Czechoslovak Mathematical Journal

Miroslav Sova

Общая теория дифференцируемости в линейных топологических пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 4, 485–508

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100636

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *14* (*89*) ПРАГА 20 XI. 1964 г., No 4

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

МИРОСЛАВ СОВА (Miroslav Sova), Прага

(Поступило в редакцию 5/I 1961 г., переработанное 7/I 1963 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе пытается автор дать изложение систематической теории дифференциала функций „из векторов в вектор", причем области определения функций лежат в линейных топологических выпуклых пространствах Фреше (Frechét), области значений лежат в произвольном линейном топологическом выпуклом пространстве. Классификация дифференциалов произведена на основании того, на какой системе множеств сходятся разностные отношения равномерно. Потом мы говорим, например, о компактном дифференциале, ограниченном дифференциале (который в пространстве Банаха совпадает с классическим дифференциалом Фреше).

Оказывается, что существуют некоторые весьма естественные функции „из вектора в векторы", которые (в пространствах Гильберта) компактно дифференцируемы, но не ограниченно (в данном случае по Фреше) дифференцируемы.

Все введенные здесь дифференциалы имеют „классические" свойства:

1. Из дифференцируемости вытекает непрерывность функции (и наоборот: приведено, то есть, эквивалентное „внутреннее" определение дифференциала, где непрерывность служит одним из предположений);

2. в очень разумной форме справедливы теоремы о дифференциале сложных функций, о дифференциале произведения функций и о дифференциале предела (дифференцирование члена за членом).

В работе не изучается и даже не вводится т. наз. *дифференциал Гато* (Gateaux). Вместо этого вводим очень простым способом частную производную функции по некоторому направлению. Автору кажется упомянутый дифференциал лишним и вводящим в заблуждение понятием, потому что он не имеет практически никаких разумных свойств и никаким вообще образом не связан с топологией области определения функции. Кажется, что он имеет чисто вспомогательный характер и что совсем естественное понятие частной производной по данному направлению его вполне может наградить.

В настоящей работе дано определение и приведены основные свойства дифференциала в линейных топологических пространствах (в дальнейшем лин. топ. пр.). Более подробное исследование будет в следующей работе „Условия дифференцируемости в линейных топологических пространствах".

1. ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

1,0. Ориентация. В этой главе вводятся основные понятия теории линейных топологических пространств, линейных операторов и функций на этих пространствах. Общеизвестные утверждения приводим без доказательств или с краткими доказательствами.

1,1. Основные понятия и обозначения. 1,1,1. Некоторые основные обозначения. Символы $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$ означают всюду основные множественные операции, $\pm$ алгебраические операции. Символом $\{x\}$ означаем одноточечные множества с элементом x. Символом $\{x : x \text{ имеет свойство V}\}$ означаем множество всех элементов, обладающих свойством V. Если γ – какая-то система множеств, то через $\Pi(\gamma)$ обозначим систему всех последовательностей h_n, обладающих следующим свойством: существует $A \in \gamma$ так, что $h_n \in A$ для всех n. $\Pi(\gamma)$ мы назовем системой последовательностей над γ. Некоторую часть $\Delta \subseteq \Pi(\gamma)$ мы назовем базисом системы последовательностей над γ, если для каждого $h_n \in \Pi(\gamma)$ существует избранная из h_n последовательность h'_n такая, что $h'_n \in \Delta$. Если f означает какую-нибудь функцию (в смысле Бурбаки (Bourbaki), то через $\mathscr{D}(f)$ обозначим область определения и через $\mathscr{R}(f)$ область ее значений.

1,1,2. Линейные и топологические понятия употребляются здесь в смысле работ [1] и [2]. Вместо линейное топологическое локально выпуклое пространство мы будем говорить только линейное топологическое пространство – лин. топ. пр. – потому что пространства, которые не являются локально выпуклыми, в настоящей работе не встречаются. Все рассматриваемые пространства отделимы. Через R обозначено множество действительных чисел.

1,1,3. Пусть E – лин. топ. пр. Обозначим для некоторого множества $A \subseteq E$ символом co (A) минимальное выпуклое множество, которое содержит A. Это будут, как нетрудно показать, все элементы вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где $x_i \in A$, $\alpha_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Множество co (A) называем *выпуклой оболочкой* A.

1,1,4. Пусть E – лин. топ. пр. Тогда систему всех окрестностей нуля в E будем обозначать через $\mathfrak{V}(E)$, систему всех замкнутых выпуклых симметричных окрестностей нуля через $\mathfrak{V}_0(E)$. Легко видно, что для каждого $V \in \mathfrak{V}(E)$ существует $V_0 \in \mathfrak{V}_0(E)$ так, что $V_0 \subseteq V$. Следовательно, $\mathfrak{V}_0(E)$ образует базис в $\mathfrak{V}(E)$.

1,1,5. Пусть E – лин. топ. пр. Тогда $\mathfrak{V}(E)$ имеет следующие свойства:

1) $V \in \mathfrak{V}(E)$, $E \supseteq V' \supseteq V \Rightarrow V' \in \mathfrak{V}(E)$,

2) $V_1 V_2 \in \mathfrak{V}(E) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{V}(E)$,

3) $x \in E$, $x \neq 0 \Rightarrow$ существует $V \in \mathfrak{V}(E)$ так, что $x \notin V$.

4) $V \in \mathfrak{V}(E) \Rightarrow$ существует $V' \in \mathfrak{V}(E)$ так, что V' является симметричным выпуклым множеством и $V' \subseteq V$,

5) $x \in E$ и $V \in \mathfrak{V}(E) \Rightarrow$ существует $\alpha \geqq 0$ так, что $x \in \alpha V$.

1,1,6. Пусть E – линейное пространство и $\mathfrak{S}$ – какая-нибудь система подмножеств в E, обладающая свойствами 1)–5) из отдела 1,1,5. Тогда существует одно и только одно лин. топ. пр. на E, для которого $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}(E)$.

1,1,7. (Сходимость в лин. топ. пр.). Частично упорядоченное множество P мы назывем ориентированным, если для любых $\alpha, \beta \in P$ существует $\gamma \in P$ так, что $\gamma \geqq \alpha$, $\gamma \geqq \beta$. Отображение x_α ориентированного множества P в некоторое иное множество E мы называем обобщенной последовательностью в E. Примером ориентированного множества могут служить натуральные числа при обычном упорядочении или система $\mathfrak{V}(E)$, где $U_1 \leqq U_2$, когда $U_1 \supseteq U_2$. Если P – множество натуральных чисел, то мы говорим короче только о последовательности.

Пусть x_α, y_α – две обобщенные последовательности. Тогда мы скажем, что x_α выбрана из y_α, если существует отображение Φ множества P в P так, что $\Phi(\alpha) \geqq \alpha$, $x_\alpha = y_{\Phi(\alpha)}$.

Понятие фундаментальной обобщенной последовательности и сходимости ее вводится аналогичным способом, как у обыкновенной последовательности. При этом сильную сходимость (т. е. сходимость по топологии данново пространства E) обозначаем $x_\alpha \to x$, или, если это требуется для большей ясности, $x_\alpha \xrightarrow{s} x$, а слабую сходимость (по соответствующей слабой топологии) $x_\alpha \xrightarrow{w} x$.

1,1,8. Семифильтром $\mathfrak{F}$ мы назовем систему множеств, обладающую следующими свойствами:

1) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \neq \emptyset$,

2) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow$ существует $C \in \mathfrak{F}$ так, что $C \subseteq A \cap B$.

Замечание. Семифильтр имеет здесь то же самое значение, что базис фильтра в [1].

1,1,9. Пусть $\mathfrak{F}$ – семифильтр в лин. топ. пр. E. Мы скажем, что $\mathfrak{F}$ есть определяющий семифильтр в E, если он имеет следующие свойства:

1) для каждого $V \in \mathfrak{V}(E)$ существует $Z \in \mathfrak{F}$ так, что $Z \subseteq V$,

2) если W – какое-то симметричное выпуклое множество в E такое, что

α) для каждого $x \in E$ существует $\eta > 0$ так, что $|\lambda| \leqq \eta \Rightarrow \lambda x \in W$;

β) существует $Z \in \mathfrak{F}$ так, что $Z \subseteq W$,
то $W \in \mathfrak{V}(E)$;

3) для каждого $Z \in \mathfrak{F}$ существует выпуклое симметрическое $Z_0 \in \mathfrak{F}$ так, что $Z_0 \subseteq Z$.

Замечание. Очевидно, что $\mathfrak{V}(E)$ и $\mathfrak{V}_0(E)$ являются определяющими семифильтрами на E.

1,1,10. *Пусть E — лин. топ. пр., $\mathfrak{F}$ — некоторый определяющий семифильтр на E и M — линейное подпространство в E. Тогда $x \in \overline{M}$ в том и только в том случае, когда для каждого $Z \in \mathfrak{F}$: $(x + Z) \cap M \neq \emptyset$.*

Доказательство. A) $\Leftarrow$ Пусть для каждого $Z \in \mathfrak{F}$: $(x + Z) \cap M \neq \emptyset$; тогда $x \in \overline{M}$, так как в таком случае для каждого $V \in \mathfrak{V}(E) : (x + V) \cap M \neq \emptyset$.

B) $\Rightarrow$ Вступительное замечание. Пусть E — линейное пространство (в алгебраическом смысле) и E_1 — какое-нибудь его подпространство. Тогда существует подпространство E_2 так, что $E = E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. В дальнейшем мы два подпространства E_1, E_2 с такими свойствами называем прямым разложением пространства E и E_1 называем дополнением E_2 (или наоборот).

Пусть теперь $x \in \overline{M}$ и пусть существует выпуклое симметрическое $Z \in \mathfrak{F}$ так, что $(x + Z) \cap M = \emptyset$; это значит, что $Z \cap (M - x) = \emptyset$. Обозначим $M - x = \tilde{M}$. Имеем, следовательно, $Z \cap \tilde{M} = \emptyset$. Теперь покажем, что существует $V \in \mathfrak{V}(E)$ так, что $V \cap \tilde{M} = \emptyset$, что окажется в противоречии с предположением $x \in \overline{M}$.

Приступим к построению приводящей к противоречию окрестности V. Обозначим через $\hat{Z}$ наименьшее линейное подпространство, содержащее Z. Очевидно, $\hat{Z} = \{\lambda u : \lambda \in R,\ u \in Z\}$, что вытекает из выпуклости и симметричности. Итак, Z обладает свойством 2α из 1,1,9 по отношению к $\hat{Z}$.

Пусть $P_0 = \{\lambda x : \lambda \in R\}$ и пусть P_1 — наименьшее подпространство в E, которое содержит Z и $\{x\}$. Тогда или $P_1 = \hat{Z}$, или $P_1 = P_0 + \hat{Z}$ и $P_0 \cap \hat{Z} = \{0\}$.

Если $P_1 = \hat{Z}$, то мы положим $Z^* = Z$. Z^* имеет в таком случае свойства 2α, 2β по отношению к P_1 и $Z^* \cap \tilde{M} = \emptyset$.

Если $P_1 \neq \hat{Z}$, надо исследовать два случая. Сначала мы предположим, что $\hat{Z} \cap \tilde{M} = \emptyset$. Потом положим $Z^* = Z + \{\lambda x : |\lambda| < 1\}$. Легко видно, что Z^* опять-таки имеет свойства 2α, 2β по отношению к P_1, и остается доказать, что $Z^* \cap \tilde{M} = \emptyset$. Итак, пусть для некоторого $|\lambda| < 1$ и $u \in Z$ будет $\lambda x + u \in \tilde{M}$. Потому что $-x \in \tilde{M}$, должна прямая, проходящая через $-x$ и $\lambda x + u$, лежать целиком в $\tilde{M}$. Следовательно, для каждого $\mu \in R$ будет $-x + \mu(\lambda x + u + x) \in \tilde{M}$. Иначе говоря, для каждого $\mu \in R$ будет $(-1 + \mu\lambda + \mu)x + \mu u \in \tilde{M}$. Выберем $\mu = 1/(\lambda + 1)$, что возможно, так как $\lambda \neq -1$. Но тогда мы получим, что $\mu u \in \tilde{M}$ и $\mu u \in \hat{Z}$, что противоречит предположению, что $\tilde{M} \cap \hat{Z} = \emptyset$. Далее, пусть $\tilde{M}_0 = \tilde{M} \cap \hat{Z} \neq \emptyset$. Затем возьмем $u \in \tilde{M}_0$. Тогда $\hat{Z}$ и $\{\lambda(x + u) : \lambda \in R\}$ образуют опять пряцое разложение P_1, и можем взять в качестве $Z^* = Z + \{\lambda(x + u) : \lambda \in R\}$. Очевидно, что Z^* имеет тоже свойства 2α, 2β, и остается доказать, что $Z^* \cap \tilde{M} = \emptyset$. Пусть это неправда и пусть существует $w \in Z^*$, $w \in \tilde{M}$. Тогда $w = z + \lambda(x + u)$ для подходящих $\lambda \in R$, $z \in Z$. Так как $u \in \tilde{M}$, будет $x + u \in x + \tilde{M} = M$, $\lambda(x + u) \in M$ и, следовательно, $w - z \in M$, $z \in \in w - M = \tilde{M}$, что противоречит тому, что $Z \cap \tilde{M} = \emptyset$.

Итак, мы построили Z^*, обладающее свойствами 2α, 2β по отношению к P_1, причем $Z^* \cap \tilde{M} = \emptyset$. Пусть теперь $M_1 = P_1 \cap M$. Выберем какое-нибудь дополнение M_2 к M_1 в M и дополнение P_2 к P_1 в E, содержащее M_2. Такое дополнение P_2 всегда существует. Тогда $\tilde{M} = -x + M_1 + M_2 \subseteq -x + M_1 + P_2$. Далее очевидно, что $\tilde{M} \cap P_1 = -x + M_1$. Пусть теперь будет $Z^{**} = Z^* + P_2$. Легко можно обнаружить, что Z^{**} обладает свойствами 2α, 2β, и мы теперь докажем, что $Z^{**} \cap \tilde{M} = \emptyset$. Потому что $Z^* \cap \tilde{M} = \emptyset$, будет $Z^* \cap \tilde{M} \cap P_1 = \emptyset$ и, следовательно, также $Z^* \cap (-x + M_1) = \emptyset$; но тогда из прямоты разложения $E = P_1 + P_2$ вытекает $(Z^* + P_2) \cap (-x + M_1 + P_2) = \emptyset$ и, следовательно, $Z^{**} \cap \tilde{M} = \emptyset$, ч.т.д.

1,1,11. *Пусть E — лин. топ. пр. и $\mathfrak{F}$ — какой-нибудь определяющий семифильтр на E. Если M — линейное подпространство в E и $x \in \overline{M}$, то существует $x_\alpha \in M$ так, что для каждого $Z \in \mathfrak{F}$ существует α_0, для которого справедливо следующее: $\alpha \geqq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha - x \in Z$.*

1,1,12. Пространством Фреше (пр. Фр.) мы разумеем, согласно [2], лин. топ. пр., которое имеет счетный базис окрестностей нуля и является последовательностно полным (т.е. каждая фундаментальная последовательность имеет предел).

1,1,13. *Пусть D — пр. Фр. Тогда для каждой нулевой последовательности $x_n \in D$, $x_n \neq 0$ существует последовательность действительных чисел t_n такая, что $t_n > 0$, $t_n \to 0$, $x_n/t_n \to 0$.*

Доказательство. Пусть V_k — произвольная последовательность окрестностей нуля, которая симметрична, выпукла, замкнута и образует базис в $\mathfrak{B}(E)$. Каждой V_k поставим в соответствие полунорму $\|x\|_k = \inf\{\alpha : x \in \alpha V_k\}$. Легко можно обнаружить, что $\|x\|_k$ имеет, помимо прочего, следующие свойства:

1) $\|x\|_k \geqq 0$ для каждого $x \in D$,

2) $\|\alpha x\|_k = |\alpha| \, \|x\|_k$,

3) $\|x + y\|_k \leqq \|x\|_k + \|y\|_k$,

4) $x_n \to 0$ тогда и только тогда, если для каждого $k = 1, 2, \ldots$: $\|x_n\|_k \to 0$.

При помощи функций $\|x\|_k$ мы определим новую функцию

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k}.$$

Пусть $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Тогда тоже $x_n/\|x_n\|^{\frac{1}{2}} \to 0$. Если бы, то есть, $x_n/\|x_n\|^{\frac{1}{2}} \not\to 0$, то существовали бы числа k и $\varepsilon > 0$ так, что $\|x_n\|_k/\|x_n\|^{\frac{1}{2}} \geqq \varepsilon$ для некоторой частичной последовательности, которую мы опять обозначим x_n.

Далее можем писать

$$\left\| \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}} \right\|_k = \frac{\|x_n\|_k}{\sqrt{\|x_n\|}} \leqq \frac{\|x_n\|_k}{\sqrt{[2^{-k}\, \|x_n\|_k/(1 + \|x_n\|_k)]}} = 2^{\frac{1}{2}k} \|x_n\|_k^{\frac{1}{2}} (1 + \|x_n\|_k)^{\frac{1}{2}}.$$

По предположению $x_n \to 0$ и, следовательно, $\|x_n\|_k \to 0$. Значит, $(1 + \|x_n\|_k)^{\frac{1}{2}}$ ограничена. В таком случае будет $2^{\frac{1}{2}k}\, \|x_n\|_k^{\frac{1}{2}}(1 + \|x_n\|_k)^{\frac{1}{2}} \to 0$, но $2^{\frac{1}{2}k}\, \|x_n\|_k^{\frac{1}{2}} (1 + \|x_n\|_k)^{\frac{1}{2}} \geqq \|x_n\|_k\, \|x_n\|^{-\frac{1}{2}} \geqq \varepsilon > 0$, в чем заключается противоречие.

1,1,14. Пусть E — лин. топ. пр. и δ — какая-то система частей E. Мы назовем δ *опорной системой* в E, если же она обладает следующими свойствами:

1. Если множество $A \in \delta$, то оно выпукло, симметрично, замкнуто и ограничено.

2. Если A — выпуклое, симметрическое и компактное множество в E, то $A \in \delta$.

3. Если A' — выпуклая, симметрическая замкнутая часть такая, что для некоторого $A \in \delta : A' \subseteq A$, то $A' \in \delta$.

4. Если $A \in \delta$, то $\lambda A \in \delta$ для каждого $\lambda \geqq 0$.

5. Если $A_1, A_2 \in \delta$, то $\overline{A_1 + A_2} \in \delta$.

1,1,15. Обозначим через $\kappa(E)$, $\nu(E)$ и $\lambda(E)$ соответственно систему всех выпуклых симметричных компактных, или слабо компактных, или закнутых ограниченных частей E. Тогда $\kappa(E)$, $\nu(E)$, $\lambda(E)$ являются опорными системами, и для каждой такой системы δ имеет место соотношение: $\kappa(E) \subseteq \delta \subseteq \lambda(E)$. Сокращенно мы иногда пишем κ, ν, λ вместо $\kappa(E)$, $\nu(E)$, $\lambda(E)$.

1,2. Функции в лин. топ. пр. 1,2,1. Если M_1, M_2 — два произвольных множества, то символом $\mathscr{F}^+(M_1, M_2)$ обозначим множество всех функций f таких, что $\mathscr{D}(f) \subseteq M_1$, $\mathscr{R}(f) \subseteq M_2$, и $\mathscr{F}(M_1, M_2)$ суть все функции, для которых $\mathscr{D}(f) = M_1$, $\mathscr{R}(f) \subseteq M_2$. Очевидно, $\mathscr{F}(M_1, M_2) \subseteq \mathscr{F}^+(M_1, M_2)$.

1,2,2. Если M_1, M_2, M_3 — три множества, то для каждого $f_1 \in \mathscr{F}(M_1, M_2)$, $f_2 \in \mathscr{F}(M_2, M_3)$ определим суперпозицию $f \in \mathscr{F}(M_1, M_3) : x \in M_1 \Rightarrow f(x) = f_2(f_1(x))$. Такую f мы будем обозначать $f_2 \circ f_1$.

1,2,3. Пусть M_0, M_1, M_2 — произвольные множества и пусть $f \in \mathscr{F}(M_0, M_1)$, $F \in \mathscr{F}(M_0, \mathscr{F}(M_1, M_2))$. Тогда символом $F \times f \in \mathscr{F}(M_0, M_2)$ обозначим функцию, определенную таким образом: $(F \times f)(x) = F(x)(f(x))$. Если M_3 — дальнейшее множество и если F_1, F_2 — функции, $F_1 \in \mathscr{F}(M_0, \mathscr{F}(M_1, M_2))$ и $F_2 \in \mathscr{F}(M_0, \mathscr{F}(M_2, M_3))$, то символом $F_2 \odot F_1$ обозначим функцию из $\mathscr{F}(M_0, \mathscr{F}(M_1, M_3))$, определенную так: $(F_2 \odot F_1)(x) = F_2(x) \circ F_1(x)$. Если $M_1 = M_2$, то для $F \in \mathscr{F}(M_0, \mathscr{F}(M_1, M_2))$ мы определим $F^{\odot n}(x) = F(x) \circ F(x) \circ \ldots \circ F(x)$ (n раз).

1,2,4. Пусть $F \in \mathscr{F}(M_1, \mathscr{F}(M_2, M_3))$ и пусть $y \in M_2$; тогда мы определим $F \otimes y \in \mathscr{F}(M_1, M_2)$ следующим образом: $(F \otimes y)(x) = F(x)(y)$.

1,2,5. Если E – линейное пространство и M – произвольное множество, то $\mathscr{F}(M, E)$ образует, очевидно, линейное пространство, если в нем введено сложение и умножение естественным способом.

1,2,6. На $\mathscr{F}(M, E)$ мы введем топологию $\mathscr{F}_\sigma(M, E)$ таким образом: $W \in \mathscr{F}(M, E)$ является окрестностью нуля в $\mathscr{F}_\sigma(M, E)$, если существует конечное множество $A \subseteq M$ и окрестность $V \in \mathfrak{V}(E)$ так, что для каждого $f \in \mathscr{F}(M, E)$: $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in W$.

1,2,7. Пусть E_1, E_2 – два лин. топ. пр., δ – опорная система в E_1. Введем теперь топологию на $\mathscr{F}(E_1, E_2)$ по отношению к δ следующим образом: Обозначим через $\mathfrak{W}_\delta(E_1, E_2)$ систему всех частей $W \subseteq \mathscr{F}(E_1, E_2)$, для которых существует выпуклая симметрическая часть $W_0 \subseteq W$, множество $A \in \delta$ и $V \in \mathfrak{V}(E_2)$ так, что

α) $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in W_0$,

β) для каждого $f \in \mathscr{F}(E_1, E_2)$ существует $\eta > 0$ так, что для $|\lambda| \leqq \eta$ имеем $\lambda f \in W_0$.

Легко видно, что $\mathfrak{W}_\delta(E_1, E_2)$ образует систему окрестностей нуля в $\mathscr{F}(E_1, E_2)$. Пространство $\mathscr{F}(E_1, E_2)$ с топологией, индуцированной системой $\mathfrak{W}_\delta(E_1, E_2)$, будем обозначать символом $\mathscr{F}_\delta(E_1, E_2)$. Тогда, следовательно, $\mathfrak{V}(\mathscr{F}_\delta(E_1, E_1)) = \mathfrak{W}_\delta(E_1, E_2)$.

1,2,8. С целью дальнейшего использования введем такую систему $\mathfrak{Z}_\delta(E_1, E_2)$ подмножеств в $\mathscr{F}(E_1, E_2)$: $Z \in \mathfrak{Z}_\delta(E_1, E_2)$ тогда и только тогда, когда существует $A \in \delta$ и $V \in \mathfrak{V}(E_2)$ так, что $Z = \{f : f(A) \subseteq V\}$.

1,2,9. *$\mathfrak{Z}_\delta(E_1, E_2)$ представляет собой определяющий семифильтр в $\mathscr{F}(E_1, E_2)$.*

1,2,10. Если δ_1, δ_2 – опорные системы в E_1, E_2, то $\mathscr{F}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2)$ будет означать систему функций f, для которых $A_1 \in \delta_1 \Rightarrow f(A_1) \subseteq A_2 \in \delta_2$. Эти функции мы будем называть (δ_1, δ_2) – ограниченными функциями.

1,2,11. Пусть E_1, E_2 – два линейных пространства и пусть $L \in \mathscr{F}(E_1, E_2)$. В таком случае мы назовем L однородным, если для действительного α и $x \in E$ будет $L(\alpha x) = \alpha L(x)$; аддитивным, если для $x, y \in E_1$ будет $L(x + y) = L(x) + L(y)$; линейным, если L является однородным и аддитивным. Вместо понятия функции будем в этом случае употреблять также слово оператор.

1,3. Непрерывные функции. 1,3,1. Пусть $P_1 P_2$ – два топологических пространства. Систему всех непрерывных функций из $\mathscr{F}(P_1, P_2)$ мы обозначим символом $\mathscr{C}(P_1, P_2)$.

1,3,2. Пусть E_1, E_2 — два лин. топ. пр., и δ — опорная система в E_1. Тогда через $\mathscr{C}_\sigma(E_1, E_2)$ мы обзначим пространство $\mathscr{C}(E_1, E_2)$ с топологией, индуцированной пространством $\mathscr{F}_\sigma(E_1, E_2)$, и через $\mathscr{C}_\delta(E_1, E_2)$ с топологией, индуцированной $\mathscr{F}_\delta(E_1, E_2)$.

1,3,3. *$W \in \mathfrak{B}(\mathscr{C}_\sigma(E_1, E_2))$ тогда и только тогда, если существует конечное множество $A \subseteq E_1$ и $V \in \mathfrak{B}(E_2)$ так, что $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in V$.*

Далее, $W \in \mathfrak{B}(\mathscr{C}_\kappa(E_1, E_2))$ тогда и только тогда, если существует $A \in \kappa(E_1)$ и $V \in \mathfrak{B}(E_2)$ так, что $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in W$.

1,3,4. *Если D — пр. Фр., E — лин. топ. пр., то $\mathscr{C}(D, E)$ замкнуто в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$.*

1,3,5. Если E, E_2 — два лин. топ. пр., то символом $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ будем обозначать множество всех непрерывных линейных функций из $\mathscr{F}(E_1, E_2)$. Вмэсто $\mathscr{L}(E, R)$ пишем иногда E'.

1,3,6. *Пусть E_1, E_2 — два лин. топ. пр., M — линейное подпространство в E_1 и Φ — какой нибудь определяющий семифильтр в E_1. Некоторое линейное отображение L на M в E_2 является непрерывным тогда и только тогда, если для каждого $V_2 \in \mathfrak{B}(E_2)$ существует $Z \in \Phi$ так, что $L(Z \cap M) \subseteq V_2$.*

Доказательство. 1. Если L — непрерывное отображение, то условие вы полнено.

2. Пусть $Z \in \Phi$ так, что $L(Z \cap M) \subseteq \frac{1}{2}V_2$ (мы предполагаем, что $V_2 \in \mathfrak{B}(E_2)$). Через $\hat{Z}$ обозначим наименьшее линейное подпространство в E_1, которое содержит Z, и затем положим $M_0 = \hat{Z} \cap M$. Теперь выберем N_1 — какое-то алгебраическое дополнение к M_0 в M, $N_2 = \hat{Z}$ и N_3 — алгебраическое дополнение к $M + \hat{Z}$. Тогда N_1, N_2, N_3 образуют, очевидно, прямое разложение E_1. Далее положим $Q = \{x : x \in N_1$ и $L(x) \subseteq \frac{1}{2}V_2\}$. Рассмотрим теперь множество $V_1 = Q + Z + N_3$. Очевидно, $V_1 \supseteq Z$. Далее, пусть $x \in E_1$. Тогда при помощи разложения $x = x_1 + x_2 + x_3$, $x_i \in N_i$ $(i = 1, 2, 3)$, легко покажем, что существует $\eta > 0$ так, что для $|\lambda| \leqq \eta : \lambda x \in V_1$. Следовательно, $V_1 \in \mathfrak{B}(E_1)$. Теперь уже достаточно доказать только то, что $L(V_1 \cap M) \subseteq V_2$. Итак, пусть $y \in V_1 \cap M$, т. е. $y \in V_1$ и $y \in M$. Потому что $N_3 \cap M = \{0\}$, то можно, очевидно, найти точно одно y_1 и y_2 так, что $y_1 \in Q$ и $y_2 \in Z : y = y_1 + y_2$. Так как $Q \subseteq N_1 \subseteq M$, то $y_1 \in M$. Но тогда $y_2 = y - y_1 \in M$. Следовательно, $y_2 \in M \cap Z$ и по предположению и $L(y_2) \in \frac{1}{2}V_2$. Одновременно по определению Q будет $L(y_1) \subseteq \frac{1}{2}V_2$. Значит, мы имеем $L(y) \in V_2$ и, следовательно, $L(V_1 \cap M) \subseteq V_2$, что требовалось доказать.

1,3,7. Пусть δ — опорная система в E_1. Тогда $\mathscr{L}_\sigma(E_1, E_2)$ означает пространство $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ с топологией, индуцированной $\mathscr{F}_\sigma(E_1, E_2)$ и $\mathscr{L}_\delta(E_1, E_2)$ с топологией, индуцированной $\mathscr{F}_\delta(E_1, E_2)$.

1,3,8. *$W \in \mathfrak{B}(\mathscr{L}_\sigma(E_1, E_2))$ тогда и только тогда, когда существует конечное множество $A \subseteq E_1$ и $V \in \mathfrak{B}(E_2)$ так, что $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in W$. Далее, $W \in$*

$\in \mathfrak{B}(\mathscr{L}_\delta(E_1, E_2))$ *тогда и только тогда, когда существует* $A \in \delta$ *и* $V \in \mathfrak{B}(E_2)$ *так, что* $f(A) \subseteq V \Rightarrow f \in W$.

1,3,9. *Если* D *— пр. Фр. и* E *— лин. топ. пр., то* $\mathscr{L}(D, E)$ *является замкнутым подпространством в* $\mathscr{C}_\delta(D, E)$ *и в* $\mathscr{F}_\delta(D, E)$, *где* δ *опорная система в* D.

1,3,10. Если E, E_2 — лин. топ. пр. с опорными системами δ_1, δ_2, то мы обозначим $\mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2) = \mathscr{L}(E_1, E_2) \cap \mathscr{F}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2)$. Элементы из $\mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2)$ мы назовем $(\delta_1\delta_2)$ — *ограниченными непр. лин. операторами.*

1,3,11. *Пусть* D *— пр. Фр.,* E *— лин. топ. пр.,* $L_\alpha \in \mathscr{L}(D, E)$, $L \in \mathscr{F}(D, E)$. *Если*

1) *для каждого* $x \in D$ *множество* $\{L_\alpha(x) : \alpha\}$ *ограничено в* E.

2) $L_\alpha(x) \to L(x)$ *для каждого* $x \in D$,
то $L \in \mathscr{L}(D, E)$ *и* $L_\alpha \to L$ *в* $\mathscr{L}_\kappa(D, E)$.

Доказательство производится на основании теоремы Банаха-Штейнхауса.

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

2,0. Ориентация. Здесь будут введены основные дифференциальные понятия. В отделе 2,1 введем понятие частной производной по данному направлению, понятие асимптотической аддитивности и понятие гладкости функций в данной точке (локально). Синтезом этих трех понятий является понятие дифференцируемости функции в точке (локально), изучаемой в отделе 2,2. В отделе 2,3 мы введем глобальную дифференцируемость (дифференцируемость во всех точках) и исследуем самые элементарные ее свойства. Значение глобальной дифференцируемости выступает на первый план в связи с непрерывностью, чем будем более подробно заниматься позже. В отделе 2,4 будем изучать связь между дифференцируемостью и ограниченостью. Всюду в дальнейшем будут символы D, D_1, D_2, E, E_1, E_2 означать произвольные лин. топ. пр. если не будет ничего другого сказано.

2,1. Основные локальные дифференциальные свойства функций. 2,1.1. Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$ и $h \in D$. Тогда мы скажем, что f (локально) дифференцируема по h в точке x, если существует $y \in E$ так, что к любому $V \in \mathfrak{B}(E)$ найдется $\varepsilon > 0$ так, что:

$$0 < t \leqq \varepsilon \Rightarrow \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - y \in V.$$

Это значение y мы обозначим $(\partial^\cdot/\partial h)(x)(f)$ и будем называть его (частной) производной по h в точке x.

2,1,2. *f является дифференцируемой в точке x по h тогда и только тогда, если существует $y \in E$ так, что для каждого*

$$t_n > 0,\ t_n \to 0 : \frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} \to y\,.$$

2,1,3. (Локальная асимптотическая аддитивность.) Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. Мы скажем, что f (локально) асимптотически аддитивна в точке x если для любых $h_1, h_2 \in D$ и $V \in \mathfrak{B}(E)$ существует $\varepsilon > 0$ так, что для $0 < t \leqq \varepsilon$ будет:

$$\frac{1}{t}\left(f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + th_1) - f(x + th_2) + f(x)\right) \in V\,.$$

2,1,4. *Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. Тогда f асимптотически аддитивна в точке x в том и только в том случае, если для любых $h_1, h_2 \in D$ и $t_n > 0$, $t_n \to 0$ выполнено*:

$$\frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n(h_1 + h_2)) - f(x + t_n h_1) - f(x + t_n h_2) + f(x)\right) \to 0\,.$$

2,1,5. (Локальная гладкость.) Пусть δ – опорная система в D и пусть $f \in$ $\ni \mathscr{F}(D, E)$. Тогда мы скажем, что f является (локально) δ-гладкой в точке x, если для каждого $V \in \mathfrak{B}(E)$ и $A \in \delta$ существует $U \in \mathfrak{B}(D)$ так, что для каждого $h \in A$ и для каждого действительного $s > 0$, $t > 0$ выполнено:

$$sh \in U\,, \quad th \in U \Rightarrow \frac{1}{s}\left(f(x + sh) - f(x)\right) - \frac{1}{t}\left(f(x + th) - f(x)\right) \in V\,.$$

2,1,6. *Если функция $f \in \mathscr{F}(D, E)$ непрерывна в точке x, то она является δ-гладкой в точке x тогда и только тогда, если для каждой последовательности $h_n \in \Pi(\delta)$ и для любых двух действительных последовательностей s_n, t_n таких, что $s_n > 0$, $t_n > 0$, $s_n \to 0$, $t_n \to 0$, выполнено следующиее*:

$$[*] \qquad \frac{1}{s_n}\left(f(x + s_n h_n) - f(x)\right) - \frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n h_n) - f(x)\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0\,.$$

Доказательство. 1. Если f является δ-гладкой в точке x, то утверждение теоремы, очевидно, правильно (и без предположения непрерывности f).

2. Пусть теперь f непрерывна в точке x, пусть для всяких $h_n \in \Pi(\delta)$, $s_n > 0$, $t_n > 0$, $s_n \to 0$, $t_n \to 0$ справедливо соотношение [*]. Требуется доказать, что f является δ-гладкой в точке x.

Прежде всего, легко видно, что для каждого $A \in \delta$ и $V \in \mathfrak{B}(E)$ существует $\omega_1 > 0$ так, что для $0 < s \leqq \omega_1$, $0 < t \leqq \omega_1$, $h \in A$:

$$[**] \qquad \frac{1}{s}\left(f(x + sh) - f(x)\right) - \frac{1}{t}\left(f(x + th) - f(x)\right) \in V\,.$$

Это непосредственное следствие отнощения [*].

Итак, пусть f не является δ-гладкой в точке x. Тогда существует $V \in \mathfrak{V}_0(E)$ и $A \in \delta$ так, что к любому $U \in \mathfrak{V}(D)$ можно найти $s > 0$, $t > 0$ и $h \in A$ так, что $sh \in U$, $th \in U$, но:

$$\frac{1}{s}(f(x + sh) - f(x)) - \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)) \notin V.$$

Следовательно, существуют обощенные последовательности $h_\alpha \in A$, $s_\alpha > 0$, $t_\alpha > 0$, $s_\alpha h_\alpha \to 0$, $t_\alpha h_\alpha \to 0$, но

$$[***] \qquad \frac{1}{s_\alpha}(f(x + s_\alpha h_\alpha) - f(x)) - \frac{1}{t_\alpha}(f(x + t_\alpha h_\alpha) - f(x)) \notin V.$$

Очевидно, что не может быть одновременно $s_\alpha \to 0$ и $t_\alpha \to 0$ потому что в таком случае [***] было бы в явном противоречии с [**]. Итак, мы можем считать, что по крайней мере $s_\alpha \not\to 0$ (или $t_\alpha \not\to 0$, но эти положения симметричны, так что можем ограничиться исследованием случая $s_\alpha \not\to 0$). Теперь мы выберем s'_α из s_α так, чтобы для удобного $\varepsilon_1 > 0$ при всех α было: $s'_\alpha \geqq \varepsilon_1$, что, очевидно, всегда можно. Одинаковым способом выберем и h'_α и t'_α.

Теперь уже легко видно, что из непрерывности f в точке x для достаточно больших α вытекает:

$$[\dagger] \qquad \frac{1}{s'_\alpha}(f(x + s'_\alpha h'_\alpha) - f(x)) \in \tfrac{1}{2}V.$$

Далее, должно быть $h'_\alpha \to 0$. Если бы это не имело места, то для псевдонормы $\|\cdot\|_W$, индуцированной подходящей окрестностью $W \in \mathfrak{V}_0(D)$ было бы: $\|h'_\alpha\|_W \not\to 0$. Значит, мы можем выбрать h''_α так, что $\|h''_\alpha\|_W \to c > 0$. Если таким же образом выбрать и s''_α из s'_α, то получим: $\|s''_\alpha h''_\alpha\|_W = s''_\alpha \|h''_\alpha\|_W \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_1 c > 0$. для достаточно больших α, что противоречит тому, что $s_\alpha h_\alpha \to 0$ (и, следовательно, также $s''_\alpha h''_\alpha \to 0$).

Теперь мы будем различать два случая:

I) $t'_\alpha \to 0$. Из непрерывности f в точке x и из только что доказанного факта, что $h'_\alpha \to 0$, вытекает, что для достаточно больших α

$$[\dagger\dagger] \qquad \frac{1}{t'_\alpha}(f(x + t'_\alpha h'_\alpha) - f(x)) \in \tfrac{1}{2}V.$$

Существует, то-есть, $\omega_2 > 0$ так, что для $0 < u, v \leqq \omega_2$ по [**] будет:

$$\frac{1}{u}(f(x + uh'_\alpha) - f(x)) - \frac{1}{v}(f(x + vh'_\alpha) - f(x)) \in \tfrac{1}{4}V$$

при всех α. Выберем и закрепим $0 < v_0 \leqq \omega_2$. Тогда для достаточно больших α будет:

$$\frac{1}{v_0}\left(f(x + v_0 h'_\alpha) - f(x)\right) \in \tfrac{1}{4}V$$

что вытекает из непрерывности f в точке x и из того обстоятельства, что $h'_\alpha \to 0$. Следовательно, для $0 < u \leqq \omega_2$ и для достаточно больших α имеем:

$$\frac{1}{u}\left(f(x + u h'_\alpha) - f(x)\right) \in \tfrac{1}{2}V.$$

Если взять $u = t'_\alpha$, то для достаточно больших α получим [††]. Соединив теперь [†] и [††], получим противоречие с [***].

II) $t'_\alpha \not\to 0$. В таком случае мы можем выбрать частичную последовательность t''_α из t'_α так, что $t''_\alpha \geqq \varepsilon_2 > 0$ для каждого α. Но тогда для достаточно больших α из непрерывности f в точке x очевидно вытекает:

$$[\dagger\dagger\dagger] \qquad \frac{1}{t''_\alpha}\left(f(x + t''_\alpha h''_\alpha) - f(x)\right) \in \tfrac{1}{2}V.$$

Путем соединения [†] (взятого для s''_α и h''_α) и [†††] получим опять-таки противоречие с [***], и этим завершается доказательство.

2,1,7. *Если $f \in \mathscr{F}(D, E)$ непрерывна в точке x, то она является δ-гладкой в точке x тогда и только тогда, если для каждого $V \in \mathfrak{V}(E)$ и $A \in \delta$ существует $\omega > 0$ такое, что для $h \in A$, $0 < s, t \leqq \omega$ выполнено:*

$$\frac{1}{s}\left(f(x + sh) - f(x)\right) - \frac{1}{t}\left(f(x + th) - f(x)\right) \in V.$$

Доказательство. Утверждение является простым следствием предыдущей теоремы 2,1,6.

2,1,8. Функцию $f \in \mathscr{F}(D, E)$ мы назовем липшицевской в точке x, если для каждого $V \in \mathfrak{V}(E)$ существует $U \in \mathfrak{V}(D)$ так, что для каждого $0 < t \leqq 1$ и $h \in U$ выполнено $(1/t)\left(f(x + th) - f(x)\right) \in V$.

2,1,9. *Если $f \in \mathscr{F}(D, E)$ является липшицевской в точке x, то она непрерывна в точке x.*

2,2. Локальная дифференцируемость. 2,2,1. Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$ и δ — опорная система в D. Мы скажем, что f является δ-дифференцируемой в точке x, если

1) f является липшицевской в точке x,
2) f дифференцируема в точке x по каждому $h \in D$,
3) f асимптотически аддитивна в точке x,
4) f является δ-гладкой в точке x.

2,2,2. Если f является δ-дифференцируемой в точке x то функцию $L \in \mathscr{F}(D, E)$:

$$L(h) = \lim_{t \to 0, t > 0} \left(\frac{1}{t} \left(f(x + th) - f(x) \right) \right)$$

назовем *δ-дифференциалом в точке* x и обозначим $\delta^{\cdot}(x)(f)$.

2,2,3. Имеют место следующие равенства, если правая часть имеет смысл

1) $\delta^{\cdot}(x)(\alpha f) = \alpha\, \delta^{\cdot}(x)(f)$,

2) $\delta^{\cdot}(x)(f_1 + f_2) = \delta^{\cdot}(x)(f_1) + \delta^{\cdot}(x)(f_2)$.

2,2,4. Если f δ-дифференцируема в точке x, то $\delta^{\cdot}(x)(f)$ является непрерывным линейным оператором на D в E $(\delta^{\cdot}(x)(f) \in \mathscr{L}(D, E))$.

Доказательство не представляет затруднений. Положительная однородность вытекает из дифференцируемости в точке x, аддитивность из асимптотической аддитивности в точке x и непрерывность из свойства быть липшицевской в точке x.

2,2,5. *Пусть D — пространство Фреше. В таком случае функция $f \in \mathscr{F}(D, E)$ является δ-дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, если существует непрерывный линейный оператор L, для которого выполнено следующее: если $h_n \in \Pi(\delta)$, $t_n > 0$ и $t_n \to 0$, то $(1/t_n)(f(x + t_n h_n) - f(x)) - L(h_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. 1. Пусть f δ-дифференцируема в точке x. Тогда путем простых рассуждений получим на основании теорем 2,1,7 и 2,2,4 наше утверждение.

2. Пусть для f справедливо утверждение теоремы. Проверим свойства 1—4 из определения 2,2,1.

α) Свойство f быть липшицевской в точке x. Пусть f не является липшицевской в точке x. Тогда существуют $V \in \mathfrak{V}(E)$ и последовательности $0 < t_n \leqq 1$ и $h_n \to 0$ такие, что

$$\frac{1}{t_n} \left(f(x + t_n h_n) - f(x) \right) \notin V.$$

По теореме 1,1,13 существует последовательность $u_n > 0$, $u_n \to 0$, $h_n/u_n \to 0$. Но тогда по нашему предположению

$$\frac{1}{t_n u_n} \left(f\left(x + t_n u_n \frac{h_n}{u_n} \right) - f(x) \right) - L\left(\frac{h_n}{u_n} \right) \to 0\,.$$

Так как $u_n \to 0$, то тем более

$$\frac{1}{t_n} \left(f(x + t_n h_n) - f(x) \right) - L(h_n) \to 0\,.$$

Но из непрерывности L и из того обстоятельства, что из $h_n \to 0$ вытекает $L(h_n) \to 0$ и, следовательно,

$$\frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n h_n) - f(x)\right) \to 0\,,$$

что приводит нас к противоречию.

β) Из свойства f быть липшицевской в точке x вытекает непрерывность f в точке x, и при помощи теоремы 2,1,6 можем легко проверить свойство 4 из 2,2,1.

γ) Свойства 2,3 из 2,2,1 проверяются совсем элементарно.

2.3. Глобальная дифференцируемость. 2,3,1. Пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$, $h \in D$. Тогда мы скажем, что f является (глобально) дифференцируемой по h, если она локально дифференцируема по h в каждой точке $x \in D$. Глобальную производную мы обозначим $\partial^*/\partial h(f)$, и для каждого $x \in D$ будет: $\partial^*/\partial h(f)(x) = \partial^{\cdot}/\partial h\,(x)\,(f)$.

2,3,2. Глобальная асимптотическая аддитивность и глобальная δ-гладкость вводятся подобным образом.

2,3,3. Пусть D, E — лин. топ. пр., δ — опорная система в D и $f \in \mathscr{F}(D, E)$. Мы скажем, что f является (глобально) δ-дифференцируемой, если она для каждого $x \in D$ локально δ-дифференцируема в точке x.

2,3,4. *Теоремы, доказанные для локальной дифференцируемости остаются в силе и в случае глобальной дифференцируемости.*

2,3,5. Если f δ-дифференцируема, то через $\delta^*(f)$ обозначим функцию из $\mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$, определенную следующим образом: $\delta^*(f)(x) = \delta^{\cdot}(x)(f)$.

2,3,6. (*Теорема о среднем значении.*) *Пусть f дифференцируема по h и $-h$ и пусть*: $(\partial^*/\partial h)(f) = -(\partial^*/\partial(-h))(f)$. *Тогда для каждого $x \in D$ будет*:

$$f(x + h) - f(x) \in \overline{co}\left\{\frac{\partial^*}{\partial h}(f)(x + th) : 0 \leqq t \leqq 1\right\}.$$

Доказательство. Пусть приведенное соотношение не имеет места. Тогда существует линейный функционал l на E такой, что для каждого $t \in \langle 0, 1\rangle$ выполнено неравенство $|l(\partial^*/\partial h(f)(x + th))| \leqq 1$ и $l(f(x + h) - f(x)) > 1$. Обозначим теперь $\varphi(t) = l(f(x + th))$ для $0 \leqq t \leqq 1$. Легко можно обнаружить, что φ дифференцируема в обыкновенном смысле и что $\varphi'(t) = l(\partial^*/\partial h(f)(x + th))$. По теореме о среднем значении для действительных функций действительного переменного должно тогда быть $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leqq \sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} (|\varphi'(t)|)$ что, очевидно, приводит нас к противоречию с нашими предположениями.

2,3,7. *Если f δ-дифференцируема, то для любых $x, y : f(x) - f(y) \in \overline{co}\{\delta^*(f)(tx + (1 - t)y)(y - x) : 0 \leqq t \leqq 1\}$.*

2,3,8 *Если f δ-дифференцируема и $\delta^*(f)(x) = 0$ для каждого $x \in E$, то f постоянна.*

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ ОПЕРАЦИЙ С ФУНКЦИЯМИ

3,0. Ориентация. В настоящем отделе содержатся доказательства трех основных свойств дифференцируемости — теоремы о дифференцируемости и дифференциале произведения функций, сложных функций и пределов последовательностей функций. Для различных определений дифференцируемости были некоторые из них доказаны (о сложных функциях), но не теоремы о пределе (за исключением, конечно, диф. Фреше в пространствах Банаха). В отделах 3,1 и 3,2 сформулированны теоремы для локального случая, глобальная версия непосредственна, теоремы отдела 3,3 имеют смысл только в глобальном случае.

3,1. Дифференцируемость и дифференциалы произведения функций. 3,1,1. *Пусть D — пр. Фр., E, E_2 — лин. топ. пр., δ — опорная система в D, γ — опорная система в E_1. Пусть, далее, $f \in \mathscr{F}(D, E_1)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E_1, E_2))$ и пусть*

1) *f является δ-диф. в точке x;*
2) *$F \otimes f(x)$ является δ — диф. в точке x;*
3) *F непрерывна в точке x по отношению к топологии $\mathscr{L}_\gamma(E_1, E_2)$.*
4) *$\delta^\cdot(x)(f) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, E)$.*

Тогда $F \times f$ δ-дифференцируема в точке x и

$$\delta^\cdot(x)(F \times f) = F(x) \circ \delta^\cdot(x)(f) + \delta^\cdot(x)(F \otimes f(x)).$$

Замечание. Если $f(x) = 0$, то условие 2), очевидно, всегда выполнено и

$$\delta^\cdot(x)(F \times f) = F(x) \circ \delta^\cdot(x)(f).$$

Доказательство. Ради большей наглядности введем обозначение: $\delta^\cdot(x)(F \otimes f(x)) = N$ и $\delta^\cdot(x)(f) = L$. Далее, пусть $t_n > 0$, $t \to 0$ и $h_n \in \Pi(\delta)$.

Теперь мы можем написать следующее:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t_n}(F(x + t_nh_n)(f(x + t_nh_n)) - F(x)(f(x)) - \\
&\quad - (F(x) \circ \delta^\cdot(x)(f))(h_n) - \delta^\cdot(x)(F \otimes f(x))(h_n) = \\
&= \frac{1}{t_n}(F(x + t_nh_n)(f(x + t_nh_n)) - F(x)(f(x))) - F(x)(L(h_n)) - N(h_n) = \\
&= (F(x + t_nh_n) - F(x))\left(\frac{1}{t_n}(f(x + t_nh_n) - f(x)) - L(h_n)\right) + \\
&+ (F(x + t_nh_n) - F(x))(L(h_n)) + F(x)\left(\frac{1}{t_n}(f(x + t_nh_n) - f(x) - L(h_n)\right) + \\
&+ \frac{1}{t_n}(F(x + t_nh_n) - F(x))(f(x)) - N(h_n).
\end{aligned}$$

Теперь мы докажем, что отдельные члены последней суммы стремятся к нулю. Из предположения 1) вытекает, что

$$\frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n h_n) - f(x)\right) - L(h_n) \to 0$$

и, следовательно, что эта последовательность принадлежит $\Pi(\gamma)$. Из предположения 3) мы затем получим, что первый член стремится к нулю. Аналогичное утверждение верно и для второго члена, потому что из предположения 4) следует, что $L(h_n) \in \Pi(\gamma)$.

Для третьего члена достаточно сослаться на предположение 1) и для четвертого на предположение 2).

3,1,2. *Пусть D – пр. Фр., E_1, E_2 – лин. топ. пр. и пусть $f \in \mathscr{F}(D, E_1)$ и $F \in F(D, \mathscr{L}(E_1, E_2))$. Если*

1) *f является к-диф. в точке x [ν-диф., λ-диф.];*

2) *$F \otimes f(x)$ к-диф. в точке x [ν-диф., λ-диф.];*

3) *F непрерывна в точке x при топологии $\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2)$ [$\mathscr{L}_\nu(E_1, E_2)$, $\mathscr{L}_\lambda(E_1, E_2)$] то $F \times f$ к-дифференцируема в точке x [ν-диф., λ-диф.] и*

$$\kappa^{\cdot}(x)(F \times f) = F(x) \circ \kappa^{\cdot}(x)(f) + \kappa^{\cdot}(x)(F \otimes f(x))$$

[*аналогично для ν, λ*].

Доказательство. Достаточно доказать, что выполнено условие 4 предыдущей теоремы для $\delta = \kappa[\delta = \nu, \delta = \lambda]$, что нетрудно.

3,1,3. *Пусть D – пр. Фр., E_1, E_2 – лин. топ. пр., δ – опорная система в D, γ – опорная система в E_1. Пусть, далее, $f \in \mathscr{F}(D, E_1)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}_\gamma(E_1, E_2))$ и пусть*

1) *f δ-диф. в точке x;*

2) *F δ-диф. в точке x (при топологии $\mathscr{L}_\gamma(E_1, E_2)$);*

3) *$\delta^{\cdot}(x)(f) = \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, E_1)$.*

Тогда $F \times f$ является δ-диф. в точке x и

$$\delta^{\cdot}(x)(F \times f) = F(x) \circ \delta^{\cdot}(x)(f) + \delta^{\cdot}(x)(F \otimes f(x)).$$

Доказательство. Непрерывность F в точке x при топологии $\mathscr{L}_\gamma$ вытекает сразу же из дифференцируемости. Дифференцируемость функции $F \otimes f(x)$ в точке x очевидна, и достаточно применить теорему 3,1,1.

3,1,4. *Пусть D — пр. Фр., E_1, E_2 — лин. топ. пр., пусть $f \in \mathscr{F}(D, E_1)$, $F \in \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E_1, E_2))$. Если*

1) *f является к-диф. в точке x [ν-диф., λ-диф.];*

2) *F является к-диф. в точке x [ν-диф., λ-диф.] (при топологии $\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2)$ [$\mathscr{L}_\nu(E_1, E_2)$, $\mathscr{L}_\lambda(E_1, E_2)$]), то $F \overset{*}{\times} f$ к-диф. в точке x [ν-диф., λ-диф.], и*

$$\kappa^{\cdot}(x)(F \times f) = F(x) \circ \kappa^{\cdot}(x)(f) + \kappa^{\cdot}(x)(F \otimes f(x))$$

[*аналогично для ν, λ*].

Доказательство проводится легко на основании 3,1,3.

3,2. Дифференцируемость и дифференциалы сложных функций. 3,2,1. *Пусть D_1, D_2 — пр. Фр., E — лин. топ. пр., $f_1 \in \mathscr{F}(D_1, D_2)$, $f_2 \in \mathscr{F}(D_2, E)$, δ_1, δ_2 — опорные системы в D_1 и D_2, и пусть*

1) *f_1 локально δ_1-дифференцируема в точке x;*

2) *$\delta^{\cdot}(x)(f_1) \in \mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}(D_1, D_2)$;*

3) *f_2 локально δ_2-дифференцируема в точке $f_1(x)$. Тогда $f_2 \circ f_1$ локально δ_1-дифференцируема в точке x и*

$$\delta_1^{\cdot}(x)(f_2 \circ f_1) = \delta_2^{\cdot}(f_1(x))(f_2) \circ \delta_1^{\cdot}(x)(f_1)\,.$$

Доказательство. Ради большей наглядности введем следующие вспомогательные функции и обозначения: $f_1(x) = y$, $\delta_2^{\cdot}(y)(f_2) = M \in \mathscr{L}(D_2, E)$, $\delta_1^{\cdot}(x)(f_1) = L \in \mathscr{L}(D_1, D_2)$, $f_2(y + k) - f_2(y) - M(k) = \varepsilon(k)$ для $k \in D_2$, $f_1(x + h) - f_1(x) - L(h) = \eta(h)$ для $h \in D_1$.

Тогда очевидным образом из предположений вытекает

1) $k_n \in \Pi(\delta_2)$, $s_n > 0$, $s_n \to 0 \Rightarrow (1/s_n)\,\varepsilon(s_n k_n) \to 0$;

2) $h_n \in \Pi(\delta_1)$, $t_n > 0$, $t_n \to 0 \Rightarrow (1/t_n)\,\eta(t_n k_n) \to 0$;

3) L находится в $\mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}$, то есть $h_n \in \Pi(\delta_1) \Rightarrow L(h_n) \in \Pi(\delta_2)$. Далее положим $f_2(f_1(x + h)) - f_2(f_1(x)) - M(L(h)) = \omega(h)$. Нам надо, собственно говоря, доказать следующее: $h_n \in \Pi(\delta_1)$, $t_n > 0$, $t_n \to 0 \Rightarrow (1/t_n)\,\omega(t_n h_n) \to 0$.

Тогда $f_2(f_1(x + h)) - f_2(f_1(x)) - M(f_1(x + h) - f_1(x)) = \varepsilon(f_1(x + h) - f(x))$. Одновременно мы видим, что $f_1(x + h) - f_1(x) = L(h) + \eta(h)$, так что путем подстановки получим $\omega(h) = \varepsilon(L(h) + \eta(h)) + M(\eta(h))$. Значит, достаточно доказать $M[(1/t_n)\,\eta(t_n h_n)] \to 0$, что очевидно вытекает из дифференцируемости f и непрерывности M, и далее

$$\frac{1}{t_n}\,\varepsilon(L(t_n h_n) + \eta(t_n h_n)) \to 0\,.$$

Имеем

$$\frac{1}{t_n}\,\varepsilon(L(t_nh_n) + \eta(t_nh_n)) = \frac{1}{t_n}\,\varepsilon\left(t_n\left[L(h_n) + \frac{1}{t_n}\,\eta(t_nh_n)\right]\right).$$

Но теперь уже, как легко видно, достаточно знать, что $L(h_n) + (1/t_n)\,\eta(t_nh_n) \in \in \Pi(\delta_2)$. Но это несомненно, так как, во-первых, $(1/t_n)\,\eta(t_nh_n)$ является нулевой, что следует из дифференцируемости f и, во-вторых, $L(h_n) \in \Pi(\delta_2)$, что следует из того факта, что $L \in \mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}$. Итак, сумма является $\Pi(\delta_2)$-последовательностью в смысле определения 1,1,14 под 5), и доказательство этим закончено.

3,2,2. *Пусть опять D_1, D_2 – пр. Фр., E – лин. топ. пр., $f_1 \in \mathscr{F}(D_1, D_2)$, $f_2 \in \mathscr{F}(D_2, E)$ и пусть*

1) f_1 *к-диф. [ν-диф., λ-диф.] в точке x,*

2) f_2 *к-диф. [ν-диф., λ-диф.] в точке x.*

Тогда $f_2 \circ f_1$ к-диф. [ν-диф., λ-диф.] в точке x и

$$\kappa^{\cdot}(x)\,(f_2 \circ f_1) = \kappa^{\cdot}(f_1(x))\,(f_2) \circ \kappa^{\cdot}(x)\,(f_1)$$

[аналогично для ν, λ].

Доказательство сразу же вытекает из 3,2,1, потому что $\kappa^{\cdot}(x)\,(f_1)$ $[\nu^{\cdot}(x)\,(f_1)$, $\lambda^{\cdot}(x)\,(f_1)]$ всегда является елементом $\mathscr{L}^{\kappa\kappa}[\mathscr{L}^{\nu\nu}, \mathscr{L}^{\lambda\lambda}]$.

3,3. Дифференцируемость и дифференциалы предела функций. 3,3,1. *Пусть D – пр. Фр., E – лин. топ. пр., δ – опорная система в D. Далее, пусть $f_\alpha \in \in \mathscr{F}(D, E), f \in \mathscr{F}(D, E)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$. Если*

1) *для каждого $x \in D : f_\alpha(x) \to f(x)$.*

2) *f_α глобально δ-диф.*

3) *$\delta^*(f_\alpha) \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{F}_\delta(D, E))$,*
то $f_\alpha \to f$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E), f$ δ-диф. и $\delta^*(f) = F$.

Следствие: 1) *Оператор δ^* является замкнутым оператором в $\mathscr{F}^+(\mathscr{F}_\sigma(D, E)$, $\mathscr{F}_\kappa(D, F_\delta(D, E))$.*

2) *Если γ – произвольная опорная система в D, то δ^* является замкнутым оператором в $\mathscr{F}^+(\mathscr{F}_\gamma(D, E)$, $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{F}_\delta(D, E))$.*

Доказательство. Прежде всего, следствия вытекают непосредственно из утверждений теоремы. Итак, приступим к доказательству теоремы. Пусть $h_n \in \Pi(\delta)$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$. Требуется доказать, что

$$\frac{1}{t_n}\,(f(x + t_nh_n) - f(x)) - F(x)\,(h_n) \to \dot{0} \quad (n \to \infty).$$

Выберем $V \in \mathfrak{V}_0(E)$. Тогда достаточно доказать, что существует n_0, для которого имеет место следующее:

$$n \geqq n_0 \Rightarrow \frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n h_n) - f(x)\right) - F(x)(h_n) \in V.$$

Обозначим через Ω систему всех функций $f \in \mathscr{F}(D, E)$, которые δ-дифференцируемы и для которых $f(0) = 0$. Очевидно, что Ω – линейное подпространство в $\mathscr{F}(D, E)$. Тогда, очевидно, выполнено следующее: Если f – произвольная δ-дифференцируемая функция, то существует одна и только одна функция $g \in \Omega$ так, что $\delta^*(f) = \delta^*(g)$. Существование очевидно, достаточно от f отнять $f(0)$. Теперь мы докажем однозначность. Если бы существовали две такие функции g_1, g_2, то было бы $\delta^*(g_1) = \delta^*(g_2) \Rightarrow \delta^*(g_1 - g_2) = 0 \Rightarrow g_1 - g_2 = 0$ по теореме 2,3,8, что приводит нас к противоречию. Отсюда далее следует, что оператор δ^* является на Ω простым.

Обозначим символом Δ обратный оператор к этому оператору. В таком случае в области определения оператора Δ лежат как раз все функции из $\mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$, которые являются δ-дифференциалом какой-нибудь функции из $\mathscr{F}(D, E)$. Обозначим множество этих функций Ξ. Это, очевидно, линейное подпространство в $\mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$.

Сначала мы покажем, что оператор Δ, который очевидно является линейным, непрерывен при топологии $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и $\mathscr{F}_\sigma(D, E)$. Согласно теореме 1,3,6 достаточно доказать, что для каждого $W \in \mathscr{F}_\sigma(D, E)$ существуют $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{T}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ так, что $\Delta(\Xi \cap \mathfrak{Z}) \subseteq W$.

Если $W \in \mathscr{F}_\sigma(D, E)$, то существует конечное множество $Q \subseteq D$ и $U \in \mathfrak{V}_0(E)$ так, что из $\Phi(Q) \subseteq U$ следует $\Phi \in W$. Пусть теперь $\hat{Q}$ – выпуклая симметричная оболочка Q. В таком случае $\hat{Q} \in \kappa(D)$. Далее мы обозначим $\mathfrak{Z} = \{\Phi : \Phi \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E)),\ \Phi(x)(h) \in U$ для $x \in \hat{Q},\ h \in \hat{Q}\}$. Тогда видно, что $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{T}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и $\Delta(\Phi) \in W$ для $\Phi \in \Xi \cap \mathfrak{Z}$, так как для каждого $x \in Q$ $\Delta(\Phi)(x) \in \overline{co}\{\Phi(\mu x)(h) : 0 \leqq \mu \leqq 1\}$.

Обозначим $\delta^*(f_\alpha) = F_\alpha$. По предположениям нашей теоремы будет $F_\alpha \in \Xi$, $F_\alpha \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и $\Delta(F_\alpha) \to f - f(0)$ в $\mathscr{F}_\sigma(D, E)$. Обозначим $f - f(0) = \hat{f}$. По теореме 1,1,11 существует $G_\beta \in \Xi$ так, что $G_\beta \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и для каждого $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{T}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ существует β_0 так, что для $\beta \geqq \beta_0$ имеем $G_\beta - F \in \mathfrak{Z}$.

Так как $F_\alpha \to F$, $G_\beta \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и $\Delta(F_\alpha) \to f$ в $\mathscr{F}_\sigma(D, E)$, вытекает из доказанной выше непрерывности оператора Δ, что $\Delta(G_\beta) \to \hat{f}$ в $\mathscr{F}_\sigma(D, E)$.

Обозначим далее $\Delta(G_\beta) = g_\beta$. Из теоремы о среднем значении 2,3,7 для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и β, β' получим:

$$\frac{1}{t_n}\left[g_\beta(x + t_n h_n) - g_{\beta'}(x + t_n h_n) - (g_\beta(x) - g_{\beta'}(x))\right] \in$$
$$\in \overline{co}\left\{(G_\beta - G_{\beta'})(x + \mu t_n h_n)(h_n) : 0 \leqq \mu \leqq 1\right\}.$$

Но из того обстоятельства, что $G_{\beta'} \to F$ по семифильтре $\mathfrak{T}_\kappa(D, \mathscr{F}_\delta(D, E))$, вытекает, что $G_{\beta'}(x + \mu t_n h_n)(h_n) \underset{\beta'}{\to} F(x + \mu t_n h_n)(h_n)$, но равномерно для $n = 1, 2, \ldots$ и $0 \leqq \mu \leqq 1$. Следовательно, перейдя к пределу, получим

$$\frac{1}{t_n}\left[g_\beta(x + t_n h_n) - \hat{f}(x + t_n h_n) - (g_\beta(x) - \hat{f}(x))\right] \in$$
$$\in \overline{co}\{(G_\beta - F)(x + \mu t_n h_n)(h_n) : 0 \leqq \mu \leqq 1\}.$$

Затем мы можем для каждого β и $n = 1, 2, \ldots$ писать

$$\frac{1}{t_n}(f(x + t_n h_n) - f(x)) - F(x)(h_n) = \frac{1}{t_n}(\hat{f}(x + t_n h_n) - \hat{f}(x)) - F(x)(h_n) =$$
$$= \frac{1}{t_n}(g_\beta(x + t_n h_n) - g_\beta(x)) - G_\beta(x)(h_n) -$$
$$- \frac{1}{t_n}\left[g_\beta(x + t_n h_n) - \hat{f}(x + t_n h_n) - (g_\beta(x) - \hat{f}(x))\right] + G_\beta(x)(h_n) - F(x)(h_n).$$

Тогда для достаточно больших β и для всех n будет

$$G_\beta(x)(h_n) - F(x)(h_n) \in \tfrac{1}{3}V,$$

что следует из того, что $G_\beta \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$. Далее, для достаточно больших β и для всех $n = 1, 2, \ldots$ будет

$$\overline{co}\{(G_\beta - F)(x + \mu t_n h_n)(h_n) : 0 \leqq \mu \leqq 1\} \subseteq \tfrac{1}{3}V,$$

что получим аналогичными рассуждениями, как и выше, из того, что $G_\beta \to F$ по семифильтре $\mathfrak{T}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$. Следовательно, для достаточно больших β и для $n = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\frac{1}{t_n}(f(x + t_n h_n) - f(x)) - F(x)(h_n) \in \frac{1}{t_n}(g_\beta(x + t_n h_n) - g_\beta(x)) - G_\beta(x)(h_n) + \tfrac{2}{3}V.$$

Если мы закрепим такое достаточно большое β, то для $n \geqq n_0$ при достаточно большом n_0 получим, что $(1/t_n)(f(x + t_n h_n) - f(x)) - F(x)(h_n) \in V$. Достаточно выбрать n_0 так, чтобы для $n \geqq n_0$ было:

$$\frac{1}{t_n}(g_\beta(x + t_n h_n) - g_\beta(x)) - G_\beta(x)(h_n) \in \tfrac{1}{3}V,$$

что всегда можно вследствие дифференцируемости g_β. Этим доказательство закончено.

3,3,2. *Пусть D — пр. Фр., E — лин. топ. пр. Пусть $f_\alpha \in \mathscr{F}(D, E)$, $f \in \mathscr{F}(D, E)$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{F}(D, E))$ и пусть*

1) *для каждого $x \in D : f_\alpha(x) \to f(x)$;*

2) *f_α является глобально к-дифференцируемой;*

3) *для каждого $h \in D : \kappa^*(f_\alpha)(.)(h) \to F(.)(h)$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$;*

4) *для каждого $h \in D$ множество функций $\kappa^*(f_\alpha)(.)(h)$ ограничено в $\mathscr{F}_\kappa(D, E)$. Тогда f глобально к-дифференцируема и $\kappa^*(f) = F$.*

Доказательство. Чтобы мы могли применить теорему 3,3,1, нам надо доказать, что $\kappa^*(f_\alpha) \to F$ в пространстве $F_\kappa(D, \mathscr{F}_\kappa(D, E))$. На основании предположений 3, 4 и теоремы 1,3,11 легко получим, что $\kappa^*(f_\alpha)(.)(h) \to F(.)(h)$ равномерно в h на компактных множествах. Отсюда вытекает, что $\kappa^*(f_\alpha)(x)(h) \to F(x)(h)$ равномерно на компактных множествах в x и h и, следовательно, что $\kappa^*(f_\alpha) \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{F}_\kappa(D, E))$.

4. НЕСКОЛЬКО СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕОРЕМ

4,1. Вспомогательные теоремы. 4,1,1. Опорную систему δ мы назовем регулярной, если ей будет принадлежать каждое выпуклое симметрическое замкнутое множество $A \subseteq E$, обладающее следующим свойством: для каждого $V \in \mathfrak{V}(E)$ существует $A' \in \delta$ так, что $A' + V \supseteq A$.

4,1,2. *Для каждого E система $\lambda(E)$ представляет особой регулярную опорную систему.*

4,1,3. *Опорная система $\kappa(E)$ является регулярной тогда и только тогда, когда каждое выпуклое сим. замкнутое предкомпактное*) множество в E является компактным.*

4,1,4. *Пусть E_1, E_2 — два лин. топ. пр., δ_1 — опорная система в E_1, δ_2 — регулярная опорная система в E_2 и $\mathbf{L} \subseteq \mathscr{L}(E_1, E_2)$. Если $\mathbf{L}$ предкомпактно в $\mathscr{L}_\delta(E_1, E_2)$ и $\mathbf{L} \subseteq \mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2)$, то для каждого $A_1 \in \delta_1$ существует $A_2 \in \delta_2$ так, что $\{L(x) : x \in A_1, L \in \mathbf{L}\} \subseteq A_2$.*

Доказательство. Выберем $V \in \mathfrak{V}(E_2)$ и $A_1 \in \delta_1$. Обозначим $\mathbf{V} = \{L : L \in \mathscr{L}(E_1, E_2), L(A_1) \subseteq V\}$. Тогда, очевидно, $\mathbf{V} \in \mathfrak{V}(\mathscr{L}_{\delta_1}(E_1, E_2))$. Потому что по условию $\mathbf{L}$ является предкомпактным в $\mathscr{L}_\delta(E_1, E_2)$ существует конечное число $L_1, L_2, \ldots, L_n \in \mathbf{L}$ так, что для каждого $L \in \mathbf{L}$ можем найти $1 \leqq i \leqq n$, для которото $L - L_i \in \mathbf{L}$, т. е. $(L - L_i)(A_1) \subseteq V$. Следовательно, также $L(A_1) \subseteq L_i(A_1) + V$. Тогда $\{L(x) : L \in \mathbf{L}, x \in A_1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (L_i(A_1) + V) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} L_i(A_1)) + V$.

*) Предкомпактное = вполне ограниченное.

Но из предположения $\mathbf{L} \subseteq \mathscr{L}^{\delta_1\delta_2}(E_1, E_2)$ вытекает, что существует $A'_2 \in \delta_2$, для которово $\bigcup_{i=1}^{n} L_i(A_1) \subseteq A'_2$. Следовательно, $\{L(x) : x \in A_1, L \in \mathbf{L}\} \subseteq A'_2 + V$. Теперь уже достаточно сослаться на регулярность δ и мы получим требуемое заключение.

4,2. Дифференцируемость и ограниченость. 4,2,1. *Пусть D — пр. Фр., E — лин. топ. пр. и δ — опорная система в D, γ — регулярная опорная система в E и пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. Если*

1) *f является δ-диф. в точке x,*

2) *$f \in \mathscr{F}^{\delta\gamma}(D, E)$,*

то $\delta^{\cdot}(x)(f) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, E)$.

Доказательство. Пусть $A \in \delta$. Требуется доказать, что $\overline{(LA)} \in \gamma$ если положить $L = \delta^{\cdot}(x)(f)$. Выберем какое-нибудь $V \in \mathfrak{B}(E)$. Тогда существует $t_0 > 0$ так, что для $h \in A$ будет

$$\frac{1}{t_0}\left(f(x + t_0 h) - f(x)\right) - L(h) \in V.$$

Затем из предположения ограниченности функции f легко обнаружим, что $\{(1/t_0)\left(f(x + t_0 h) - f(x)\right) : h \in A\} \subseteq A' \in \gamma$. Следовательно, $\overline{(LA)} \subseteq A' + V$, и из регулярности γ вытекает, что $\overline{(LA)} \in \gamma$, что требовалось доказать.

4,2.2. *Пусть D — пр. Фр., E — лин. топ. пр., δ — опорная система в D, γ — — опорная система в E. Если*

1) *f глобально δ-диф.,*

2) *для каждого $A \in \delta$ существует $A' \in \gamma$ так, что $\{\delta^*(f)(x)(h) : x \in A, h \in A\} \subseteq A'$,*

то $f \in \mathscr{F}^{\delta\gamma}(D, E)$.

Доказательство. Ради краткости обозначим $F = \delta^*(f)$. Пусть теперь $A \in \delta$. Для $x \in A$ имеем $f(x) \in f(0) + \overline{co}\,\{F(\alpha x)(x) : 0 \leqq \alpha \leqq 1\}$ и, следовательно, $f(A) \subseteq f(0) + \overline{co}\{F(\alpha x)(x) : 0 \leqq \alpha \leqq 1,\ x \in A\}$. Но по нашему предположению $\overline{co}\{F(\alpha x)(x) : 0 \leqq \alpha \leqq 1,\ x \in A\} \subseteq A' \in \gamma$ и отсюда уже получаем $f(A) \subseteq \subseteq A'' \in \gamma$, ч.т.д.

4,2,3. *Пусть D — пр. Фр., E — лин. топ. пр., δ — опорная система в D, γ — регулярная опорная система в E и пусть $f \in \mathscr{F}(D, E)$. Если*

1) *f глобально δ-диф.,*

2) *для каждого $A \in \delta$ множество $\{\delta^*(f)(x) : x \in A\}$ является предкомпаткным в $\mathscr{L}_\delta(D, E)$,*

3) *для каждого* x *выполнено* $\delta^*(f)(x) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, E)$,
то $f \in \mathscr{F}^{\delta\gamma}(D, E)$.

Доказательство вытекает непосредственно из 4,2,2 и из 4,1,4.

4,3. Произведение операторовых функций и его дифференцируемость. 4,3,1. *Пусть* D *— пр. Фр.,* E_1, E_2, E_3 *— лин. топ. пр.,* δ *— опорная система в* D. *Далее, пусть* $F_1 \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E_1, E_2))$, $F_2 \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E_2, E_3))$ *и пусть*

1) *каждое предкомпактное симметричное выпуклое замкнутое множество в* E_2 *является компакшным,*

2) F_1 *является* δ*-диф. в точке* x *при топологии* $\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2)$,

3) F_2 *является* δ*-диф. в точке* x *при топологии* $\mathscr{L}_\kappa(E_2, E_3)$,

4) *если* $\gamma = \kappa(\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2))$, *то* $\delta^\cdot(x)(F_1) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, \mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2))$.

Тогда $F_2 \odot F_1$ *является* δ*-диф. в точке* x *при топологии* $\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_3)$ *и*

$$\delta^\cdot(x)(F_2 \odot F_1)(h) = F_1(x) \circ \delta^\cdot(x)(F_1)(h) + \delta^\cdot(x)(F_2)(h) \circ F_1(x)\,.$$

Доказательство. Обозначим $\bar{E}_1 = \mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2)$ и $\bar{E}_2 = \mathscr{L}_\kappa(E_1, E_3)$ и определим функции $f \in \mathscr{F}(D, \bar{E}_1)$ и $F \in \mathscr{F}^\cdot(D, \mathscr{L}(\bar{E}_1, \bar{E}_2))$ так:

$$f(x) = F_1(x)\,, \quad F(x)(L) = F_2(x) \circ L(L \in \bar{E}_1)\,.$$

Чтобы мы могли применить теорему 3,1,3, то нам надо теперь доказать, что наши новые функции f, F удовлетворяют условиям 1, 2, 3 этой теоремы. Что выполнены условия 1, 3 из 3,1,3, ясно на основании наших предположений 2, 4. Итак, остается доказать 2 из 3,1,3. Мы должны доказать, что F δ-дифференцируема при топологии $\mathscr{L}_\kappa(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$. Для этого, очевидно, достаточно доказать следующее: если $\mathbf{L} \in \kappa(\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_2))$, $M_n \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$, $M_n \to 0$ в $\mathscr{L}_\kappa(E_2, E_3)$, то $M_n \circ L \to 0$ равномерно на $\mathbf{L}$ при топологии $\mathscr{L}_\kappa(E_1, E_3)$. Значит, надо доказать, что для каждого $V \in \mathfrak{V}(E_3)$ и $A_1 \in \kappa(E_1)$ существует n_0 так, что для $n \geqq n_0$, $x \in A_1$ и $L \in \mathbf{L}$ будет $M_n(L(x)) \in V$. По нашему предположению 1) о пространстве E_2 является $\kappa(E_2)$ регулярным и, следовательно, в силу леммы 4,1,4 существует множество $A_2 \in \kappa(E_2)$ такое, что для каждого $x \in A_1$ и $L \in \mathbf{L}$ имеем $L(x) \in A_2$. Далее, очевидно существует n_0 так, что для $n \geqq n_0$ и $y \in A_2$ имеем $M_n(y) \in V$. Следовательно, для $n \geqq n_0$, $x \in A_1$ и $L \in \mathbf{L}$ выполнено: $M_n(L(x)) \in V$, что требовалось доказать. Этим закончено доказательство нашей теоремы.

4,3,2. *Пусть* D *— пр. Фр.,* E *— лин. топ. пр.,* δ *— опорная система в* D. *Далее, пусть* $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(E, E))$ *и пусть*

1) *каждое предкомпактное симметрическое выпуклое замкнутое множество в* E *является компактным,*

2) F *является* δ*-диф. в точке* x *при топологии* $\mathscr{L}_\kappa(E, E)$,

3) *если* $\gamma = \kappa(\mathscr{L}_\kappa(E, E))$, *то* $\delta^\cdot(x)(F) \in \mathscr{L}^{\delta\gamma}(D, \mathscr{L}_\kappa(E, E))$.

Тогда $F^{\odot n}$ является δ-диф. в точке x при топологии $\mathscr{L}_\kappa(E, E)$ и

$$\delta^{\cdot}(x)\,(F^{\odot n})\,(x)\,(h) = \sum_{k=1}^{n} F^{\odot(k-1)} \circ \delta^{\cdot}(x)\,(F)\,(h) \circ F^{\odot(n-k)}(x)\,.$$

Замечание. Если F является коммутативной, т. е. для каждого $x, y \in D$ выполнено: $F(x) \circ F(y) = F(y) \circ F(x)$, то

$$\delta^{\cdot}(x)\,(F^{\odot n})\,(x)\,(h) = n\, F^{\odot(n-1)}(x) \circ \delta^{\cdot}(x)\,(F)\,(h)\,.$$

Доказательство проводится по индукции на основании 4,3,1 путем разложения произведения в сумму разностей, причем надо следить за некоммутативностью.

Литература

[1] *N. Bourbaki:* Topologie générale. Chapitre I—II. Paris 1940.

[2] *N. Bourbaki:* Espaces vectoriels topologiques. Chapitre I—IV. Paris 1955.

[3] *A. D. Michal:* Le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Paris 1958.

Summary

GENERAL THEORY OF DIFFERENTIABILITY IN LINEAR TOPOLOGICAL SPACES

MIROSLAV SOVA, Praha

In this paper there is given a study of differentiability of functions defined in a Fréchet space with values in an arbitrary linear topological (locally convex) space. Different types of differentiability are defined determined by a fixed system of subsets on which the difference quotient converges uniformly. Then we have for example the "compact" differential, the "bounded" differential (which coincides with the classical Fréchet differential if the domain of definition is a Banach space). Theorems are then given on differentiability of some operations on functions (product, substitution, limit). These results seem to be in satisfactory analogy with the classical theory of the Fréchet differential in Banach spaces (or in finite-dimensional spaces).