\dots,n}$, $S_j^{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,n}$, $S_i^{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$ (avec $i \neq j$). Ces déterminants ont la forme suivante

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1! & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2! & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & (n-1)! & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & (n+1)! & 0 & 0 \\
 & & & & & & \varepsilon_j n! & \varepsilon_i n! \\
 & & & & & & \varepsilon_j B_j & \varepsilon_i B_i
\end{vmatrix}$$

où

$$B_\iota = C_{n+1} a_\iota + D_{n+1}(a_0 + \dots + a_n)\,,$$

$$\varepsilon_\iota = \operatorname{sgn}(n, \dots, \iota+1, \iota-1, \dots, 0)\,(-1)^{n+\dots+(\iota+1)+(\iota-1)+\dots+0}\,,$$

les cases vides étant remplies par des éléments qui ne nous intéressent pas. Pour qu'un tel déterminant s'annule, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_j n! & \varepsilon_i n! \\ \varepsilon_j B_j & \varepsilon_i B_i \end{vmatrix} = 0\,,$$

ce qui peut arriver seulement si $B_i = B_j$, c'est-à-dire si $a_i = a_j$.

Donc, pour que le monosystème donné par le système d'équations différentielles (2) soit une pseudodemiquadrique, il faut que le système (2) soit de la forme

$$x_i'' = a x_i\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \tag{13}$$

Mais si les courbes directrices du monosystème vérifient les équations différentielle (13), alors en introduisant un nouveau paramètre u et de nouvelles courbes directrices $y_i(u)$ par la relation

$$y_i(u) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^{-\frac{1}{2}} x_i(t(u))$$

où la fonction $t(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}u^3} = 2a(t(u)) \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^3 + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}u^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^{-1}\right]$$

avec $\mathrm{d}t/\mathrm{d}u > 0$, nous trouvons que les nouvelles courbes directrices vérifient

$$y_i'' = 0\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \tag{14}$$

Or, un monosystème pour lequel (14) a lieu, est une pseudodemiquadrique, car alors $S_n^{n+2} = 0$. Nous avons donc déduit le théorème que voici:

Pour que le monosystème donné soit une pseudodemiquadrique, il faut et il suffit que son système normalisé de courbes directrices asymptotiques (voir [2], § 4) *vérifie les équations différentielles* (13). *Pour un choix convenable du paramètre, il est alors possible d'obtenir même* (14).

5. Considérons maintenant à nouveau un monosystème non développable général, donné par le système de courbes directrices asymptotiques $x_0(t), \ldots, x_n(t)$ et supposons celles-ci normalisées, ce qui veut dire que

$$[x_0, \ldots, x_n, x_0', \ldots, x_n'] = \pm 1 \tag{15}$$

a lieu et le système d'équations différentielles (2) est bien vérifié. Les courbes asymptotiques de notre monosystème, ce seront alors toutes les courbes (et elles seulement) qui sont de la forme

$$x = \sum_{\alpha=0}^{n} v^\alpha x_\alpha\,, \tag{16}$$

es rapports des fonctions v^α étant indépendants de t (voir [2], § 3). Nous pouvons prendre v^α constantes.

Pour qu'une courbe asymptotique (16) ait un point d'inflexion, il faut et il suffit que l'on ait en ce point $[x'', x', x] = 0$, c'est-à-dire d'après (2):

$$[\sum_{\alpha=0}^{n} v^\alpha x''_\alpha, \sum_{\beta=0}^{n} v^\beta x'_\beta, \sum_{\gamma=0}^{n} v^\gamma x_\gamma] = [\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} v^\alpha a_\alpha^j x_j, \sum_{\beta=0}^{n} v^\beta x'_\beta, \sum_{\gamma=0}^{n} v^\gamma x_\gamma] =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,j=0}^{n} v^\alpha v^\beta v^\gamma a_\alpha^j [x_j, x'_\beta, x_\gamma] =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,j=0}^{n} \sum_{\gamma=j+1}^{n} v^\beta (v^\alpha a_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha a_\alpha^j v^j) [x_j, x'_\beta, x_\gamma] = 0 .$$

Or tous les plans $[x_j, x'_\beta, x_\gamma]$, $j < \gamma$, sont linéairement indépendants. Cela signifie que tous les coefficients de cette combinaison linéaire doivent être nuls. Comme un au moins des v^β est différent de zéro, il faut et il suffit que nous ayons

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha a_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha a_\alpha^\gamma v^j) = 0 \quad \text{pour} \quad j, \gamma = 0, 1, \ldots, n . \tag{17}$$

En posant

$$j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i^i , \quad c_i^j = a_i^j - j\delta_i^j \tag{18}$$

(voir [2], § 7), nous obtenons

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha a_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha a_\alpha^\gamma v^j) = \sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha c_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha c_\alpha^\gamma v^j) +$$

$$+ j \sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha \delta_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha \delta_\alpha^\gamma v^j) = \sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha c_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha c_\alpha^\gamma v^j) .$$

Nous voyons donc que (17) équivaut à

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (v^\alpha c_\alpha^j v^\gamma - v^\alpha c_\alpha^\gamma v^j) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma, j = 0, 1, \ldots, n . \tag{19}$$

La condition (18) signifie d'après [2], § 9, que les points d'inflexion des courbes asymptotiques sont précisément les points flecnodaux (c'est-à-dire les points où les courbes asymptotiques ont un contact du troisième ordre avec l'espace tangent). Il en résulte aisément que la courbe asymptotique est droite si et seulement si elle est une courbe flecnodale. Comme toute droite sur le monosystème est une ligne asymptotique, nous voyons aussi, que la ligne flecnodale est droite si et seulement si elle est asymptotique.

6. Pour que toutes les lignes asymptotiques du monosystème soient droite, il faut et il suffit que tout point du monosystème soit flecnodal. Cela a lieu (voir [2], § 9) si et seulement si la matrice (c_i^j) est nulle pour tout t. D'après (18), cela signifie qu'il existe une fonction $a(t)$ telle que $a_i^j(t) = a(t)\,\delta_i^j$, donc que le système (2) a la forme $x_i'' = ax_i$, $i = 0, \ldots, n$. En le comparant avec (13), nous voyons que toutes les lignes asymptotiques du monosystème sont droites si et seulement si le monosystème est une pseudodemiquadrique.

Dans l'espace S_{2n+1} ayons $n + 1$ droites $[X_0, Y_0], [X_1, Y_1], \ldots, [X_n, Y_n]$. Nous dirons que ces droites se trouvent en position générale, lorsque $[X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] \neq 0$.

En intégrant le système (14) d'une pseudodemiquadrique nous trouvons que la pseudodemiquadrique est formée des espaces

$$S_n(t) = [x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)]\,, \tag{20}$$

avec

$$x_i(t) = X_i + tY_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{21}$$

où X_i, Y_i sont des points de S_{2n+1}, indépendants de t. D'après (1), les droites $x_0(t), \ldots, \ldots, x_n(t)$ se trouvent en position générale. Les points d'intersection des droites $x_0(t), \ldots, x_n(t)$ avec les espaces générateurs définissent une correspondance entre les points des droites $x_0(t), \ldots, x_n(t)$. On voit que cette correspondace est une projectivité.

Ayons maintenant, dans l'espace S_{2n+1}, $n + 1$ droites $x_0, \ldots, x_n$ en position générale et une correspondance existant entre elles, qui est une projectivité pour chaque paire de ces droites. Si nous joignons toujours par un espace S_n les points associés par cette correspondance, nous obtenons un monosystème dont les courbes directrices sont $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sur chacune des droites x_i nous pouvons choisir deux points X_i, Y_i d'une telle façon que (21) ait lieu et que les points associés correspondent à une même valeur de t. Alors pour les espaces générateurs $S_n(t)$ de notre monosystème nous avons (20) avec

$$x_i''(t) = 0\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Le monosystème est donc une pseudodemiquadrique.

Nous avons constaté que toute pseudodemiquadrique dans l'espace S_{2n+1} peut être définie à l'aide de (20) et (21) où les points X_i, Y_i ne dépendent pas de t et $[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n] \neq 0$. Mais il est toujours possible de transformer un tel groupe de points en n'importe quel autre par une homographie. Il en résulte que toutes deux pseudodemiquadriques de l'espace S_{2n+1} peuvent être transformées l'une dans l'autre par une homographie.

Littérature

[1] *E. Čech:* Projektivní diferenciální geometrie. Praha 1926.

[2] *M. Jůza:* Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Czechoslovak Math. Journal *10* (1960), 440–456.

[3] *M. Jůza:* Jednoparametrické systémy rovin v prostoru S_6. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *13* (1963), 125–136.

Резюме

МОНОСИСТЕМЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПРЯМЫМИ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza) Прага

В прокетивном пространстве S_{2n+1} размерности $2n + 1$ мы рассматриваем подпространства S_n размерности n. Если эти подпространства определять их координатами Грассманна, то их можно считать точками проективного пространства P_N размерности $N = \binom{2n+2}{n+1} - 1$. Если в S_{2n+1} имеются кривые $x_0(t), \ldots, x_n(t)$, то систему пространств $S_n(t) = [x_0(t), \ldots, x_n(t)]$ для всех t из некоторого интервала мы назовем *моносистемой.* Каждую моносистему можно считать кривой пространства P_N. В случае неразвертывающейся моносистемы, т.е. если имеет место (1), эта кривая не лежит ни в одном подпространстве P_n размерности n пространства P_N. Существует (причем с точностью до коллинеаций единственная) неразвертывающаяся моносистема такая, что соответствующая ей кривая лежит в подпространстве размерности $n + 1$ пространства P_N. Эту моносистему мы назовем *псевдорегулом.*

В работе [2] были определены *асимптотические линии* моносистемы (как кривые на моносистеме, имеющие в каждой точке касание 2-го порядка с касательным пространством моносистемы в этой точке) и *флекнодальные точки* моносистемы (как точки, в которых асимптотические линии имеют с касательным пространством касание 3-го порядка). Показано, что флекнодальные точки можно также определить как точки перегиба асимптотических линий. Итак, асимптотическая линия будет прямой в точности тогда, когда она одновременно является флекнодальной линией. Псевдорегул — это единственная моносистема, все асимптотические линии которой являются прямыми.

Возьмем неразвертывающуюся моносистему, у которой $n + 1$ линейно независимых асимптотических линий являются прямыми, и определим соответствие между этими прямыми, при котором друг другу соответствуют точки пересечения с теми же самыми образующими пространствами. Моносистема будет псевдорегулом, если и только если это соответствие является проективным соответствием между каждыми двумя из этих прямых.