Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

Über Verbandsgruppen mit zwei Erzeugenden

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 3, 444–454

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100632`

Чехословацкий матемаический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

ÜBER VERBANDSGRUPPEN MIT ZWEI ERZEUGENDEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Eingegangen am 1. Juli 1963)

G. BIRKHOFF [1, S. 221, Problem 96] hat die folgende Frage gestellt: Man soll die freie Verbandsgruppe (= l-Gruppe) mit zwei Erzeugenden charakterisieren. Inwieweit ich weiß, ist diese Frage bisher nich gelöst. In dieser Arbeit werden l-Gruppen mit zwei Erzeugenden x, y untersucht, wobei $0 < x$ ist und $[0, x]$ ein Primintervall ist (diese Tatsache wollen wir mit $0 \prec x$ bezeichnen).

Im § 1 werden einige Bezeichnungen eingeführt. § 2 enthält Hilfsergebnisse über Kardinalsummen von l-Gruppen. Im § 3 sind Beispiele von l-Gruppen beschrieben, die mit G_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnet werden. Im § 4 wird bewiesen, daß jede l-Gruppe mi zwei Erzeugenden x, y, wobei $0 \prec x \ll y$ gilt, zu einer der l-Gruppen G_m isomorph ist. Im § 5 beschreibt man alle l-Gruppen mit zwei Erzeugenden x, y, wo $0 \prec x$ gilt. Im § 6 untersuchen wir l-Gruppen mit Erzeugenden y, x_i $(i \in M)$, wobei $0 \prec x_i$ für jedes $i \in M$ ist.

1. Bezeichnungen. Für l-Gruppen werden wir die Bezeichnungen nach [1] benutzen; die Ergebnisse aus [1, § 1, § 4] werden als bekannt vorausgesetzt. Erwähnen wir die folgende Behauptung (vgl. [1]; G ist eine beliebige l-Gruppe):

(α) *Ist* $a, b, c \in G$, $a \cap b = a \cap c = 0$, *so gilt* $a + b = a \cup b = b + a$, $a \cap (b + c) = 0$.

Wenn $a \cap b = 0$ ist, so heißen die Elemente a, b *disjunkt*. Die Elemente $a^+ = a \cup 0$, $-a^- = -(a \cap 0)$ sind immer disjunkt und es gilt $a = a^+ + a^-$. Wenn für jede ganze Zahl n die Beziehung $na < b$ erfüllt ist, so schreiben wir $a \ll b$.

Wir werden l-Gruppen G mit Erzeugenden x, y bzw. x_i, $y (i \in M)$ untersuchen, die eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

(S_0) $0 \prec x \ll y$.
(S_1) $0 \prec x$, $0 < y$.
(S_2) $0 \prec x$ und y ist ein beliebiges Element von G.
(S_3) $0 \prec x_i \ll y$ $(i \in M \neq \emptyset)$.

Ist G eine l-Gruppe, so bezeichnen wir mit $G(+)$ die entsprechende Gruppe (die Halbordnung wird dabei nicht in Betracht genommen). Das Symbol $G(\leqq)$ hat eine analoge Bedeutung. Für $A \subset G$ sei $v'(A)$ bzw. $v(A)$ die durch A erzeugte Untergruppe von $G(+)$ bzw. l-Untergruppe der l-Gruppe G. Jede Teilmenge $A \subset G$ ist durch die induzierte Relation $\leqq$ teilweise geordnet.

2. Kardinalsummen der l-Gruppen. Es sei $T = \{G_j\}$ $(j \in J \neq \emptyset)$ ein System von l-Untergruppen einer l-Gruppe G. Es sei $x \in G$,

$$x = a_1 + \ldots + a_n . \tag{2.1}$$

Setzen wir voraus, daß es zu jedem a_i ein Index $j(i) \in J$ mit $a_i \in G_{j(i)}$ gibt und daß für $i_1 \neq i_2$ auch $G_{j(i_1)} \neq G_{j(i_2)}$ ist. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir (2.1) eine *T-Darstellung von x* nennen.

Die l-Gruppe G heißt Kardinalsumme ihrer l-Untergruppen $G_j (j \in J)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Gruppe $G(+)$ ist direkte Summe ihrer Untergruppen $G_j(+)$.

b) Wenn (2.1) eine T-Darstellung von x ist, so ist $x \geqq 0$ genau dann, wenn $a_i \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Im solchen Fall schreiben wir $G = \dot{\sum} G_j$ $(j \in J)$ (vgl. z.B. Conrad [2, § 2]). Ist $J = \{1, \ldots, n\}$, so schreiben wir auch $G = G_1 \dotplus \ldots \dotplus G_n$.

Bemerkung. Aus dieser Definition folgt: Es sei $G = \dot{\sum} G_j$ $(j \in J)$ und es seien $j_1, \ldots, j_n$ voneinander verschiedene Elemente von J. Ist $a_i, b_i \in G_{j_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $a = a_1 + \ldots + a_n$, $b = b_1 + \ldots + b_n$, so gilt $a \leqq b$ genau dann, wenn $a_i \leqq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ist.

2.1. *Es sei $T = \{G_j\}$ $(j \in J)$ ein System von l-Untergruppen einer l-Gruppe G mit folgenden Eigenschaften: wenn $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$, $a_1 \in G_{j_1}^+$, $a_2 \in G_{j_2}^+$ ist, so gilt $a_1 \cap a_2 = 0$. Dann ist $v'(\bigcup G_j)$ eine l-Untegruppe von G und $v'(\bigcup G_j) = \dot{\sum} G_j$ $(j \in J)$.*

Beweis. a) Aus $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$, $b_1 \in G_{j_1}$, $b_2 \in G_{j_2}$ folgt $|b_1| \cap |b_2| = 0$, also nach (α) $b_1 + b_2 = b_2 + b_1$. Daraus ergibt sich, daß die Menge $v'(\bigcup G_j)$ der Menge aller $x \in G$ gleich ist, für die es eine T-Darstellung gibt. Wenn $x, y \in v'(\bigcup G_j)$ ist, so können wir voraussetzen, daß x bzw. y in der Form (2.1) bzw.

$$y = b_1 + \ldots + b_n$$

derart darstellbar ist, daß $a_i, b_i \in G_{j(i)}$ gilt (in der Darstellung von x bzw. y kann man nämlich an passenden Stellen neue Summanden setzen, die gleich 0 sind). Untersuchen wir zuerst den Fall, wenn $a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Dann gilt nach (α)

$$\begin{aligned} x \cup y &= (a_1 + \ldots + a_n) \cup (b_1 + \ldots + b_n) = (\bigcup a_i) \cup (\bigcup b_i) = \\ &= \bigcup (a_i \cup b_i) = (a_1 \cup b_1) + \ldots + (a_n \cup b_n) \in v'(\bigcup G_j) \end{aligned}$$

und in analoger Weise

$$\begin{aligned} x \cap y &= (\bigcup a_i) \cap (\bigcup b_i) = \bigcup (a_i \cap b_i) = \\ &= (a_1 \cap b_1) + \ldots + (a_n \cap b_n) \in v'(\bigcup G_j) . \end{aligned}$$

Es seien ferner a_i, b_i beliebige Elemente von $G_{j(i)}$. Bezeichnen wir $z = (a_1 \cap b_1) + \ldots + (a_n \cap b_n)$, $x' = x - z$, $y' = y - z$. Da $x' = a'_1 + \ldots + a'_n$, $a'_i = a_i - a_i \cap b_i \geqq 0$, $y' = b'_1 + \ldots + b'_n$, $b'_i = b_i - a_i \cap b_i \geqq 0$ gilt, folgt aus dem schon bewiesenen die Beziehung $x' \cup y' \in v'(\bigcup G_j)$, also das Element $x \cup y = x' \cup y' + z$ gehört auch zu der Menge $v'(\bigcup G_j)$. In änlicher Weise beweist man die analoge Behauptung für $x \cap y$. Die Menge $v'(\bigcup G_j)$ ist also eine l-Untergruppe von G.

b) Ferner wollen wir beweisen, daß $v'(\bigcup G_j)$ eine Kardinalsumme der l-Gruppen G_j ist. Aus der Definition der direkten Summe von Gruppen folgt, daß es genügt die Behauptung für den Fall zu beweisen, wenn die Menge T endlich ist. Es sei $T = \{G_1, \ldots, G_n\}$. Aus den in a) bewiesenen Ergebnissen folgt, daß jede Gruppe $G_j(+)$ ein Normalteiler von $v'(\bigcup G_j)(+)$ ist. Bezeichnen wir $G'_j = v'(\bigcup G_k)\,(k \in J,\ k \neq j)$. Es ist zu beweisen, daß $G_j \cap G'_j = \{0\}$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Untersuchen wir z.B. G_1, G'_1. Jedes Element aus G'_1 kann in der Form $a_2 + .. + a_n$, $a_i \in G_i$, $i = 2, \ldots, n$ dargestellt werden. Es sei $a_1 \in G_1 \cap G'_1$, d.h. $a_1 = a_2 + \ldots + a_n (a_i \in G_i)$, und es sei $a_1 \geqq 0$. Dann ist $a_1 \leqq |a_2| + \ldots + |a_n| = z$. Da $a_1 \cap |a_j| = 0$ für $j = 2, \ldots, n$ gilt, bekommen wir nach (α) $a_1 \cap z = 0$, also $a_1 = 0$, $G_1 \cap G'_1 = \{0\}$. Damit haben wir bewiesen, daß die Gruppe $v'(\bigcup G_j)(+)$ eine direkte Summe ihrer Untergruppen $G_j(+)$ ist.

Setzen wir voraus, daß (2.1) eine T-Darstellung von $x \in v'(\bigcup G_j)$ ist und es sei $x \geqq 0$. Nehmen wir z.B. das Element a_1 in Betracht. Dann ist

$$- a_1^- \leqq a_1^+ + a_2 + \ldots + a_n\,,$$

$$- a_1^- \leqq a_1^+ + a_2^+ + \ldots + a_n^+\,.$$

Da das Element $- a_1^-$ mit jedem auf der rechten Seite der letzten Ungleichung auftretenden Element disjunkt ist, muß $-a_1^-$ auch mit der Summe dieser Elemente disjunkt sein, also ist $- a_1^- = 0$, $a_1 \geqq 0$.

3. l-Gruppen G_m. Betrachten wir die folgenden *Beispiele von l-Gruppen.*

3.1. Es sei C die Menge aller ganzen Zahlen (mit der üblichen Operation $+$ und mit der natürlichen Anordnung). F' sei die Menge aller auf C definierten Funktionen, deren Werte ganze Zahlen sind und F sei die Menge derjenigen $f \in F'$, deren Werte nur auf einer endlichen Menge $M_f \subset C$ von Null verschieden sind. Gilt $f(i) = a_i$, so bezeichnen wir die Funktion f auch mit dem Symbol $(\ldots, a_i, \ldots)$; a_i heißt i-te Komponente von f. Auf der Menge F' erklären wir die Operationen $+$, $\cap$, $\cup$ komponentenweise. F' ist dann eine l-Gruppe und F ist l-Untergruppe von F'. Für $n \in C$, $f \in F'$ setzen wir $p_n f = (\ldots, b_i, \ldots)$, wo $b_i = a_{i-n}$ ist (d.h. die Komponenten von $p_n f$ entstehen aus den Komponenten von f durch Rechtsverschiebung um n Stellen). Es sei G_0 die Menge aller Paare (n, f), $n \in C$, $f \in F$. Setzen wir $(n_1, f_1) < (n_2, f_2)$, wenn $n_1 < n_2$ ist, oder wenn $n_1 = n_2$ und zugleich $f_1 < f_2$ gilt. Die Operation $+$ definieren wir in G_0 folgendermaßen:

$$(n_1, f_1) + (n_2, f_2) = (n_1 + n_2,\ p_{n_2} f_1 + f_2)\,. \tag{3.1}$$

Dann ist G_0 eine l-Gruppe. (In [3] wurde die l-Gruppe G_0 zur Lösung des von G. Birkhoff gestellten Problems über die Hauptideale der l-Gruppen benutzt; vgl. auch Conrad [2, S. 216] (dort wird anstatt der Rechtsverschiebung die Linksverschiebung angewadnt).)

3.2. Benutzen wir die gleichen Bezeichnungen wie in 3.1. Es sei m eine natürliche Zahl. Bezeichnen wir mit F_m die Menge derjenigen $f \in F'$, für die gilt: ist $i, j, k \in C$, $i - j = km$, dann ist $f(i) = f(j)$. Es sei G_m die Menge aller Paare (n, f), $n \in C$, $f \in F_m$. Die Halbordnung in G_m definieren wir in änlicher Weise wie in G_0 (d.h. lexikographisch) und die Operation $+$ erklären wir in G_m auch durch (3.1). Es ist leicht zu beweisen, daß dann G_m eine l-Gruppe ist. Insbesondere ist G_1 zu $C \circ C$ isomorph (das Symbol $\circ$ bedeutet hier die lexikographische Multiplikation (vgl. [1, S. 237])); G_2 ist zu der in [1, S. 216, Ex. 6] beschriebenen l-Gruppe isomorph.

3.3. Betrachten wir die l-Gruppe G_0. Für jedes $n \in C$ bezeichnen wir $s^n = (0, f)$, wo $f(n) = 1, f(i) = 0$ für $i \neq n$ ist und es sei $F^n = \{ks^n\}$ $(k \in C)$, $\bar{F} = \{(0, f) | f \in F\}$. Ferner setzen wir $q = (1, f)$, wo $f(i) = 0$ für jedes $i \in C$. ist. Aus der Definition von G_0 bekommt man unmittelbar die folgenden Behauptungen:

a) $\bar{F}$ und F^n sind l-Untergruppen von G_0.

b) Das Element $s^n > 0$ ist ein Erzeugender der l-Gruppe F^n.

c) $\bar{F} = \dot{\sum} F^n (n \in C)$.

d) Jedes Element $g \in G_0$ kann eindeutig in der Form $g = nq + \bar{f}$ mit $n \in C$, $\bar{f} \in \bar{F}$ dargestellt werden.

e) Wenn in der erwähnten Darstellung $g_i = n_i q + \bar{f}_i$ $(i = 1, 2)$ gilt, so ist $g_1 < g_2$ genau dann, wenn entweder $n_1 < n_2$ oder $n_1 = n_2$ und zugleich $\bar{f}_1 < \bar{f}_2$ ist.

f) Für jedes $n \in C$ gilt $s^n + q = q + s^{n+1}$.

3.4. Umgekehrt beweist man leicht:

Es sei G eine l-Gruppe, in der es Elemente $s^n (n \in C)$, q und Teilmengen $\bar{F}, F^n (n \in C)$ gibt (die Bezeichnung ist jetzt von 3.1 unabhängig), so daß die Bedingungen a)–f) aus 3.4 erfüllt sind (anstatt G_0 wird jetzt G gesetzt). Dann ist G zu G_0 isomorph. (Beachten wir, daß (3.1) aus f) (unter Berücksichtigung von a)–d)) durch Induktion folgt.)

3.5. Betrachten wir ferner die l-Gruppe G_m. In diesem Falle bezeichnen wir $s^n = (0, f)$, wo $f(n) = 1$, $f(i) = 0$ für $i \not\equiv n \pmod{m}$. Es sei $F^n = \{ks^n\}$ $(k \in C)$, $\bar{F} = \{(0, f) \mid f \in F_m\}$ und die Bedeutung von q sei dieselbe wie in 3.3. Dann gelten die Behauptungen a')–f'), die aus a)–f) dadurch entstehen, daß wir G_0 dureh G_m ersetzen und daß in c) anstatt $n \in C$ die Beziehung $n \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ vorausgesetzt ist. Ferner gilt:

g') $s^{n+m} = s^n$ für jedes $n \in C$.

Umgekehrt: ist G eine l-Gruppe, in der es Elemente q, $s^n (n \in C)$ gibt, so daß die Bedingungen a')–g') erfüllt sind, dann ist G zu G_m isomorph.

4. Das System S_0. Wir brauchen einige Hilfsergebnisse; es sei G eine beliebige l-Gruppe.

4.1. *Aus $x, y \in G$, $0 \prec x$ folgt $0 \prec -y + x + y$.*

Beweis. Für jedes Element $y \in G$ ist die Abbildung $\varphi(x) = -y + x + y$ ein Automorphismus der halbgeordneten Menge $G(\leqq)$ und es gilt $\varphi(0) = 0$; daraus folgt die Behauptung.

4.2. *Es sei $0 \prec x$. Die Menge $\{nx\}$ $(n \in C)$ ist eine konvexe Teilmenge von G.*

Beweis. Bezeichnen wir $\{nx\} = X$. Setzen wir voraus, daß es ein Element $y \in G$, $y \notin X$ und ganze Zahlen n_1, n_2 gibt, so daß $n_1 x < y < n_2 x$ ist. Dann existiert die kleinste natürliche Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: es gibt $a \in G$ mit $0 < a < nx$, $a \notin X$. Offensichtlich ist $n > 1$. Wäre $x < a$, so haben wir $0 < a - x < (n-1)x$, $a - x \notin X$, was ein Widerspruch mit der Minimallität von n ist. Die Elemente a und x sind also unvergleichbar. Bezeichnen wir $a \cup x = a_1$. Offensichtlich ist $a \cap x = 0$. Wäre $a_1 < 2x$, so bekommen wir (vgl. [1, S. 219, Thm. 4]) $a = a - a \cap x = a_1 - x \leqq 2x - x = x$, ein Widerspruch. In änlicher Weise führt auch die Voraussetzung $2x \leqq a_1$ zum Widerspruch, denn es ist dann $x = 2x - x \leqq a_1 - x = a - 0 = a$. Es bleibt nur die Möglichkeit $x < a_1 < nx$, $a_1 \parallel 2x$ [1]), die zu $0 < a_1 - x < (n-1)x$, $a_1 - x \parallel x$ führt, was auch ein Widerspruch ist. Damit ist der Beweis erbracht.

4.3. *Es sei H eine l-Gruppe, $p, q \in H$, $0 \prec p$, $0 \prec q$, $P = \{np\}$, $Q = \{nq\}$ $(n \in C)$. Dann ist $P = Q$ oder $P \cap Q = \{0\}$.*

Beweis. Ist $P \cap Q = U \neq (0)$, so gibt es ein Element $u \in U$, $u > 0$. Dann gilt $u \geqq p$, $u \geqq q$, $0 \in U$, und da U nach 4.2 eine konvexe Teilmenge von G ist, gehört p und q zu U. Daraus folgt $p = q$ (denn U ist eine Kette und die Elemente p, q sind obere Nachbaren von 0); also ist $P = Q$.

4.3.1. Folgerung. *Es sei $x, y, z \in G$, $0 \prec x$, $-y + x + y = p$, $-z + x + z = q$, $P = \{np\}$, $Q = \{nq\}$ $(n \in C)$. Dann ist entweder $P = Q$ oder $P \cap Q = \{0\}$.*

Bis zu Ende des § 4 setzen wir voraus, daß $x, y \in G$, $0 \prec x \ll y$ ist. Für jedes $n \in C$ bezeichnen wir $x_n = -ny + x + ny$, $X_n = \{tx_n\}$, wobei t die Menge C durchläuft. Es sind zwei Fälle möglich:

(a) Für beliebige $n_1, n_2 \in C$, $n_1 \neq n_2$ ist $x_{n_1} \neq x_{n_2}$.

(b) Es gibt $n_1, n_2 \in C$, $n_1 \neq n_2$, so daß $x_{n_1} = x_{n_2}$ ist. Im Fall (b) gibt es eine kleinste natürliche Zahl m mit $x_m = x$. Für $n_1, n_2 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $n_1 \neq n_2$ ist dann $x_{n_1} \neq x_{n_2}$. Im Falle (a) bzw. (b) setzen wir $T = \{X_n\}$ $(n \in C)$ bzw. $T = \{X_n\}$ $(n \in \{0, 1, \ldots, m-1\})$. Bezeichnen wir $H = v'(\bigcup X_n)$ $(X_n \in T)$.

4.3.2. *H ist eine konvexe l-Untergruppe von G und $H = \dot{\sum} X_n (X_n \in T)$.*

Der Beweis folgt aus 4.1, 4.2, 4.3.1 und 2.1.

[1]) Das Symbol $u \parallel v$ bedeutet, daß die Elemente u, v unvergleichbar sind.

4.4. *Für jedes $h \in H$ ist $h < y$.*

Beweis. Es sei $t, n \in C$, $t > 0$. Dann ist $tx_n = -ny + tx + ny$; die Beziehung $tx_n < y$ ist also mit $tx < y$ äquivalent, daher ist $x_n \ll y$ für jedes $n \in C$. Es sei $z \in H$, $z > 0$. Nach 4.3.2 gibt es voneinander verschiedene ganze Zahlen $n(1), \ldots, n(k)$, so daß $z = c_1 x_{n(1)} + \ldots + c_n x_{n(k)}$ ist, wobei $c_1, \ldots, c_n$ natürliche Zahlen sind. Aus der Disjunktivität der Elemente $x_{n(j)}$ folgt $z = c_1 x_{n(1)} \cup \ldots \cup c_k x_{n(k)}$, also nach dem schon bewiesenen ist $z \leqq y$. Wäre jetzt $z = y$, so bekommt man $(c_1 + 1)\, x_{n(1)} \leqq y$, was nach der Bemerkung aus § 2 ein Widerspruch ist (da $x_{n(1)} > 0$, $(c_1 + 1)\, x_{n(1)} > c_1 x_{n(1)}$ gilt); daraus folgt $z < y$.

4.4.1. Folgerung. *Aus $c \in C$, $cy \in H$ folgt $c = 0$.*

Ist nämlich $c > 0$, $h \in H$, dann gilt $cy > h$. Wäre jetzt $c < 0$, $cy = h$, dann hätten wir $(-c)\, y = -h \in H$, was unmöglich ist.

Bezeichnen wir $K = v'(\{x, y\})$.

4.5. *Jedes Element $k \in K$ kann eindeutig in der Form $k = cy + h(c \in C,\ h \in H)$ dargestellt werden.*

Beweis. Nach der Definition der Menge K können wir $k \in K$ in der Form $k = c_1 x + d_1 y + \ldots + c_l x + d_l y$ darstellen, wobei l eine natürliche Zahl ist und c_i, d_i ganze Zahlen sind. Durch Induktion in Bezug auf l beweist man, daß k in der Form $k = cy + (-e_1 y + c_1 x + e_1 y) + \ldots + (-e_l y + c_l x + e_l y) = cy + h$ darstellbar ist; offensichtlich ist $h \in H$. Wenn zugleich $k = c'y + h'$, $h' \in H$ gilt, so ist $(c - c')\, y = h' - h$, also nach 4.4.1 ist $c - c' = 0$, $h' - h = 0$.

4.6. *Es sei $c, c' \in C$, $h, h' \in H$. Die Beziehung $cy + h > c'y + h'$ gilt genau dann, wenn $c > c'$ ist, oder $c = c'$ und zugleich $h > h'$ ist.*

Beweis. Die Beziehung $cy + h > c'y + h'$ ist mit $(c - c')\, y > h' - h$ äquivalent und damit ist nach 4.4 und 4.4.1 die Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Da die Menge $\{cy\}$ $(c \in C)$ eine Kette ist und H ein Verband ist, folgt aus 4.6, daß auch K ein Verband ist. Es gilt auch die stärkere Behauptung:

4.7. *K ist ein Teilverband von $G(\leqq)$.*

Beweis. Da K eine Untergruppe von $G(+)$ ist und für $u, v \in K$ die Gleichungen $u \cup v = [0 \cup (v - u)] + u$, $u \cap v = [0 \cap (v - u)] + u$ erfüllt sind, genügt es zu zeigen, daß $0 \cup u \in K$, $0 \cap u \in K$ für jedes $u \in K$ ist. Es sei $u = cy + h$. Wenn $c > 0$ oder $c < 0$ ist, so gilt $0 \cup u = u$ bzw. $0 \cup u = 0$; ist $c = 0$, so haben wir $0 \cup u = 0 \cup h \in H \subset K$. In analoger Weise bekommt man die duale Behauptung.

Aus 4.7 folgt unmittelbar:

4.7.1. $v(\{x, y\}) = K$.

4.8. *Ist (a) erfüllt, so ist die l-Gruppe K zu G_0 isomorph.*

Der Beweis folgt aus 3.3, wenn man 4.7, 4.3, 4.5, 4.6 und die Gleichung

$$x_n + y = y + x_{n-1} \tag{4.1}$$

berücksichtigt.

4.9. *Ist* (b) *erfüllt, so sind die l-Gruppen* K *und* G_m *isomorph* (*wobei* m *die im Abs.* 4.3.1 *erklärte natürliche Zahl ist*).

Der Beweis folgt aus 4.7, 4.3.2, 4.5, 4.6 unter Benutzung von (4.1) un der Gleichung $x_m = x_0$ (aus dieser folgt $x_{n+m} = x_n$ für jedes $n \in C$).

Wir haben also den folgenden Satz:

4.10. Satz. *Es sei* G *eine l-Gruppe mit zwei Erzeugenden* x, y, *wobei* $0 \prec x$ *und* $x \ll y$ *ist. Dann ist* G *zu einer der l-Gruppen* G_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *isomorph.*

4.10.1. Man verifiziert leicht, daß jede l-Gruppe G_m zwei Erzeugende besitzt, so daß die Bedingung (S_2) erfüllt ist. Es genügt die Elemente s^0, q zu nehmen.

5. Die Systeme (S_1) **und** (S_2). Es sei $x, y \in G$, $0 \prec x$, $y > 0$. Untersuchen wir die l-Gruppe $v(\{x, y\})$. Da der Fall $x \ll y$ schon in § 4 erledigt wurde, setzen wir jetzt voraus, daß non $(x \ll y)$ ist. Es können also zwei Möglichkeiten auftreten:

(a) Es gibt $n \in C$, $n > 0$, so daß $y \leqq nx$ ist.
(b) Es gibt $n \in C$, $n > 0$ so daß $y \parallel nx$ gilt.

Im Falle (a) gibt es nach 4.2 ein $c \in C$ mit $y = cx$, also $v(\{x, y\})$ ist zu der l-Gruppe C isomorph. Im Falle (b) gibt es ein $n_1 \in C$ mit $y \cap nx = n_1 x < y$, $0 \leqq n_1 < n$; bezeichnen wir $y_1 = - n_1 x + y$. Dann ist $y_1 \cap (n - n_1) x = 0$, also $y_1 \cap x = 0$, $k_1 y_1 \cap k_2 x = 0$ für $k_1, k_2 \in C$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Bezeichnen wir ferner $X = \{kx\}$, $Y_1 = \{ky_1\}$, wobei k die Menge C durchläuft. Wir haben $v(\{x, y\}) = v(\{x, y_1\}) = v(X \cup Y_1)$; nach 2.1 ist aber $v(X \cup Y_1) = X \dotplus Y_1$, also $v(\{x, y\})$ ist zu $C \dotplus C$ isomorph. Unter Berücksichtigung von § 4 bekommen wir jetzt:

5.1. Satz. *Es sei* G *eine l-Gruppe mit zwei Erzeugenden* x, y, *wobei* $0 \prec x$, $0 < y$ *ist. Dann ist* G *zu einer der l-Gruppen* C, $C \dotplus C$, G_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *isomorph.*

5.1.1. Bemerkung. Es ist leicht einzusehen, daß jede der l-Gruppen C, $C \dotplus C$, G_m zwei Erzeugende besitzt, die dem System (S_1) genügen.

Es sei jetzt $x \in G$, $0 \prec x$ und y sei beliebiges Element von G. Bezeichnen wir $y^+ = y_1$, $- y^- = y_2$. Da $y_1 \cap y_2 = 0$ ist, können die Beziehungen $x \leqq y_1$, $x \leqq y_2$ nicht zugleich bestehen. Ferner folgt aus $y_2 = 0$ (wenn wir den trivialen Fall $y = 0$ nicht betrachten) die Beziehung $y > 0$, d.h. es handelt sich um die im Satz 5.1 beschriebene Situation; ist $y_1 = 0$, so haben wir $y < 0$, $- y > 0$ und die Untersuchung kann man wieder auf die Benutzung von 5.1 reduzieren. Setzen wir also voraus, daß $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ ist.

Untersuchen wir den Fall $x \leqq y_1$. Nach 5.1 ist $v(\{x, y_1\})$ zu einer der l-Gruppen C, $C \dotplus C$, G_m isomorph. Zugleich ist $x \cap y_2 = 0$ und daher $z \cap cy_2 = 0$ für jedes

$z \in v(\{x, y_1\})$, $z > 0$ und jedes $c \in C$, $c > 0$. Wenn man ferner die Gleichung $v(\{x, y\}) = v(\{x, y_1, y_2\}) = v(v\{x, y_1\} \cup \{ky_2\})\,(k \in C)$ in Betracht nimmt, so bekommt man nach 2.1 $v(\{x, y\}) = v(\{x, y_1\}) \dotplus \{ky_2\}\,(k \in C)$.

De Fall $x \leqq y_2$ ist analog. Es sei ferner $x \nleqq y_1$, $x \nleqq y_2$. Dann haben wir $x \cap y_1 = x \cap y_2 = 0$; die l-Gruppe $v(\{x, y_1\})$ ist in diesem Fall zu $C \dotplus C$ isomorph. Daraus folgt, daß $v(\{x, y\}) = v(\{x, y_1\}) \dotplus v(\{y_2\})$ zu $C \dotplus C \dotplus C$ isomorph ist. Insgesammt haben wir:

5.2. Satz. *Es sei G eine l-Gruppe mit zwei Erzeugenden, die dem System (S_2) genügen. Dann ist G zu einer der folgenden l-Gruppen isomorph*: $C, C \dotplus C, C \dotplus C \dotplus C, G_m, G_m \dotplus C\,(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

6. Die l-Gruppen $G(N, R)$ und die Bedingung (S_3). Die Überlegungen aus den Abs. 4.1–4.10 können für den Fall verallgemeinert werden, wenn $G = v(\{x_i\} \cup \{y\})$ ist, wobei $0 \prec x_i \ll y$ für jedes x_i gilt.

6.1. Es sei K eine nichtleere Menge. Für jedes $k \in K$ und jedes $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ sei eine Indexmenge D_m^k gegeben, $D_m^k = \{i_0^k, i_1^k, \ldots, i_{m-1}^k\}$ für $m > 0$ und $D_0^k = \{i_l^k\}\,(l \in C)$. $F(k, m)$ sei die Menge aller auf D_m^k definierten Funktionen, deren Werte ganze Zahlen sind, wobei jede dieser Funktionen nur in endlich vielen Punkten von Null verschieden ist. Die Operation $+$ und die Halbordnung ist in $F(k, m)$ in üblicher Weise erklärt. Dann ist $F(k, m)$ eine zu F_m isomorphe l-Gruppe (vgl. Abs. 3.1, 3.2; für $m = 0$ setzen wir $F_0 = F$). Es sei φ ein fest gewählter Isomorfismus der l-Gruppe F_m auf $F(k, m)$. Für $m \in C$ definieren wir den Operator p_n' auf $F(k, m)$ folgendermaßen: ist $x \in F_m$, $x' \in F(k, m)$, $\varphi(x) = x'$, so setzen wir $p_n'x' = \varphi(p_n x)$.

6.2. Es sei $N \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $R = \{N_k\}\,(k \in K)$ sei eine Zerlegung der Menge N, so daß jede Klasse N_k dieser Zerlegung höchstens abzählbar ist. Wenn N_k unendlich ist bzw. wenn N_k endlich ist und genau m Elemente besitzt, so werden wir N_k als gleich der Menge D_0^k bzw. D_m^k betrachten. Es sei F die Menge aller auf N definierten reellen ganzwertigen Funktionen, deren jede nur auf einer endlichen Teilmenge von N von Null verschieden ist. Für $f \in F$ bezeichnen wir mit f_{N_k} die zugehörige auf N_k definierte partielle Funktion. Für jedes $n \in C$ setzen wir jetzt $p_n''f = g$, wobei $g_{N_k} = p_n'f_{N_k}$ für jedes $k \in K$ ist.

Es sei $G(N, R)$ die Menge aller Paare (n, f) mit $n \in C$, $f \in F$. Für Elemente aus $G(N, R)$ definieren wir die Operation $+$ und die Halbordnung in gleicher Weise wie im Abs. 3.1 (wobei jetzt p'' anstatt p steht). Offensichtlich ist $G(N, R)$ eine l-Gruppe.

6.2.1. Es sei f^0 die auf N definierte Funktion, welche identisch gleich Null ist. Für jedes $j \in N$ sei $f_j \in G(N, R)$, so daß $f_j(j) = 1$, $f_j(j') = 0$ für $j' \in N$, $j' \neq j$. Bezeichnen wir $\bar{y} = (1, f^0)$, $\bar{y}_j = (0, f_j)$. Dann ist $0 \prec \bar{y}_j \ll \bar{y}$, $G(N, R) = v(\{\bar{y}_j\} \cup \{\bar{y}\})$.

Einige Schritte der folgenden Überlegung sind nur skizziert, da sie unmittelbare Verallgemeinerungen der analogen Überlegungen aus § 4 bilden.

6.3. Es sei $A = \{x_i\} \subset G$, $A \neq \emptyset$, $y \in G$; setzen wir voraus, daß $0 \prec x_i \ll y$ für jedes x_i gilt. Es sei $B = \{y_j\}$ $(j \in N)$ die Menge aller Elemente $-ny + x_i + ny$, wobei n bzw. x_i die Menge C bzw. A durchläuft. (Wir setzen voraus, daß die Indexe $j \in N$ so gewählt sind, daß $y_{j_1} \neq y_{j_2}$ für $j_1 \neq j_2$ gilt.) Nach 4.1 ist $0 \prec y_j$ für jedes y_j; es sei $Y_j = \{ny_j\}$ $(n \in C)$. Nach 4.3 und 2.1 ist $v(\bigcup Y_j) = \dot{\sum} Y_j (y_j \in B)$. Bezeichnen wir $\dot{\sum} Y_j = H$. In analoger Weise wie im Abs. 4.5 beweist man: ist $h \in H$, $n \in C$, so gibt es ein $h' \in H$, so daß $h + ny = ny + h'$ besteht. Die Menge G_1 aller Elemente aus G der Form $ny + h$ mit $n \in C$, $h \in H$ ist also eine Untergruppe der Gruppe $G(+)$.

Ähnlich wie im Abs. 4.4 kann man beweisen, daß $h < y$ für jedes $h \in H$ ist und daß aus $ny \in H$ die Gleichheit $n = 0$ folgt. Daraus bekommt man, daß die Darstellung des Elementes $g \in G_1$ in der Form $g = ny + h$ eindeutig ist. Es ergibt sich ferner, daß die Ungleichung $n_1 y + h_1 < n_2 y + h_2$ genau dann erfüllt ist, wenn entweder $n_1 < n_2$, oder $n_1 = n_2$ und zugleich $h_1 < h_2$ gilt; daraus folgt, daß G_1 ein Teilverband von G ist. Offenbar ist dann $G_1 = v(A \cup \{y\})$. Aus der Definition der Operation $+$ in $G(N, R)$ und aus $(-ny + kx + ny) + my = my + (-(n + m)y + kx + (n + m)y)$ folgt jetzt, daß es ein Isomorphismus $\psi : G \to G(N, R)$ gibt, wobei R die fogendermaßen definierte Zerlegung von N ist: die Elemente $j_1, j_2 \in N$ gehören zu derselben Klasse von R, wenn es ein $n \in C$ gibt, so daß $-ny + y_{j_1} + ny = y_{j_2}$ ist. (Für den Isomorphismus ψ gilt $\psi(y) = \bar{y}$; ist $h \in H = \dot{\sum} Y_j$, so gilt $\psi(h) = (0, f)$, wobei f folgendermaßen definiert ist: wenn die Komponente von h im direkten Summand Y_j gleich ny_j $(n \in C)$ ist, so haben wir $f(j) = n$.)

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

6.4. Satz. *Es sei G eine durch die Menge $\{x_i\} \cup \{y\}$ erzeugte l-Gruppe, wobei $\emptyset \neq \{x_i\}$ und jedes x_i die Bedingung $0 \prec x_i \ll y$ erfüllt. Dann gibt es eine l-Gruppe $G(N, R)$, die zu G isomorph ist.*

6.4.1. Bemerkung. Aus dem vorigen Beweis folgt: Es sei $G_1 = v(\{y\} \cup \{x_i\})$, $\{x_i\} \neq \emptyset$, $0 \prec x_i \ll y$ für jedes x_i, $z \in G_1$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $z \leqq ny$. (Wenn man nämlich die gleichen Bezeichunngen wie im Abs. 6.3 benutzt, so gibt es $h_1 \in H$ und $n_1 \in C$ mit $z = n_1 y + h_1$; für jede natürliche Zahl $n > n_1$ ist dann nach 6.3 $n_1 y + h_1 < ny$.

6.5. Es sei $\emptyset \neq A = \{x_i\} \subset G$, $y \in G$ und es sei $0 \prec x_i \leqq y$ für jedes $x_i \in A$. Bezeichnen wir $A_1 = \{x_i \mid x_i \ll y\}$, $A_2 = A - A_1$. Setzen wir voraus, daß die Menge A_2 endlich ist.

Für jedes $x_i \in A_2$ gibt es die kleinste natürliche Zahl $n_i > 1$ mit $n_i x_i \nleqq y$; bezeichnen wir $z_i = n_i x_i \cap y$. Da die Menge $\{kx_i\}$ $(k \in C)$ eine konvexe Teilmenge von G ist (vgl. Abs. 4.2) gilt $z_i = (n_i - 1) x_i$. Bezeichnen wir ferner $\sum z_i = y'$ (die Summation bezieht sich zu den Indexen i, für die $x_i \in A_2$ ist; im Falle $A_2 = \emptyset$ setzen wir $y' = 0$), $y - y' = y''$. Da für $x_j \in A_1$, $x_i \in A_2$ die Beziehung $x_i \cap x_j = 0$ gilt, ist auch $x_j \cap z_i = 0$, $x_j \cap \sum z_i = 0$ (die Bedeutung des Symbols $\sum$ ist dieselbe wie vorher), so daß

$$nx_j \cap y' = 0 \tag{6.1}$$

für jede natürliche Zahl n ist. Es sei n eine natürliche Zahl, $x_j \in A_1$. Dann ist $nx_j < y = y'' + y'$, also man kann (vgl. [1]) das Element nx_j in der Form $nx_j = a + b$ mit $0 \leqq a \leqq y''$, $0 \leqq b \leqq y'$ darstellen. Offensichtlich ist $b \leqq nx_j$, also nach (6.1) $b = 0$ und es gilt $nx_j \leqq y''$ für jede natürliche Zahl n. Wäre $nx_j = y''$, so hätten wir $(n + 1)\, x_j \nleqq y''$; also ist $nx_j < y''$. Aus $x_i \in A_2$, $x_i \leqq y''$ bekommen wir $y = y'' + y' \geqq x_i + (n_i - 1)\, x_i$, was ein Widerspruch ist. Es ist also

$$x_i \cap y'' = 0 \tag{6.2}$$

für jedes $x_i \in A_2$.

Da $y' \in v(A_2)$ ist, gilt

$$v(A \cup \{y\}) = v(A_1 \cup A_2 \cup \{y'\} \cup \{y''\}) = v(A_1 \cup A_2 \cup \{y''\}) = \\ = v(v(A_1 \cup \{y''\}) \cup v(A_2)) \,.$$

Nach 6.4.1 gibt es zu jedem $z \in v(A_1 \cup \{y''\})$ eine natürliche Zahl n derart, daß $z \leqq ny''$ ist; daraus und aus (6.2) bekommen wir: ist $z \in v(A_1 \cup \{y''\})$, $t \in v(A_2)$, $z \geqq 0$, $t \geqq 0$, so sind z und t disjunkt. Nach dem Abs. 2.1 ist also $v(v(A_1 \cup \{y''\}) \cup v(A_2)) = v(A_1 \cup \{y''\}) \dotplus v(A_2)$. Daraus ergibt sich

$$v(A \cup \{y\}) = v(A_1 \cup \{y''\}) \dotplus v(A_2) \,. \tag{6.3}$$

Ist $A_1 = \emptyset$, $y'' = 0$, so haben wir $v(A_1 \cup \{y''\}) = \{0\}$. Wenn $A_1 = \emptyset$ und $y'' \neq 0$ gilt, so ist $v(A_1 \cup \{y''\})$ zu C isomorph. Ist $A_1 \neq \emptyset$, $y'' = 0$, so gilt $v(A_1 \cup \{y''\}) = v(A_1)$. Nach 2.1 ist $v(A_1)$ die Kardinalsumme der l-Gruppen $\{kx_j\}$ $(x_j \in A_1)$, deren jede zu C isomorph ist. Gilt $A_1 \neq \emptyset$, $y'' \neq 0$, so ist $v(A_1 \cup \{y''\})$ nach 6.4 eine l-Gruppe vom Typ $G(N, R)$. Ferner ist $v(A_2) = \{0\}$ (falls $A_2 = \emptyset$) oder $v(A_2)$ ist eine Kardinalsumme der l-Gruppen $\{kx_i\}$ $(x_i \in A_2)$. Somit haben wir den folgenden Satz:

6.6. Satz. *Es sei $G = v(A \cup \{y\})$, $A \neq \emptyset$, wobei $0 \prec a_i \ll y$ für jedes $a_i \in A$ ist. Die Menge $A_2(y) = \{a_i \mid a_i \in A, \text{non } (a_1 \ll y)\}$ sei endlich. Dann ist G eine Kardinalsumme, $G = \dot{\sum} G_k$ wobei entweder jede der l-Gruppen G_k zu C isomorph ist, oder eine dieser l-Gruppen vom Typ $G(N, R)$ ist und die übrigen zu C isomorph sind.*

6.7. Satz. *Es sei $G = v(A \cup B)$, wobei die Mengen A, B den folgenden Bedingungen genügen:*

(a) *Es gilt $0 \prec x_i$ für jedes $x_i \in A$ und es ist $A \neq \emptyset$.*
(b) *Es ist $y_j > 0$ für jedes $y_j \in B$ und $B \neq \emptyset$.*
(c) *Aus $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$ folgt $y_1 \cap y_2 = 0$.*
(d) *Für jedes $y \in B$ ist die Menge $A_2(y) = \{x_i \mid x_i \in A,\ x_i \leqq y,\ x_i \text{ non } \ll y\}$ endlich.*

Unter diesen Voraussetzungen gilt $G = \dot{\sum} G_k$, wobei jede l-Gruppe G_k enweder zu C isomorph oder vom Typ $G(N, R)$ ist.

Beweis. Es sei $y \in B$; bezeichnen wir $A(y) = \{x_i \mid x_i \in A,\ x_i \leqq y\}$, $A_0 = A - \bigcup A(y)$ $(y \in B)$. Ferner sei $A_1(y) = A(y) - A_2(y)$. Aus (c) folgt, daß je zwei verschiedene Mengen aus dem System $\{A_0, A(y)\}$ zueinander disjunkt sind. Es gilt

$$v(A \cup B) = v[A_0 \cup (\bigcup(A(y) \cup \{y\}))] \, (y \in B) = v(v(A_0) \cup v(\bigcup[A(y) \cup \{y\}])) \, (y \in B) \, .$$

Die Struktur jeder der l-Gruppen $v(A(y) \cup \{y\})$ ist durch den Satz 6.6 beschrieben. Aus (c) folgt $n_1 y_1 \cap n_2 y_2 = 0$ für je zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 und beliebige $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$; nach 6.4.1 folgt dann aus $z \in v(A(y_1) \cup \{y_1\}$, $t \in v(A(y_2) \cup \{y_2\})$ $z \geqq 0$, $t \geqq 0$ die Beziehung $z \cap t = 0$. Nach 2.1 ist also $v(\bigcup(A(y) \cup \{y\})) = \dot{\sum} v(A(y) \cup \{y\}) \, (y \in B)$. Bezeichnen wir diese l-Gruppe mit Y und es sei $y \in Y$, $y > 0$. Aus der Struktur von Y und aus 4.1 folgt, daß es natürliche Zahlen n_j und Elemente $y_j \in B$ derart gibt, daß $y \leqq n_1 y_1 + \ldots + n_m y_m$ ist.

Ferner ist $v(A_0)$ entweder eine Kardinalsumme von l-Gruppen, die zu C isomorph sind, oder $v(A_0) = \{0\}$. Es sei $x \in v(A_0)$, $x > 0$; das Element x kann in der Form $x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ dargestellt werden, wobei c_i natürliche Zahlen und x_i voneinander verschiedene Elemente von A_0 sind (vgl. Abs. 2.1). Da $x_i \cap y_j = 0$ gilt, bekommen wir $x \cap y = 0$, also nach 2.1 ist $v(v(A_0) \cup Y) = v(A_0) \dotplus Y$. Es gilt daher $v(A \cup B) = v(A_0) \dotplus Y$ und damit ist nach 6.6 der Beweis erbracht.

Literaturverzeichnis

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory. Rev. edition. New York 1948.

[2] *P. Conrad:* Some structure theorems for lattice ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc. *99*, 1961, 212–240.

[3] *Ян Якубик:* О главных идеалах в структурно упорядоченных группах. Чех. мат. ж. *9* (*84*), 1959, 528–543.

Резюме

О l-ГРУППАХ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

Если x — элемент l-группы G, покрывающий 0 (т.е., если $0 < x$ и не существует элемент $z \in G$ такой, что $0 < z < x$), то мы пишем $0 \prec x$. Пусть C — аддитивная группа всех целых чисел (с обыкновенным упорядочением). Символом $G_1 \dotplus G_2$ обозначим прямую сумму l-групп G_1, G_2. В § 2 построены примеры l-групп G_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Доказываются теоремы:

Пусть G — l-группа с двумя образующими x, y, и пусть $0 \prec x \ll y$. Тогда G изоморфна некоторой из l-групп G_m.

Пусть G — l-группа с двумя образующими x, y, где $0 \prec x$, $0 < y$. Тогда G изоморфна некоторой из следующих l-групп: C, $C \dotplus C$, G_m.

Пусть G — l-группа с двумя образующими x, y, и пусть $0 \prec x$. Тогда G изоморфна некоторой из следующих l-групп: C, $C \dotplus C$, $C \dotplus C \dotplus C$, G_m, $G_m \dotplus C$.

Далее исследуются l-группы с множеством образующих $B = \{y\} \cup A$, причем для каждого $a \in A$ имеет место $0 \prec a$.