Tibor Šalát

Eine metrische Eigenschaft der Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen und Irrationalitätskriterien

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 254–266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100617

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964 Прага

EINE METRISCHE EIGENSCHAFT DER CANTORSCHEN ENTWICKLUNGEN DER REELLEN ZAHLEN UND IRRATIONALITÄTSKRITERIEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingelangt am 3. September 1962)

In dieser Arbeit studiert man die Eigenschaften der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 q_2 \dots q_k)$ ist die Cantorsche Entwicklung der Zahl x) vom Standpunkte des Lebesgueschen Masses und die Ergebnisse dieses Studiums verwendet man in der Analysis „der Effektivität" der Irrationalitätskriterien, die von A. OPPENHEIM und P. H. DIANANDA stammen.

Einleitung. $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ sei eine Folge von natürlichen Zahlen die grösser als 1 sind. Es ist bekannt (siehe [1] s. 7), dass man jede reelle Zahl $x \in \langle 0, 1)$ eindeutig in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k} \tag{1}$$

darstellen kann, wo $\varepsilon_k(x)$; $k = 1, 2, \dots$ eine ganze Zahl ist, $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_{k-1}$; $k = 1, 2, \dots$ und $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$ für unendlich viele k ist. Die Entwicklung (1) der Zahl x nennt man die Cantorsche Entwicklung der Zahl x in Bezug auf das System, welches durch die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ bestimmt ist. Die Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen sind eine Verallgemeinerung der g-adischen Entwicklungen, die man bekommt, wenn man $q_k = g$; $k = 1, 2, \dots$ setzt.

In den Arbeiten [2], [3] wurde gezeigt, dass für die Irrationalität der Zahl x (siehe (1)) der Verlauf der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine wesentliche Rolle spielt. In den erwähnten Arbeiten von A. OPPENHEIM und P. H. DIANANDA beweist man die folgenden Irrationalitätskriterien für die Entwicklungen (1):

(K_1) Wenn die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ einen irrationalen Häufungswert hat, dann ist die Zahl x irrational.

(K_2) Wenn die Zahl 1 ein Häufungswert der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist, dann ist die Zahl x irrational.

(K_3) Es existiere eine solche Teilfolge $\{\varepsilon_{k_i}(x)/q_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$, dass $\varepsilon_{k_i}(x) \neq 0$; $i = 1, 2, 3, \dots$ und $\varepsilon_{k_i}(x)/q_{k_i} \to 0$ ist; dann ist die Zahl x irrational.

(K$_4$) Es seien alle Häufungswerte der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ rational. Dann ist die Zahl x immer irrational mit dieser Ausnahme: Wenn ganze Zahlen p, q; $(p, q) = 1$, $q > 0$ und eine Folge von natürlichen Zahlen $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ so existieren, dass

$$\frac{\varepsilon_{k_n}(x)}{q_{k_n}} \to \frac{p}{q}, \quad \varepsilon_{k_n}(x) = \left[\frac{p}{q} \cdot q_{k_n}\right] \tag{2}$$

dann kann x eine rationale Zahl sein.

1. Die Verteilung der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\langle 0, 1\rangle$. In diesem Teil der Arbeit studiert man die Verteilung der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\langle 0, 1\rangle$ vom metrischen Standpunkte. Im folgenden benutzt man den Begriff der homogenen Menge.

Eine Menge $M \subset \langle 0, 1)$ nennt man homogen in $\langle 0, 1)$, wenn sie dieselbe Dichte in jedem Teilintervall des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ hat; genau, wenn eine Zahl d, $0 \leqq d \leqq 1$ so existiert, dass für jedes Intervall $J \subset \langle 0, 1)$ $d = |M \cap J|/|J|$ gilt; $|K|$ bedeutet dabei das äussere Lebesguesche Mass der Menge K (oder das Lebesguesche Mass der Menge K, wenn K messbar ist). Es ist bekannt (siehe [4]), dass die messbare Menge $M \subset \langle 0, 1)$ dann und nur dann homogen in $\langle 0, 1)$ ist, wenn sie das Mass 0 oder 1 hat. Dieses Erkenntnis wird beim Beweise des folgenden Satzes benützt.

Zuerst erwähnen wir die folgende Beziechung. Wenn n eine (feste) natürliche Zahl ist, dann werden wir die Intervalle

$$i_n^k = \left\langle \frac{k}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \frac{k+1}{q_1 q_2 \cdots q_n} \right); \quad k = 0, 1, \ldots, q_1 q_2 \cdots q_n - 1\,.$$

Intervalle n-ter Stufe nennen. Das ganze Intervall $\langle 0, 1)$ zerfällt in $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$ paarweise teilfremde Intervalle n-ter Stufe ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Wenn

$$\frac{k}{q_1 q_2 \cdots q_n} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 \cdot q_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

ist, wo $0 \leqq \varepsilon_i < q_i$, ε_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganze Zahlen sind, dann sagen wir, dass das Intervall i_n^k zur (endlichen) Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gehört. Wenn $x \in i_n^k$ ist, dann ist ihre Cantorsche Entwicklung von der Form $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 \cdot q_2 \ldots q_k)$, wo $\varepsilon_l(x) = \varepsilon_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ ist.

Jetzt wollen wir das folgende einfache Kriterium von Homogenität der Mengen in $\langle 0, 1)$ angeben.

Lemma 1. *B sei eine messbare Menge, $B \subset \langle 0, 1)$. Setzen wir voraus, dass für jede $n = 1, 2, 3, \ldots$ die folgende Aussage richtig ist: Wenn k, k' zwei beliebige Zahlen der Folge $0, 1, 2, \ldots, q_1 q_2 \cdots q_n - 1$ sind, dann ist*

$$|B \cap i_n^k| = |B \cap i_n^{k'}|\,.$$

Behauptung. *Die Menge B ist homogen in $\langle 0, 1)$ (und also $|M| = 0$ oder 1).*

Beweis. Setzen wir bei festem n $\mu(n) = |B \cap i_n^k|/|i_n^k|$, dann ist nach der Voraussetzung des Lemma $\mu(n)$ unabhängig von k. Wir zeigen, dass für $n = 1, 2, \ldots$ $\mu(n) = |B|$ ist.

Wenn n eine (feste) natürliche Zahl ist, dann ist $B = \bigcap_{k=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} (B \cap i_n^k)$ und aus dieser Beziehung bekommen wir

$$|B| = \sum_{k=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} |B \cap i_n^k| = \mu(n) \sum_{k=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} |i_n^k| = \mu(n) \, .$$

Es genügt noch zu zeigen, dass für jedes Intervall $J \subset \langle 0, 1)$ $|B \cap J|/|J| = |B|$ ist. Es sei also $J \subset \langle 0, 1)$ und es sei $a(b)$ der linke (rechte) Endpunkt des Intervalles J. Wir werden voraussetzen, dass $0 < a < b < 1$ ist (wenn $a = 0$ oder $b = 1$ wäre, der Beweis verläufe ganz ähnlich). Es sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir n so, dass $(q_1 q_2 \ldots q_n)^{-1} < \min(1 - b, \varepsilon/2)$ ist. Es seien $i_n^k (k = r + 1, r + 2, \ldots, r + s)$ alle diejenigen Intervalle n-ter Stufe, die im Intervall J enthalten sind. Dann ist offensichtlich

$$\bigcup_{k=r+1}^{r+s} i_k^n \subset J \subset \bigcup_{k=r}^{r+s+1} i_n^k \, , \tag{3}$$

und daraus bekommt man

$$\sum_{k=r+1}^{r+s} |B \cap i_n^k| \leqq |B \cap J| \leqq \sum_{k=r}^{r+s+1} |B \cap i_n^k| \, . \tag{4}$$

Auf Grund vom (3) und der Wahl der Zahl n bekommen wir

$$\sum_{k=r}^{r+s+1} |i_n^k| < |J| + \varepsilon, \quad \sum_{k=r+1}^{r+s} |i_n^k| > |J| - \varepsilon \, .$$

Nach (4) und nach dem vorangehenden Teil des Beweises bekommen wir aus den letzten Ungleichheiten

$$|B| \frac{|J| - \varepsilon}{|J|} \leqq \frac{|B \cap J|}{|J|} \leqq |B| \frac{|J| + \varepsilon}{|J|} \, ,$$

und da ε eine beliebige positive Zahl war, ist $|B \cap J|/|J| = |B|$. Damit ist der Beweis des Lemma beendet.

Satz 1. (a) *Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die grösser als 1 sind. Es sei (1) die Cantorsche Entwicklung der Zahl x in Bezug auf das System, das durch die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ bestimmt ist.*

Behauptung. Für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ ist

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n} = 0 \, . \tag{5}$$

(b) *Es habe* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *die vorangehende Bedeutung und es sei* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$.

Behauptung. Für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ *ist*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n} = 1\,. \tag{6}$$

Folgerung. *Wenn* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *die vorangehende Bedeutung hat und wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$ *ist, dann gilt für fast alle* $x \in \langle 0, 1)$ *gleichzeitig* (5) *und* (6).

Bemerkungen. 1) Der erste Teil des Satzes wäre eine einfache Folgerung der Rényischen Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Borel (siehe [5]), wenn wir voraussetzen würden, dass $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} = +\infty$ ist. In diesem Fall enthalten fast alle $x \in \langle 0, 1)$ in ihren Entwicklungen (1) die Zahl 0 an unendlich vielen Stellen ($\varepsilon_n(x) = 0$ für unendlich viele n). Wir setzen jedoch über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1}$ nichts voraus. In der erwähnten Arbeit von A. Rényi wurde auch gezeigt, dass wenn $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} < +\infty$ ist, dann gilt für fast alle $x \in \langle 0, 1)$: Die Folge $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ enthält nur endlich viele 0. Der zweite Teil dieses Satzes folgt auch nicht aus den Rényischen Ergebnissen bei den vorangehenden Beschränkungen.

2) In der Arbeit [6] wurde von P. Turán gezeigt, dass aus $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} < +\infty$ die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/q_k$ für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ folgt. Der Beweis dieses Ergebnisses beruht auf dem bekannten Cantor-Lebesgueschen Satze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Wir bemerken, dass dieses Ergebnis von P. Turán eine einfache Folgerung unseres recht stärkeren Satzes 1 (b) ist. Wirklich, aus $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} < +\infty$ folgt $q_k \to \infty$, und dann nach dem Satze 1 ist sogar $\limsup_{k\to\infty} \varepsilon_k(x)/q_k = 1$ für fast alle $x \in \langle 0, 1)$.

3) Die Voraussetzung $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$ im Teil (b) des Satzes 1 ist für die Gültigkeit des Satzes 1 (b) notwendig. Denn wenn $1 < q_k \leqq K$; $k = 1, 2, \ldots$ wäre, dann wäre jedes Glied der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ nicht grösser als $(K-1)/K < 1$.

Beweis des Satzes 1 (a). Setzen wir

$$M = E\left[x;\, x \in \langle 0, 1)\,,\ \liminf_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} > 0\right].$$

Es genügt zu zeigen, dass $|M| = 0$. Es sei $0 < \tau < 1$. Setzen wir

$$M(\tau) = E\left[x;\, x \in \langle 0, 1),\ \liminf_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} > \tau\right];$$

$$M_k = E[x;\, x \in \langle 0, 1),\ \varepsilon_k(x) > \tau q_k];$$

$$N_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} M_k;\ k, n = 1, 2, 3, \dots .$$

Man kann sofort einsehen, dass

(7) $$M(\tau) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} M_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n .$$

Ferner, die Funktionen $\varepsilon_k(x)$ und $\varepsilon_k(x)/q_k$; $k = 1, 2, \dots$ sind beschränkt im Intervall $\langle 0, 1)$ und stetig im Inneren jedes Intervalles k-ter Stufe. Daraus folgt, dass die Mengen $M(\tau)$, M_k, N_n messbar sind.

Es sei jetzt s eine beliebige natürliche Zahl; wir zeigen, dass $|N_s| \leqq 1 - \tau < 1$ ist. Nach der Definition der Mengen M_s und N_s ist $N_s \subset M_s$. Betrachten wir die Zerlegung des Intervalles $\langle 0, 1)$ in Intervalle s-ter Stufe. Die Menge M_s ist in der Vereinigung derjenigen Intervalle s-ter Stufe enthalten, von welchen jedes zu einer solchen Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ gehört, in der ε_s eine der Zahlen $[\tau q_s] + 1, [\tau q_s] + 2, \dots, q_s - 1$ ist (zusammen haben wir $q_s - [\tau q_s] - 1$ Werte für ε_s). Die Anzahl aller dieser Intervalle ist $q_1 q_2 \dots q_{s-1}(q_s - [\tau q_s] - 1)$ und jedes von ihnen hat die Länge $(q_1 \cdot q_2 \dots q_s)^{-1}$; deshalb

$$|M_s| \leqq \frac{q_1 q_2 \dots q_{s-1}(q_s - [\tau q_s] - 1)}{q_1 q_2 \dots q_{s-1} q_s} \leqq \frac{q_s - (\tau q_s - 1) - 1}{q_s} = 1 - \tau ,$$

also auch $|N_s| \leqq 1 - \tau$; $s = 1, 2, \dots$. Offensichtlich ist $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_s \subset \dots$; deshalb

$$\left|\bigcup_{s=1}^{\infty} N_s\right| = \lim_{s\to\infty} |N_s| \leqq 1 - \tau < 1 .$$

Aus der Inklusion (7) folgt

(8) $$|M(\tau)| \leqq 1 - \tau .$$

Jetzt zeigen wir, dass $M(\tau)$ homogen ist. Nach dem Lemma 1 genügt es zu zeigen, dass für jedes n diese Aussage richtig ist: Wenn i_n^k, $i_n^{k'}$ zwei beliebige Intervalle n-ter Stufe sind, dann ist $|M \cap i_n^k| = |M \cap i_n^{k'}|$. Dazu genügt es zu zeigen, dass $M(\tau) \cap i_n^{k'}$ eine Translation der Menge $M(\tau) \cap i_n^k$ ist. $i_n^k(i_n^{k'})$ gehöre zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$; dann ist leicht einzusehen, dass $M(\tau) \cap i_n^{k'}$ sich durch Translation der Menge $M(\tau) \cap i_n^k$ um die Länge

$$\lambda = \frac{\varepsilon'_1 - \varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon'_n - \varepsilon_n}{q_1 q_2 \dots q_n}$$

ergibt. Wirklich, wenn

$$x \in M(\tau) \cap i_n^k, \quad x \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l(x)/(q_1 q_2 \dots q_l)\,(\varepsilon_l(x) = \varepsilon_l \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \dots, n),$$

dann

$$x' = x + \lambda = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_l(x)}{q_1 q_2 \dots q_l} \in i_n^{k'},$$

$$\varepsilon'_l(x) = \varepsilon'_l \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

und $\varepsilon'_l(x) = \varepsilon_l(x)$ für $l > n$. Da die Cantorschen Entwicklungen der Zahlen x, x' sich nur an den ersten n Stellen unterscheiden, folgt aus der Gültigkeit von (5) die Beziehung $\liminf_{k \to \infty} \varepsilon_k(x')/q_k = 0$ und das bedeutet, dass $x' \in M(\tau)$, also zusammen mit $x' \in i_n^{k'}$ ist $x' \in M(\tau) \cap i_n^{k'}$. Ähnlich kann man sich überzeugen, dass wenn $x' \in M(\tau) \cap$ $\cap\, i_n^{k'}$, dann $x' - \lambda = x \in M(\tau) \cap i_n^k$ so dass $M(\tau) \cap i_n^{k'} = f(M(\tau) \cap i_n^k)$, wo $f(t) =$ $= t + \lambda$ ist. Daraus folgt die Erfüllung der Voraussetzungen von Lemma 1, wenn wir $B = M(\tau)$ setzen, also $|M(\tau)| = 0$ oder 1. Infolge der Beziehung (8) bekommen wir $|M(\tau)| = 0$.

Es sei jetzt $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen, $\tau_n \to 0$, $0 < \tau < 1$. Dann ist $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(\tau_n)$; nach dem vorangehenden Teil des Beweises ist $|M(\tau_n)| = 0$ ($n =$ $= 1, 2, 3, \dots$) und also $|M| = 0$.

(b) Setzen wir voraus, dass $\limsup_{k \to \infty} q_k = +\infty$. Bezeichnen wir

$$N = E\left[x;\, x \in \langle 0, 1),\ \limsup_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} < 1\right].$$

Es genügt zu zeigen, dass $|N| = 0$.

Wenn $0 < \tau < 1$ ist, setzen wir

$$M'(\tau) = E\left[x;\, x \in \langle 0, 1),\ \limsup_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} < \tau\right].$$

Ganz ähnlich wie im vorangehenden Teil des Beweises kann man sich überzeugen, dass die Menge $M'(\tau)$ $(0 < \tau < 1)$ eine messbare und homogene Menge ist. Setzen wir weiter

$$M'_k = E[x;\ x \in \langle 0,\ 1),\ \varepsilon_k(x) \leqq \tau q_k]$$

$$N'_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} M'_k \quad (k;\, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Mengen M'_n, N'_n sind messbar, weiter

$$M'(\tau) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} M'_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} N'_n$$

und

(9) $$N'_1 \subset N'_2 \subset \ldots \subset N'_n \subset \ldots .$$

Wir zeigen, dass für jede $n = 1, 2, \ldots$ $|N'_n| \leqq (1 + \tau)/2 < 1$ ist. Nach den Voraussetzungen des Satzes existiert eine solche wachsende Folge von natürlichen Zahlen $k_1 < k_2 < \ldots < k_s < \ldots$, dass $\lim\limits_{s\to\infty} q_{k_s} = +\infty$ ist. Es sei n eine natürliche Zahl; wählen wir s so, dass $k_s \geqq n$ und $q_{k_s} > 2/(1 - \tau)$. Dann haben wir

(10) $$N'_n \subset M'_{k_s} .$$

M'_{k_s} ist in der Vereinigung aller solchen Intervalle k_s-ter Stufe enthalten, dass jedes dieser Intervalle zu solcher Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k_s}$ gehört, dass $0 \leqq \varepsilon_i \leqq q_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k_s - 1)$, $\varepsilon_{k_s} \leqq [\tau q_{k_s}]$. Die Anzahl aller diesen Intervalle ist $q_1 q_2 \ldots \ldots q_{k_s - 1}(1 + [\tau q_{k_s}])$ und die Länge jedes dieser Intervalle ist $(q_1 q_2 \ldots q_{k_s})^{-1}$; deshalb (auf Grund der Wahl der Zahl k_s)

$$|M_{k_s}| \leqq \frac{q_1 q_2 \ldots q_{k_s - 1}(1 + [\tau q_{k_s}])}{q_1 q_2 \ldots q_{k_s}} \leqq \frac{1 + \tau q_{k_s}}{q_{k_s}} < \frac{1 - \tau}{2} + \tau = \frac{1 + \tau}{2} < 1 .$$

Nach (10) bekommt man $|N'_n| < (1 + \tau)/2 < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Mit Rücksicht auf (9) bekommen wir jetzt

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} N'_n\right| = \lim_{n\to\infty} |N'_n| \leqq \frac{1 + \tau}{2} < 1 .$$

Daraus folgt $|M'(\tau)| = 0$. Der Beweis kann jetzt ähnlich wie Beweis des Teiles (a) fortgesetzt werden.

Wenn also $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$, dann ist diese Aussage für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ richtig: Die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ hat die Häufungswerte 0, 1. Wir zeigen weiter, dass diese Eigenschaft (ein Häufungswert der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ für fast alle x sein) jede Zahl $z \in \langle 0, 1\rangle$ hat, wenn nur $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$ ist.

Satz 2. *Es sei* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Folge von natürlichen Zahlen, die grösser als* 1 *sind. Es sei* $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$. *Für* $z \in (0, 1)$ *bezeichnen wir bei mit* $H(z)$ *die Menge aller derjenigen* $x \in \langle 0, 1)$, *die die folgende Eigenschaft haben: Die Zahl* z *ist ein Häufungswert der Folge* $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty} = 1$.

Behauptung: $|H(z)| = 1$.

Beweis. Es sei $z \in (0, 1)$; wählen wir $\eta > 0$ so, dass $\eta < \min(z, 1 - z)$. Für natürliche k, n setzen wir

$$R_k(\eta) = E\left[x;\ x \in \langle 0, 1),\ \left|\frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - z\right| \geqq \eta\right],$$

$$P_n(\eta) = \bigcap_{k=n}^{\infty} R_k(\eta)\,, \quad R(\eta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\eta)\,.$$

Es ist leicht einzusehen, dass $R_k(\eta)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), $P_n(\eta)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $R(\eta)$ messbare Mengen sind. Ganz ähnlich wie beim Beweis des vorangehenden Satzes (Homogenität von $M(\tau)$) kann man sich überzeugen, dass $R(\eta)$ eine homogene Menge ist. Nach den Voraussetzungen des Satzes existiert eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen $k_1 < k_2 < \ldots < k_s < \ldots$ so, dass $\lim_{s\to\infty} q_{k_s} = +\infty$ ist. Es sei jetzt n eine beliebige natürliche Zahl; wählen wir s so, dass $k_s \geqq n$, $q_{k_s} > 2\eta^{-1}$. Dann

$$P_n(\eta) \subset R_{k_s}(\eta) . \tag{11}$$

Die Menge $R_{k_s}(\eta)$ ist in Vereinigung aller derjenigen Intervalle k_s-ter Stufe enthalten, von welchen jedes zu einer solchen Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k_s}$ gehört, dass $0 \leqq \varepsilon_i \leqq q_i - 1$ ($i = 1, 2, \ldots, k_s - 1$) und ε_{k_s} ist eine Zahl aus der Folge

$$0, 1, \ldots, [(z - \eta)\, q_{k_s}],\ [(z + \eta)\, q_{k_s}],\ [(z + \eta)\, q_{k_s}] + 1, \ldots, q_s - 1$$

(das ist zusammen $[(z - \eta)\, q_{k_s}] + 1 + q_{k_s} - [(z + \eta)\, q_{k_s}]$ Möglichkeiten für ε_{k_s}). Daraus folgt nach der Wahl der Zahl k_s, dass

$$|R_{k_s}(\eta)| \leqq \frac{(z - \eta)\, q_{k_s} + 2 + q_{k_s} - (z + \eta)\, q_{k_s}}{q_{k_s}} = 1 - 2\eta + \frac{2}{q_{k_s}} < 1 - \eta .$$

Aus der Inklusion (11) bekommen wir jetzt $|P_n(\eta)| \leqq 1 - \eta$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Nimmt man in Betrach, dass

$$P_1(\eta) \subset P_2(\eta) \subset \ldots \subset P_n(\eta) \subset P_{n+1}(\eta) \subset \ldots$$

ist, so bekommt man

$$|R(\eta)| = \Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\eta)\Big| = \lim_{n\to\infty} |P_n(\eta)| \leqq 1 - \eta < 1 .$$

Da die Menge $R(\eta)$ homogen ist, $|R(\eta)| = 0$.

Es sei jetzt $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen, $\eta_n \to 0$, $0 < \eta_n < \min(z, 1 - z)$. Nach dem Bewiesenen ist jede von Mengen $R(\eta_n)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) eine Nullmenge, so ist also auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$ eine Nullmenge. Es genügt noch einzusehen, dass $H(z) = \langle 0, 1) - \bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$ ist.

Eine einfache Folgerung der bisherigen Ergebnisse ist der folgende Satz, der einen übersichtlichen Anblick auf die Verteilung der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ bietet.

Satz 3. *E sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die grösser als* 1 *sind. Es sei* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$.

Behauptung: Für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ ist die folgende Aussage richtig: Die Häufungswerte der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erfüllen das ganze Intervall $\langle 0, 1\rangle$.

Beweis. Es sei $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Folge aller rationalen Zahlen des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$. Bezeichnen wir mit H die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$, für welche die folgende Aussage richtig ist: Jede Zahl r_n; $n = 1, 2, \ldots$ ist ein Häufungswert der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dann $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(r_n)$ (siehe die Bezeichnung im Satz 2), und nach dem Satze 1 und 2 ist $|H| = 1$.

Wenn wir jetzt in Betracht nehmen, dass die Menge aller Häufungswerte der beliebigen Folge eine abgeschlossene Menge ist, ist sofort ersichtlich, dass H die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$ ist, für welche die folgende Aussage richtig ist: Die Häufungswerte der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erfüllen das ganze Intervall $\langle 0, 1\rangle$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

In der bekannten Sammlung von Problemen aus der Analysis (siehe [7] s. 99, Probl. 171) ist das folgende Problem angegeben: Es soll bewiesen werden, dass die Folge $\{n!\, e - [n!\, e]\}_{k=1}^{\infty}$ (e ist die Grundzahl der natürlichen Logaritmen) nur einen Häufungswert (gleich 0) hat. Zur Lösung dieses Problems kann man leicht gelangen, wenn man die Cantorsche Entwicklung von Zahl e in Bezug auf System, das durch die Folge $\{k + 1\}_{k=1}^{\infty}$ bestimmt ist, in Erwägung nimmt, d.h. die Entwicklung $e = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n + 1)!$ Im weiteren zeigen wir mit Hilfe des Satzes 3, das die erwähnte Eigenschaft der Zahl e im gewissen Sinne zufällig ist, oder genau ausgesprochen, die irrationalen Zahlen mit dieser Eigenschaft stellen nur einen „Ausnahmefall" unter den irrationalen Zahlen dar.

Satz 4. *Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die grösser als 1 sind. Es sei $\lim_{k\to\infty} q_k = +\infty$. Wenn n eine natürliche Zahl ist und $x \in \langle 0, 1)$, setzen wir*

$$\sigma_n(x) = \{q_1 q_2 \ldots q_n x\}, \quad (\{u\} = u - [u]).$$

Behauptung. Für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ gilt die folgende Aussage: Die Häufungswerte der Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ erfüllen das ganze Intervall $\langle 0, 1\rangle$.

Beweis. Wenn $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 q_2 \ldots q_k)$ die Cantorsche Entwicklung der Zahl x ist, dann bekommen wir durch eine leichte Ausrechnung

$$\sigma_n(x) = \left\{ q_1 q_2 \ldots q_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right\} = \left\{ \alpha_n + \frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{q_{n+1}} + \frac{\vartheta_{n+1}(x)}{q_{n+1}} \right\},$$

wo α_n eine ganze Zahl und $\vartheta_{n+1}(x)$ gleich der Summe der folgenden unendlichen Reihe ist:

$$\frac{\varepsilon_{n+2}(x)}{q_{n+2}} + \frac{\varepsilon_{n+3}(x)}{q_{n+2} q_{n+3}} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+s}(x)}{q_{n+2} \ldots q_{n+s}} + \ldots .$$

Mit Hilfe der trivialen Abschätzung bekommen wir

$$0 \leqq \vartheta_{n+1}(x) < \sum_{s=2}^{\infty} \frac{q_{n+s} - 1}{q_{n+2} \cdots q_{n+s}} = 1 \, .$$

Deshalb

$$\sigma_n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{q_{n+1}} + \frac{\vartheta_{n+1}(x)}{q_{n+1}} \, .$$

Jetzt genügt es zu betrachten, dass $\vartheta_{n+1}(x)/q_{n+1} \to 0$ wenn $n \to \infty$ und das Ergebnis des Satzes 3 benutzen.

Bemerkung. Wenn wir $q_n = n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $x = e - 2$ setzen, dann ist $\sigma_{n-1}(x) = \{n!\, x\} = \{n!\, e\}$ und nach der erwähnten Lösung des Problems 171 (siehe [7]) ist $\sigma_n(x) \to 0$, also die Zahl $e - 2$ gehört zu der Nullmenge aller derjenigen irrationalen Zahlen $x \in \langle 0, 1)$, für die $\sigma_n(x) \to 0$.

2. Die metrische „Bewertung" der Effektivität einiger Irrationalitätskriterien. Kehren wir uns jetzt zum Studium von Irrationalitätskriterien, die von A. Oppenheim und P. H. Diananda stammen und die in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt wurden. Alle vier Kriterien K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bieten die hinreichenden Bedingungen dazu, dass die Zahl x (siehe (1)) irrational sei. Es entsteht das natürliche Problem, die Effektivität dieser Kriterien „metrisch zu bewerten". Darunter wird das folgende gemeint: Bezeichnen wir mit S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Menge aller derjenigen irrationalen Zahlen $x \in \langle 0, 1)$, deren Irrationalität mit Hilfe des Kriteriums K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ fesgestellt werden kann (d.h. S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist die Menge aller derjenigen Irrationalzahlen $x \in \langle 0, 1)$, die die Voraussetzungen des Kriteriums K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ erfüllen). Versuchen wir das Mass der Menge S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ zu bestimmen und ihrer Grösse nach über die Effektivität des Kriteriums K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ zu entscheiden. Die Antwort auf dieses Problem bietet (bei gewissen Beschränkungen im Falle des Kriteriums K_3) der folgende Satz. ($\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ bezeichnet eine Folge von natürlichen Zahlen, die grösser als 1 sind).

Satz 5. (a) *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k < +\infty$, *dann* $S_1 = \emptyset$ *(und folglich* $|S_1| = 0$*). Wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, *dann* $|S| = 1$.

(b) *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k < +\infty$, *dann* $|S|_2 = \emptyset$ *(und folglich* $|S_2| = 0$*). Wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, *dann* $|S_2| = 1$.

(c) *Es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} < +\infty$; *dann* $|S_3| = 1$.

(d) *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} q_k < +\infty$, *dann* $S_4 = \langle 0, 1) - R$. *(R bedeutet die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalles* $\langle 0, 1)$*), also* $|S_4| = 1$.

Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, *dann* $|S_4| = 0$.

Beweis. (a) Nach der Voraussetzung existiert eine solche natürliche Zahl K, dass $q_k \leqq K$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Wenn $x \in \langle 0, 1)$, dann ist die Menge der Glieder der Folge

$$(12) \qquad \left\{\frac{\varepsilon_k(x)}{q_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

endlich und die Elemente dieser Menge haben die Gestalt p/q, $1 < q \leqq K$, $0 \leqq p \leqq \leqq q - 1$, wo p, q ganze Zahlen sind. Daraus folgt, dass die Folge (12) keinen irrationalen Häufungswert haben kann.

Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, dann ist die Behauptung eine einfache Folgerung des Satzes 3.

(b) Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k < +\infty$, dann existiert eine solche natürliche Zahl K, dass $q_k \leqq K$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist. Es sei jetzt $x \in \langle 0, 1)$ und (1) die Cantorsche Entwicklung von x; dann

$$\frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} \leqq \frac{K-1}{K}, \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} \leqq \frac{K-1}{K},$$

so dass $S_2 = \emptyset$.

Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, dann ist die Behauptung eine einfache Folgerung des Satzes 1 (b).

(c) Aus dem erwähnten Rényischen Ergebniss (siehe [5]) folgt, dass eine solche Menge $S \subset \langle 0, 1)$ von Irrationalzahlen existiert, dass $|S| = 1$ und für jedes $x \in S$ folgendes gilt: $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ enthält nur eine endliche Anzahl der Glieder gleich 0. Aus dem Satz 1 (a) folgt wieder, dass eine solche Menge $S' \subset \langle 0, 1)$ von Irrationalzahlen existiert, dass $|S'| = 1$ und für jedes $x \in S'$ $\liminf_{k\to\infty} \varepsilon_k(x)/q_k = 0$ ist. Bilden wir jetzt die Menge $S \cap S'$. Es ist $|S \cap S'| = 1$ und wenn $x \in S \cap S'$, dann existiert eine solche Folge von natürlichen Zahlen $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ dass $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{k_s}(x)/q_{k_s} = 0$ ist, und dabei $\varepsilon_{k_s}(x) = 0$ nur für eine endliche Anzahl von s. Also $S \cap S' \subset S_3$, so dass $|S_3| = 1$.

(d) Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k < +\infty$, dann, wie wir schon gesehen haben, können die Häufungswerte der Folge (12) nur rationalen Zahlen sein, also $S_4 = \langle 0, 1) \dot{-} R$, wo R die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalles $\langle 0, 1)$ ist.

Wenn $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$, dann ist die Behauptung eine einfache Folgerung des Satzes 3.

Am Ende dieser Arbeit machen wir noch eine kleine Bemerkung über die gleichmässige Verteilung der Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ im Intervall $\langle 0, 1\rangle$.

Wie bekannt, man nennt die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \langle 0, 1\rangle$ gleichverteilt im Intervall $\langle 0, 1\rangle$, wenn für jedes $t \in \langle 0, 1\rangle$ $\delta[n;\ x_n \leqq t] = t$ gilt. Erwähnen wir die folgende übliche Bezeichnung. Wenn A eine Menge von natürlichen Zahlen ist, dann bedeutet die Zahl $A(n)$ die Anzahl aller $a \in A$, für die $a \leqq n$ gilt. Die Zahl $\delta(A) = \lim_{n\to\infty} A(n)/n$ (wenn sie existiert) nennt man die asymptotische Dichte der Menge A. Ähnlich definieren wir

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}, \quad \delta_2(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

und der Einfachkeit halber schreiben wir $\delta[n;\, x_n \leqq t]$ anstatt $\delta([n;\, x_n \leqq t])$.

Nach der Definition der gleichverteilten Folge ist es leicht zu ersehen, dass, wenn $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine im $\langle 0, 1\rangle$ gleichverteilte Folge ist, dann jede Zahl des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ ein Häufungswert der Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist. Wenn wir dieses mit dem Satz 3 vergleichen, kann die Hypothese entstehen, dass für fast alle $x \in \langle 0, 1)$ (bei den Voraussetzungen des Satzes 3) gilt: Die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist im $\langle 0, 1\rangle$ gleichverteilt. Wenn das dieser Fall wäre, dann wäre der Satz 3 eine einfache Folgerung dieser Wirklichkeit.

Jetzt zeigen wir an einem **Beispiel**, dass die Hypothese im allgemeinen nicht gültig ist. Bezeichnen wir mit H^* die Menge aller derjenigen $x \in \langle 0, 1)$, für die die folgende Aussage gilt: Die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist im $\langle 0, 1\rangle$ gleichverteilt. Offensichtlich ist $H^* \subset H$ (die Bedeutung von H siehe im Satz 3). Jetzt zeigen wir, dass sogar $H^* = \emptyset$ und $|H| = 1$ sein kann. Es sei K eine natürliche Zahl, $K > 1$. Trennen wir die Menge N aller natürlichen Zahlen in zwei teilfremde Untermengen N_1, N_2 und wählen $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ so, dass

$$\delta_2(N_1) = \limsup_{n\to\infty} \frac{N_1(n)}{n} > \frac{K-1}{K},$$

$q_n \leqq K$ für jedes $n \in N_1$, $\lim q_n = +\infty$ wenn $n \to \infty$, $n \in N_2$. Die Menge N_2 kann die Menge aller Primzahlen sein; diese hat die asymptotische Dichte 0 und setzen wir $N_1 = N - N_2$, dann wird $\delta_2(N_1) = 1 > (K-1)/K$. Es sei jetzt $x \in \langle 0, 1)$; wir zeigen, dass die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ im $\langle 0, 1\rangle$ nicht gleichverteilt ist. Aus der offensichtlichen Inklusion

$$\left[n;\, \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n} \leqq \frac{K-1}{K}\right] \supset [n;\, q_n \leqq K]$$

folgt

$$\delta_2\left[n;\, \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n} \leqq \frac{K-1}{K}\right] \geqq \delta_2(N_1) > \frac{K-1}{K},$$

und so kann nicht

$$\delta\left[n;\, \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n} \leqq \frac{K-1}{K}\right] = \frac{K-1}{K}$$

gelten, so dass $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ im $\langle 0, 1\rangle$ nicht gleichverteilt ist. Also $H^* = \emptyset$ und nach dem Satz 3 ist $|H| = 1$.

Literatur

[1] I. Niven: Irrational numbers. Carus Monographs, 11, 1956.

[2] *A. Oppenheim:* Criteria for irrationality of certain classes of numbers. Amer. Math. Monthly, *61* (1954), 235—241.

[3] *P. H. Diananda-A. Oppenheim:* Criteria for irrationality of certain classes of numbers II. Amer. Math. Monthly, *62* (1955), 222—225.

[4] *K. Knopp:* Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten. Math. Ann. *95* (1926), 409—426.

[5] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle elöállításaiban. Mat. lap., *VII*, 1—2 (1956), 77—100.

[6] *P. Turán:* „Faktoriálisos" számrendszerbeli „számjegyek" eloszlásáról, Mat. lap., *VII*, 1—2 (1956), 71—76.

[7] *G. Pólya-G. Szegö:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I (russische Übersetzung). Moskau, 1956.

Резюме

ОДНО МЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО РАЗЛОЖЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПО КАНТОРУ И ПРИЗНАКИ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

Главным результатом настоящей работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. (a) *Пусть* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность натуральных чисел* $q_k > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Пусть* $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/q_1 q_2 \ldots q_k)$ — *Канторово разложение действительного числа* $x \in \langle 0, 1)$, $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *и для бесконечного количества* k *будет* $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$. *Утверждение*: *Для почти всех* $x < \langle 0, 1)$ (*в смысле меры Лебега*) $\liminf_{k \to \infty} \varepsilon_k(x)/q_k = 0$.

(b) *Пусть символ* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет то же значение, как в предыдущем, и пусть* $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$. *Утверждение*: *Для почти всех* $x \in \langle 0,1)$ *будет* $\limsup_{k \to \infty} \varepsilon_k(x)/q_k = 1$.

Теорема 1 является расширением и обострением некоторых более ранних результатов А. Реньи и П. Турана (см. [5], [6]).

Теорему 1 (b) можно обобщить следующим образом:

Теорема 3. *Пусть* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет то же значение, как в предыдущем, и пусть* $\limsup_{k \to \infty} q_k = +\infty$. *Утверждение*: *Для почти всех* $x \in \langle 0, 1)$ *справедливо следующее предложение: предельные значения последовательности* $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k+1}^{\infty}$ *заполняют весь интервал* $\langle 0, 1\rangle$.

Наконец, в связи с критериями иррациональности, сформулированными А. Оппенхаймом и П. Г. Диананду, автор дает „метрическую оценку" этих критериев в том смысле, что для каждого из этих признаков он устанавливает меру множества тех иррациональных чисел $x \in \langle 0, 1)$, иррациональность которых можно доказать по этому признаку.