Ladislav Procházka

Об однородных абелевых группах без кручения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 171–202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100612`

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

ОБ ОДНОРОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 8/XI 1961 г., и переработанное сдано опять 31/I 1964 г.)

В этой статье изучается структура некоторых расширений однородных вполне разложимых абелевых групп без кручения при помощи групп периодических. В заключительной части применяются эти результаты к смешанным расщепляемым группам, и найдены достаточные условия для того, чтобы расширение такой группы являлось опять расщепляемой группой.

Прежде всего условимся разуметь словом группа аддитивно записанную абелеву группу с нулевым элементом 0. Буквой p будем всюду обозначать некоторое (положительное) простое число. Кроме того, мы будем пользоваться следующей записью: Пусть m, n – целые рациональные числа, $n \neq 0$, и пусть g – элемент какой-то группы G. Если уравнение $nx = mg$ обладает в G в точности одним решением g_1, то будем писать $g_1 = (m/n)\, g$. Далее напомним, что группа без кручения называется однородной типа τ, если все её сервантные подгруппы ранга 1 обладают типом τ. Если группа без кручения является прямой суммой групп ранга 1, то говорят, что она вполне разложима.

Пусть G – группа без кручения, пусть $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и m – целые рациональные числа. Если уравнение $mx = k_1g_1 + k_2g_2 + \ldots + k_ng_n$ разрешимо в G, то будем писать (см. [4])

$$k_1g_1 + k_2g_2 + \ldots + k_ng_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; m)_G\,. \tag{1}$$

Определение 1. Пусть G – группа без кручения, пусть $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть m – целое рациональное число. Если имеет место некоторое соотношение вида (1), где по крайней мере для одного i $k_i \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; m)$, то элементы g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть m-зависимыми в G. Если элементы g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не являются m-зависимыми в G, то будем говорить, что они m-независимые в G.

Если G – группа без кручения, $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и если α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – целые p-адические числа, представленные последовательностями целых рациональных чисел вида $\mathfrak{a}_i = \left(a_i^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то вместо бесконечного числа формул

$$a_1^{(k)} g_1 + a_2^{(k)} g_2 + \ldots + a_n^{(k)} g_n \equiv 0 \pmod{p^k}_G \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

будем писать единственную формулу

$$\mathfrak{a}_1 g_1 + \mathfrak{a}_2 g_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n g_n \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G . \tag{2}$$

Определение 2. Пусть G — группа без кручения и пусть $g_i \in G\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. Мы скажем, что элементы $g_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются p^∞-зависимые в G, если имеет место некоторое соотношение вида (2), где по крайней мере одно из чисел $\mathfrak{a}_i$ должно быть ненулевым. В другом случае будем говорить, что элементы $g_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются p^∞-независимыми в G.

Понятие m-зависимости и m-независимости, также как понятие p^∞-зависимости и p^∞-независимости, можно известным образом перенести на произвольное непустое или пустое множество M элементов группы без кручения G. Легко видеть, что в каждой группе без кручения существуют максимальные m-независимые и p^∞-независимые множества (которые могут оказаться и пустыми). Следовательно, оправдано следующее определение.

Определение 3. Если G — группа без кручения и m — целое рациональное число, то каждое максимальное m-независимое множество элементов из G будем называть m-базисом группы G. Аналогично определяется p^∞-базис группы G. (См. [5]; понятие p-базиса можно найти в [2].)

В статье [5] было к каждой группе без кручения G присоединено некоторое кардинальное число $r_p(G)$, называемое p-рангом группы G; притом это определение p-ранга является расширением понятия p-ранга из [6]. Об этом инварианте было в [5] доказано одно утверждение, которое мы здесь выскажем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть G — группа без кручения и пусть A — произвольный её p^∞-базис. Если B — базис*[1]) *группы G, содержащий A, то имеет место соотношение*

$$r_p(G) = m(B \dot{-} A)\,,$$

где символ $m(B \dot{-} A)$ обозначает мощность множества $B \dot{-} A$. (См. [5], теорема 1.)

Определение 4. Пусть G — группа без кручения и пусть $J_\iota\,(\iota \in I)$ — некоторые её подгруппы ранга 1. Мы будем говорить, что подгруппы $J_\iota\,(\iota \in I)$ являются p^∞-независимыми в группе G, если можно выбрать элементы $g_\iota \in J_\iota\,(\iota \in I)$ так, чтобы эти элементы представляли p^∞-независимое множество в G.

---

[1]) Базисом группы без кручения G является произвольное максимальное линейно независимое множество элементов из G.

Если M – множество элементов группы без кручения G, то символом $\mathscr{S}_G(M)$ будем обозначать минимальную сервантную подгруппу группы G, содержащую M.

Лемма 2. *Пусть G – группа без кручения и пусть J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – некоторые p^∞-независимые подгруппы (ранга 1) группы G. Если $g_i \in J_i$, $g_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвольные элементы, то элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ являются p^∞-независимые в G.*

Доказательство. В виду предположения и определения 4 можно найти p^∞-независимые в G элементы $h_i \in J_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если положим $S = \mathscr{S}_G(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, то S будет ранга n и множество $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ представляет её базис. Из p^∞-независимости элементов h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в G следует их p^∞-независимость в подгруппе S, следовательно, $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ должно быть p^∞-базисом группы S. Из леммы 1 вытекает равенство $r_p(S) = 0$. Как следует из [6] (см. § 4, теорема 4), равенство $r_p(S) = 0$ равносильно тому, что p-примарное слагаемое фактор-группы S/U, где U – произвольная свободная подгруппа в S ранга n, является редуцированной группой и, следовательно, группой конечной (см. [6], теорема 1). Отсюда легко вывести, что каждый базис группы S должен быть множеством p^∞-независимым в S, или, p^∞-базисом в S. Итак, если выберем произвольно $g_i \in J_i$, $g_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ то получим базис группы S, так как, ввиду предположения, должно быть

$$\{J_1, J_2, \ldots, J_n\} = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_n\,.$$

Но этот базис является одновременно p^∞-базисом группы S, и в силу сервантности S в G будет p^∞-базисом в G. Лемма полностью доказана.

Так как p^∞-независимость произвольного множества значит p^∞-независимость каждой конечной его части, то предшествующую лемму можно высказать в следующем виде.

Лемма 3. *Пусть G – группа без кручения и пусть J_ι $(\iota \in I)$ – p^∞-независимые в G подгруппы ранга 1. Если $g_\iota \in J_\iota$, $g_\iota \neq 0$ $(\iota \in I)$ – произвольные элементы, то множество $(g_\iota;\ \iota \in I)$ p^∞-независимо в G.*

Лемма 4. *Пусть G — группа без кручения и пусть $J_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ — её подгруппы ранга 1 такие, что*

$$\{J_1, J_2, \ldots, J_n\} = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_n\,.$$

Подгруппы $J_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются p^∞-независимыми в G в точности тогда, когда $r_p(S) = 0$, где $S = \mathscr{S}_G(J_1 \cup \ldots \cup J_n)$.

Доказательство. Очевидно, что только что определенная подгруппа S соответствует подгруппе S, определенной в течение доказательства леммы 2. Итак, если подгруппы J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – p^∞-независимые в G, то из доказательства леммы 2 следует, что $r_p(S) = 0$.

Пусть наоборот $r_p(S) = 0$. Если выберем $g_i \in J_i$, $g_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и построим подгруппу $U = \{g_1\} \dotplus \ldots \dotplus \{g_n\}$, то p-примарное слагаемое периодической группы S/U будет редуцированной группой (см. [6], теорема 4) и, следовательно, группой конечной (см. [6], теорема 1). Это значит, что элементы g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, или, в силу определения 4, также подгруппы J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, должны быть p^∞-независимыми в S. Из сервантности S в G следует p^∞-независимость этих подгрупп в G, и лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — группа без кручения, пусть H — некоторая её вполне разложимая подгруппа и пусть*

$$H = \sum_{\iota \in I} J_\iota\,, \quad H = \sum_{\kappa \in K} J_\kappa^*$$

— два полных разложения группы H. Подгруппы $J_\iota (\iota \in I)$ будут p^∞-независимыми в G тогда и только тогда, если будут p^∞-независимыми в G подгруппы $J_\kappa^*(\kappa \in K)$.

Доказательство. В силу симметричности условий достаточно доказать, что из p^∞-независимости подгрупп J_ι $(\iota \in I)$ следует p^∞-независимость подгрупп $J_\kappa^*(\kappa \in K)$.

Итак, пусть подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ — p^∞-независимые в G и пусть $J_{\kappa_i}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольно избранные подгруппы с различными индексами. Если положим

$$S_1 = \mathscr{S}_G(J_{\kappa_1}^* \cup \ldots \cup J_{\kappa_r}^*)\,,$$

то по лемме 4 достаточно доказать, что $r_p(S_1) = 0$. Очевидно, существуют индексы ι_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{r} J_{\kappa_i}^* \subseteq \sum_{j=1}^{s} J_{\iota_j}\,,$$

следовательно, имеет место соотношение

$$S_1 \subseteq \mathscr{S}_G(J_{\iota_1} \cup \ldots \cup J_{\iota_s}) = S_2\,.$$

По лемме 4 будет $r_p(S_2) = 0$. Так как S_1 сервантна в G, то тем более она сервантна в S_2 и имеем (см. [6], теорема 6)

$$r_p(S_2) = r_p(S_1) + r_p(S_2/S_1)\,,$$

или, в частности, $r_p(S_1) \leqq r_p(S_2) = 0$. Отсюда следует, что $r_p(S_1) = 0$ и лемма доказана.

Определение 5. Пусть G — группа без кручения и пусть H — вполне разложимая её подгруппа. Мы скажем, что подгруппа H p^∞-независима в G, если существует полное разложение $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ такое, что подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ p^∞-независимы в G.

В дальнейшем окажется полезным ввести ещё следующее определение.

Определение 6. Пусть G – группа без кручения, пусть M – непустое множество элементов из G и пусть $g \in G$, $g \neq 0$. Символом $\mathscr{E}_p(g; M)$ будем обозначать верхнюю грань множества всех таких целых неотрицательных k, для которых выполнено некоторое соотношение вида

$$g + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \equiv 0 \pmod{p^k}_G ,$$

где $x_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – целые рациональные числа. Значение $\mathscr{E}_p(g; M)$ будем называть степенью p-зависимости элемента g от множества M.

Если G – группа без кручения и $g \in G$, $g \neq 0$, то верхняя грань $\chi(g; p, G)$ множества всех целых неотрицательных k, для которых уравнение $p^k x = g$ обладает в G решением, называется p-высотой элемента g в группе G. Очевидно, имеет место равенство $\chi(g; p, G) = \mathscr{E}_p(g; (0))$.

Лемма 6. *Пусть G – группа без кручения и пусть $A = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – – p-независимое множество в G. Если $x \in G$, $x \neq 0$ и если $\mathscr{E}_p(x; A) = \infty$, то существуют целые p-адические числа $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что*

$$\mathfrak{a}_1 y_1 + \mathfrak{a}_2 y_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n y_n + x \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G . \tag{3}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{E}_p(x; A) = \infty$, то для каждого натурального числа k существуют целые рациональные числа $a_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что

$$a_1^{(k)} y_1 + a_2^{(k)} y_2 + \ldots + a_n^{(k)} y_n + x \equiv 0 \pmod{p^k}_G . \tag{4}$$

Пусть $k > 1$. Из соотношения (4) следует также соотношение

$$a_1^{(k)} y_1 + a_2^{(k)} y_2 + \ldots + a_n^{(k)} y_n + x \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}_G . \tag{5}$$

Но одновременно можно писать

$$a_1^{(k-1)} y_1 + a_2^{(k-1)} y_2 + \ldots + a_n^{(k-1)} y_n + x \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}_G ;$$

итак, отсюда и из (5) следует

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)} - a_i^{(k-1)}\right) y_i \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}_G . \tag{6}$$

Множество A по условию p-независимо в G, следовательно, соотношение (6) выполнено только тогда, если $a_i^{(k)} \equiv a_i^{(k-1)} \pmod{p^{k-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Это значит, что последовательности $\left(a_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} = \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представляют целые p-адические числа, удовлетворяющие в силу (4) соотношению (3), и лемма доказана.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием счётности. Мы условимся под счётным всегда понимать или конечный, или бесконечный счётный.

Лемма 7. *Пусть G – группа без кручения, содержащая счётную однородную вполне разложимую p^∞-независимую подгруппу H. Если фактор-группа G/H – – периодическая p-примарная, то $G \cong H$.*

Доказательство. Для $H = G$ утверждение леммы тривиально; итак, будем предполагать, что $H \subsetneqq G$. Тогда, в силу p-примарности группы G/H, подгруппа H должна содержать по крайней мере один элемент обладающий нулевой p-высотой в H. Отсюда и из однородности группы H уже следует, что для каждого $g \in H$, $g \neq 0$, имеет место неравенство $\chi(g; p, H) < \infty$.

Пусть $H = \sum_{i=1}^{\cdots} J_i$ – некоторое полное разложение группы H (мы пользуемся символом $\sum_{i=1}^{\cdots}$, так как неизвестно, если прямых слагаемых конечное, или бесконечное число). Все подгруппы J_i обладают одинаковым типом, итак, для некоторой подгруппы $\mathscr{R}^*$ аддитивной группы рациональных чисел и для некоторых элементов $x_i \in J_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ будет

$$J_i = \mathscr{R}^* x_i = E(g; g = \varrho x_i, \varrho \in \mathscr{R}^*) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

В силу того, что мы сказали о p-высоте элементов из H в H, элементы $x_i \in J_i$ можно выбрать так, что $\chi(x_i; p, H) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Но это значит, что если $\varrho = (m/n) \in \mathscr{R}^*$ и $(m, n) = 1$, то необходимо будет $(n, p) = 1$.

Так как $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то по лемме 5 из p^∞-независимости H в G следует p^∞-независимость элементов x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ в G. Следовательно, мы имеем прежде всего $\chi(x_i; p, G) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Теперь построим методом полной индукции последовательность элементов $y_1, y_2, \ldots$ из G; эта последовательность будет конечной или бесконечной в зависимости от того, если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ конечна или бесконечна.

Если положим $k_1 = \chi(x_1; p, G)$, то элемент y_1 определим так, чтобы имело место равенство $p^{k_1} y_1 = x_1$. Это значит, что $\chi(y_1; p, G) = 0$, или, множество (y_1) p-независимо в G. Кроме того из определения y_1 следует, что для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ существует в G элемент ϱy_1.

Пусть n – натуральное число, $n > 1$, и пусть уже найдены в G элементы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Элементы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ p-независимы в G;

2) $x_i \in \sum_{j=1}^{n-1} \{y_j\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$;

3) для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ существуют в G элементы ϱy_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Если группа H ранга $n-1$, значит, если

$$H = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_{n-1},$$

то последовательность $y_1, y_2, \ldots$ уже построена. Итак, пусть $r(H) \geqq n$ ($r(H)$ – ранг группы H). В этом случае положим $A_{n-1} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ и убедимся в том, что $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) < \infty$. Если бы имело место равенство $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) = \infty$, то существовали бы по лемме 6 целые p-адические числа $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ такие, что

$$\mathfrak{a}_1 y_1 + \ldots + \mathfrak{a}_{n-1} y_{n-1} + x_n \equiv \boldsymbol{0} \,(\mathrm{mod}\; p^\infty)_G \,. \tag{7}$$

По индуктивному предположению 2) имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \{x_i\} \subseteq \sum_{i=1}^{n-1} \{y_i\}\,.$$

Так как фактор-группа

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \{y_i\}\Big) / \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \{x_i\}\Big)$$

конечна, то существует натуральное число k такое, что $ky_j \in \sum_{i=1}^{n-1} \{x_i\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Если умножим соотношение (7) на это число k, то получим, наконец, некоторое соотношение вида

$$\mathfrak{b}_1 x_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{n-1} x_{n-1} + k x_n \equiv \boldsymbol{0} \,(\mathrm{mod}\; p^\infty)_G \,,$$

где $\mathfrak{b}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ – подходящие целые p-адические числа. Но это противоречит p^∞-независимости множества $(x_1, x_2, \ldots)$ в G. Этим доказано, что $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) < \infty$.

Положим $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) = k_n$ и обозначим через y_n тот элемент из G, который удовлетворяет некоторому соотношению вида

$$p^{k_n} y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1} + x_n \,, \tag{8}$$

где a_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ – целые рациональные числа. Легко убедиться в том, что элементы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ p-независимы в G (см. [5], лемма 7). Из (8) следует, что

$$x_n \in \{y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\} = \sum_{i=1}^{n} \{y_i\}\,,$$

итак, по индуктивному предположению 2) имеем

$$x_j \in \sum_{i=1}^{n} \{y_i\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Пусть, далее, m — такое целое рациональное число, что $(1/m) \in \mathscr{R}^*$; это значит, что $(m, p) = 1$, и также $(m, p^{k_n}) = 1$. Следовательно, для подходящих целых рациональных чисел u, v имеем $um + vp^{k_n} = 1$. Имея в виду индуктивное предположение 3), выберем в G элементы y_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и элемент x_n^* так, чтобы имели место соотношения

$$mx_n^* = x_n\,, \quad my_i^* = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Если теперь положим $y = a_1 y_1^* + \ldots + a_{n-1} y_{n-1}^* + x_n^*$, то по (8) имеем

$$p^{k_n} y_n = m(a_1 y_1^* + \ldots + a_{n-1} y_{n-1}^* + x_n^*) = my\,.$$

Отсюда уже следует равенство

$$y_n = umy_n + vp^{k_n} y_n = m(uy_n + vy)\,,$$

и этим доказано, что в группе G существует элемент $(1/m)\, y_n$. Теперь уже легко убедиться в том, что для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ существует в G элемент ϱy_n.

Таким образом можно методом полной индукции построить в G такую последовательность элементов $y_1, y_2, \ldots$, что выполнены следующие условия:

1*) Элементы y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ p-независимы в G;

2*) $x_j \in \sum\limits_{i=1}^{\cdots} \{y_i\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$;

3*) для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ существуют в G элементы ϱy_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Теперь обозначим $J_j^* = \mathscr{R}^* y_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и положим

$$G^* = \{J_j^*\ (j = 1, 2, \ldots)\}\,;$$

так как элементы y_j $(j = 1, 2, \ldots)$ p-независимы в G, то тем более они линейно независимы и должно быть

(9) $$G^* = \sum_{j=1}^{\cdots} J_j^* = \sum_{j=1}^{\cdots} \mathscr{R}^* y_j\,.$$

Если j — некоторый из индексов $1, 2, \ldots$, то в силу 2*) имеет место какое-то соотношение вида

(10) $$x_j = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n\,,$$

где b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа. Для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ имеется в G элемент ϱx_j и по 3*) также элементы ϱy_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда и из (10) имеем

$$\varrho x_j = b_1 \varrho y_1 + b_2 \varrho y_2 + \ldots + b_n \varrho y_n\,,$$

следовательно, по (9) будет $\varrho x_j \in G^*$. Этим мы доказали, что $\mathscr{R}^* x_j = J_j \subseteq G^*$ $(j = 1, 2, \ldots)$, или, $H \subseteq G^*$.

Теперь докажем, что уже $G^* = G$. Так как имеет место соотношение

$$G/G^* \cong (G/H)/(G^*/H),$$

то G/G^* или периодическая p-примарная, или нулевая. Предположим, что $G/G^* \neq (0)$ и что $g \in G \dot{-} G^*$. Тогда для некоторого натурального k будет $p^k g \in G$; конечно, элемент g можно выбрать так, что $pg \in G^*$. В таком случае имеем (см. (9))

$$pg = \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_2 + \ldots + \varrho_r y_r,$$

где $\varrho_i \in \mathscr{R}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Итак, существует натуральное число m взаимно простое с p такое, что имеет место формула

$$pmg = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_r y_r$$

с целыми рациональными числами c_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Из p-независимости элементов y_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ в G следует, что $p \mid c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, или, $c_i = pc'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Следовательно, можно писать

$$pmg = pc'_1 y_1 + pc'_2 y_2 + \ldots + pc'_r y_r,$$

и также

$$mg = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_r y_r \in G^*. \tag{11}$$

Если положим $\tilde{g} = g + G^* \in G/G^*$, то $\tilde{g} \neq \mathit{0}$. Но по (11) имеем $m\tilde{g} = \mathit{0}$, и это противоречит p-примарности группы G/G^* и соотношению $(m, p) = 1$.

Это значит, что в самом деле $G^* = G$, или

$$G = G^* = \sum_{j=1}^{\dots} J_j^* \cong \sum_{j=1}^{\dots} J_j = H,$$

и лемма полностью доказана.

Лемма 8. *Пусть G — группа без кручения и пусть B — некоторый её базис. Если A — максимальное p^∞-независимое в G подмножество множества B, то A является p^∞-базисом группы G.*

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент группы G, непринадлежащий множеству A. Достаточно доказать, что множество (A, g) уже p^∞-зависимо в G.

Так как B — базис в G, существуют элементы $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_s$ и целые рациональные числа $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s$ и $m \neq 0$ такие, что

$$mg + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r + a_{r+1} x_{r+1} + \ldots + a_s x_s = \mathit{0}; \tag{12}$$

притом предполагаем, что $x_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и $x_j \in B \dot{-} A$ $(j = r + 1, \ldots, s)$. Вместо (12) можно также писать

$$(13) \qquad mg + \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G .$$

Если $r = s$, то доказательство завершено, так как в этом случае следует из (13) p^∞-зависимость множества (A, g) в G. Пусть $r < s$. Так как A — максимальное p^∞-независимое (в G) подмножество базиса B, то множества (A, x_j) $(j = r + 1, \ldots, s)$ p^∞-зависимы в G. Следовательно, имеют место соотношения

$$(14) \qquad \mathfrak{a}_j x_j + f_j(A) \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G \quad (j = r + 1, \ldots, s),$$

где $\mathfrak{a}_j$ $(j = r + 1, \ldots, s)$ — ненулевые целые p-адические числа и $f_j(A)$ — подходящие линейные комбинации элементов из A с целыми p-адическими числами в качестве коэффициентов. Если положим $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{r+1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_s$ и одновременно $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_j^{-1}$ $(j = r + 1, \ldots, s)$, то $\mathfrak{a} \neq 0$ и из (14) получаем

$$\mathfrak{a} x_j + \mathfrak{b}_j f_j(A) \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G \quad (j = r + 1, \ldots, s).$$

Отсюда и из (13) следует соотношение

$$m\mathfrak{a}g + \sum_{i=1}^{r} a_i \mathfrak{a} x_i - \sum_{j=r+1}^{s} a_j \mathfrak{b}_j f_j(A) \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G ,$$

которое показывает, что в этом случае множество (A, g) также p^∞-зависимо в G. Лемма полностью доказана.

Лемма 9. *Если некоторый базис группы без кручения G служит одновременно её p^∞-базисом, то уже каждый базис группы G должен быть p^∞-базисом в G.*

Доказательство. Так как группа G обладает по предположению базисом, служащим одновременно p^∞-базисом группы G, то по лемме 1 будет $r_p(G) = 0$. В силу леммы 8 каждый базис группы G содержит по крайней мере один p^∞-базис; но тогда из равенства $r_p(G) = 0$ и леммы 1 непосредственно следует, что этот p^∞-базис должен совпадать с целым базисом, и лемма доказана.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующую основную теорему.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения, содержащая счётную однородную вполне разложимую подгруппу H. Если группа G/H — периодическая и Π-примарная, [2]) где Π — некоторое конечное множество простых чисел, и если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G, то $G \cong H$.*

---

[2]) Периодическая группа называется Π-примарной, где Π — некоторое множество простых чисел, если порядок каждого ее элемента является произведением степеней простых чисел из Π.

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по числу элементов множества Π.

Если Π состоит из одного только простого числа p, то применим лемму 7.

Итак, пусть Π состоит из n простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $n \geqq 2$, и пусть теорема справедлива всегда, когда множество простых чисел состоит из $n-1$ элементов. Если положим $\tilde{G} = G/H$, то можем писать

$$(15) \qquad \tilde{G} = \tilde{G}^{(p_1)} \dotplus \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)},$$

где $\tilde{G}^{(p_i)}$ представляет p_i-примарное слагаемое группы $\tilde{G}$. Положим

$$(16) \qquad \tilde{G}_* = \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)}$$

и символом G_* обозначим подгруппу группы G такую, что $H \subseteq G_*$ и $\tilde{G}_* = G_*/H$. Из p_i^∞-независимости подгруппы H во всей G следует её p_i^∞-независимость $(i = 2, \ldots, n)$ в G_*, и по индуктивному предположению имеем $G_* \cong H$. Так как группа G содержит базис, служащий одновременно её p_1^∞-базисом (именно, если $H = \sum_{i=1}^{\cdots} J_i$ – некоторое полное разложение группы H и если выберем в каждом J_i ненулевой элемент, то получим базис группы G, являющийся p_1^∞-базисом в G), то по лемме 9 будет уже каждый базис группы G её p_1^∞-базисом. Итак, если $G_* = \sum_{i=1}^{\cdots} J_i^*$ – некоторое полное разложение группы G_* и если выберем в каждом J_i^* ненулевой элемент, то получим базис группы G, который должен быть p_1^∞-базисом группы G, или, другими словами, подгруппа G_* p_1^∞-независима в G. Это значит, что группа G и её подгруппа G_* удовлетворяют всем условиям леммы 7, так как по (15) и (16) имеем

$$G/G_* \cong \tilde{G}/\tilde{G}_* \cong \tilde{G}^{(p_1)};$$

следовательно $G \cong G_* \cong H$.

Лемма 10. *Пусть группа без кручения G содержит такую однородную вполне разложимую подгруппу H, что G/H является редуцированной периодической Π-примарной группой (в множество Π заключены только те простые числа p, для которых p-примарное слагаемое группы G/H является ненулевой группой). Тогда для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G.*

Доказательство. Пусть $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ – некоторое полное разложение группы H и пусть $p \in \Pi$. Докажем, что подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ p^∞-независимы в G.

Так как p-примарное слагаемое группы G/H является ненулевым, то имеется в H по крайней мере один ненулевой элемент, обладающий в H конечной p-высотой. Итак, в силу однородности группы H, каждый ненулевой элемент из H

обладает в H конечной p-высотой. Отсюда, в частности, следует, что $r_p(J_\iota) = 0$ $(\iota \in I)$ (см. [6], лемма 6.1). Теперь предположим, что подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ p^∞-зависимы в G. Тогда можно выбрать по лемме 4 индексы ι_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что для группы

$$S = \mathscr{S}_G(J_{\iota_1} \cup J_{\iota_2} \cup \ldots \cup J_{\iota_n})$$

будет $r_p(S) > 0$. Но если положим

$$T = \{J_{\iota_1}, J_{\iota_2}, \ldots, J_{\iota_n}\} = J_{\iota_1} \dotplus J_{\iota_2} \dotplus \ldots \dotplus J_{\iota_n},$$

то имеем $r_p(T) = \sum_{i=1}^{n} r_p(J_{\iota_i}) = 0$ (см. [6], теорема 6). Тогда фактор-группа S/T является периодической группой, и её p-примарное слагаемое не может быть редуцированной группой (см. [6], теорема 5).

Если положим $T^* = \sum_{\iota \in I^*} J_\iota$, где $I^* = I \dot{-} (\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n)$, то имеем $H = T \dotplus T^*$; отсюда также следует равенство $\{S, T^*\} = S \dotplus T^*$. Итак, если $G^* = S \dotplus T^*$, то $H \subseteq G^*$, и можно писать

$$G^*/H = (S \dotplus T^*)/(T \dotplus T^*) \cong S/T,$$

или, в силу того, что мы сказали о группе S/T, p-примарное слагаемое группы G^*/H не является редуцированной группой. Но это противоречит предположению леммы, так как $G^*/H \subseteq G/H$. Итак, подгруппа H p^∞-независима в G, и лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть группа без кручения G содержит счётную однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H является редуцированной периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел, то $G \cong H$.*

Доказательство. Теорема следует непосредственно из теоремы 1 и леммы 10.

Теорема 3. *Пусть G — группа без кручения без элементов бесконечной p-высоты в G и пусть H — такая однородная вполне разложимая подгруппа в G, что G/H является периодической p-примарной группой. Если подгруппа H не является p^∞-независимой в G, то группа G не может быть вполне разложимой, и тем более не имеет места изоморфизм $G \cong H$.*

Доказательство. Из предположений теоремы легко следует, что группа G должна быть также однородной и того же типа как H. Но предположим, что G вполне разложима и что $G = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ — некоторое её полное разложение. Если бы подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ были p^∞-независимые в G, то G обладала бы базисом, служащим одновременно её p^∞-базисом; но отсюда, применяя лемму 9, мы легко могли бы вывести, что H p^∞-независима в G, и это противоречит условиям теоремы. Значит, подгруппы J_ι $(\iota \in I)$ p^∞-зависимы в G. Тогда существуют по лемме 4 индексы ι_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что для подгруппы

$$S = \mathscr{S}_G(J_{\iota_1} \cup J_{\iota_2} \cup \ldots \cup J_{\iota_n})$$

будет $r_p(S) > 0$. Но так как $J_{\iota_1} \dotplus J_{\iota_2} \dotplus \ldots \dotplus J_{\iota_n}$ служит прямым слагаемым для G, то $S = J_{\iota_1} \dotplus J_{\iota_2} \dotplus \ldots \dotplus J_{\iota_n}$, или (см. [6], теорема 6),

$$r_p(S) = \sum_{i=1}^{n} r_p(J_{\iota_i}) > 0 .$$

Следовательно, для некоторого i должно быть $r_p(J_{\iota_i}) = 1$, или (см. [6], лемма 6.1), для каждого ненулевого $g \in J_{\iota_i}$ будет

$$\infty = \chi(g; p, J_{\iota_i}) = \chi(g; p, G) .$$

Однако, последнее соотношение противоречит условиям теоремы.

Итак, группа G не может быть вполне разложимой, и теорема полностью доказана.

В предшествующей теореме требовалось, чтобы группа G не обладала элементами бесконечной высоты. Следующая теорема описывает, наоборот, тот случай, когда группа G содержит элементы бесконечной p-высоты.

Теорема 4. *Пусть G — однородная группа без кручения, содержащая однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H — периодическая Π-примарная группа и если для каждого $p \in \Pi$ группа G обладает элементами бесконечной высоты в G, то группа G вполне разложима.*

Доказательство. Пусть $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ — некоторое полное разложение группы H. Из однородности группы H следует, что существуют элементы $x_\iota \in J_\iota$ $(\iota \in I)$ и подгруппа $\mathscr{R}^*$ аддитивной группы рациональных чисел такие, что $J_\iota = \mathscr{R}^* x_\iota$ $(\iota \in I)$. Пусть $\mathscr{R}_0$ — подгруппа группы рациональных чисел, порожденная всеми элементами группы $\mathscr{R}^*$ и всеми числами вида $(1/p^n)$ $(p \in \Pi$, $n = 1, 2, \ldots)$; значит,

$$\mathscr{R}_0 = \left\{\mathscr{R}^*, \ \frac{1}{p^n}(p \in \Pi, \ n = 1, 2, \ldots)\right\}.$$

Так как группа G однородна и для каждого $p \in \Pi$ имеются в G ненулевые элементы бесконечной p-высоты, то уже каждый ненулевой элемент из G обладает в G бесконечной p-высотой. В частности, все x_ι $(\iota \in I)$ являются элементами бесконечной p-высоты в G $(p \in \Pi)$, или, как легко видеть, для каждого

$\varrho \in \mathscr{R}_0$ существуют в G элементы ϱx_ι $(\iota \in \boldsymbol{I})$. Если положим

$$J_\iota^* = \mathscr{R}_0 x_\iota \quad (\iota \in \boldsymbol{I}),$$

то необходимо будет

$$\{J_\iota^*(\iota \in \boldsymbol{I})\} = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota^* = G^* .$$

Так как $H \subseteq G^*$, то G/G^* является периодической и Π-примарной группой. Но должно уже быть $G/G^* = (0)$, или, $G = G^*$. Если бы было $G/G^* \neq (0)$, то существовали бы простое число $p \in \Pi$ и ненулевой элемент $g \in G$ так, что $g \notin G^*$, по $pg \in G^*$. Каждый ненулевой элемент из G^* обладает в G^* бесконечной p-высотой, следовательно, существует в G^* элемент g^* такой, что $pg = pg^*$. Тогда $g^* = g \in G^*$, что противоречит выбору элемента g. Итак, должно быть

$$G = G^* = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota^* ,$$

и теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H — счётная периодическая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел и если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G, то $G \cong H$.*

Доказательство. Если $G = H$, то нечего доказывать, и, следовательно, будем предполагать, что $H \subseteq G$.

Пусть $H = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota$ — некоторое полное разложение группы H. Если $g \in G \dot{-} H$, то существует наименьшее натуральное число k, для которого $kg \in H$; итак, имеет место некоторая формула вида

$$kg = x_{\iota_1} + x_{\iota_2} + \ldots + x_{\iota_n} ,$$

где $x_{\iota_i} \in J_{\iota_i}$, $x_{\iota_i} \neq 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\iota_i \neq \iota_j$ для $i \neq j$. Элементы $x_{\iota_i}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, определенные только что описанным образом, будем называть компонентами элемента g в подгруппе H (относительно данного полного разложения группы H).

Теперь выберем в каждом классе фактор-группы G/H один элемент и множество всех таких представителей обозначим M; в силу счётности группы G/H будет счётным и множество M. Далее, выберем все подгруппы J_ι, содержащие по крайней мере одну компоненту некоторого элемента из M; пусть это в точности группы J_ι $(\iota \in \boldsymbol{I}_1,\ \boldsymbol{I}_1 \subseteq \boldsymbol{I})$. Очевидно, множество $\boldsymbol{I}_1$ должно быть счётным. Положим ещё $\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I} \dot{-} \boldsymbol{I}_1$ и определим подгруппы G_1, G_2 группы G формулями

$$G_1 = \{\sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_1} J_\iota, M\} , \quad G_2 = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_2} J_\iota .$$

Из определения множества M следует равенство $\{H, M\} = G$, или же

$$G = \{ \sum_{\iota \in I_1} J_\iota, \sum_{\iota \in I_2} J_\iota, M\} = \{G_1, G_2\} . \tag{17}$$

Легко видеть (смотри определение множества M и множества индексов I_1), что умножением элемента из G_1 на подходящее ненулевое целое рациональное число получим элемент из $\sum_{\iota \in I_1} J_\iota = H_1$, или, умножением элемента из $G_1 \cap G_2$ на ненулевое целое число получим элемент из $H_1 \cap G_2 = (0)$; но это значит, что $G_1 \cap G_2 = (0)$. Отсюда и из (17) уже следует

$$G = G_1 \dotplus G_2 . \tag{18}$$

Так как $H_1 \subseteq \{H_1, M\} = G_1$ и так как $H = H_1 \dotplus G_2$, то имеет место формула

$$G/H = (G_1 \dotplus G_2)/(H_1 \dotplus G_2) \cong G_1/H_1 .$$

Итак, к группе G_1 и её подгруппе H_1 можно применить теорему 1, так как подгруппа H_1, которая служит прямым слагаемым для группы H, будет p^∞-независимой в G_1 для каждого $p \in \Pi$. Это значит, что $G_1 \cong H_1$, или,

$$G = G_1 \dotplus G_2 \cong H_1 \dotplus G_2 = H ,$$

и теорема доказана.

Отсюда получим, в частности, следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H – редуцированная счётная периодическая Π-примарная группа, где Π – конечное множество простых чисел, то $G \cong H$.*

Доказательство. Из леммы 10 следует, что для каждого $p \in \Pi$ (очевидно, можно предполагать, что Π заключает только такие числа p, для которых будет p-примарное слагаемое группы G/H ненулевой группой) подгруппа H p^∞-независима в G. Теперь достаточно применить теорему 5.

Теорема 7. *Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H – периодическая Π-примарная группа, где Π – конечное множество простых чисел, и если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G, то каждая счётная сервантная подгруппа группы G вполне разложима и однородна того же типа как H.*

Доказательство. Пусть S – произвольная счётная сервантная подгруппа в G. Если положим $H_1 = \{H, S\}$, то по теореме об изоморфизме имеем

$$H_1/H = \{H, S\}/H \cong S/(H \cap S) .$$

Отсюда следует, что группа H_1/H должна быть счётной. Так как H_1/H является одновременно периодической Π-примарной и для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в H_1, то по теореме 5 будет $H_1 \cong H$. Подгруппа S сервантна в G, следовательно, S сервантна в H_1; притом группа H_1 однородна и вполне разложима. Итак, из теоремы 46.6 из [1] следует, что S вполне разложима и однородна того же типа как H_1, или, также как H. Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Непосредственным следствием леммы 10 и теоремы 7 служит следующее утверждение: Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H. Если G/H — редуцированная периодическая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел, то каждая счётная сервантная подгруппа группы G вполне разложима и однородна того же типа как H.

Для формулировки следующей теоремы напомним одно определение (см. [1], § 27, C)): Пусть $\mathfrak{n}$ — кардинальное число. Группа без кручения называется $\mathfrak{n}$-свободной, если каждая её ненулевая подгруппа мощности, меньшей чем $\mathfrak{n}$, свободна.

Теорема 8. *Пусть группа без кручения G содержит такую свободную подгруппу H, что G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел.*

a) *Если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G, то группа G $\aleph_1$-свободна; если кроме того G/H счётна, то группа H уже также свободна.*

b) *Если группа G/H редуцирована, то G $\aleph_1$-свободна; если кроме того G/H счётна, то группа G уже свободна.*

Доказательство. a) Пусть V — произвольная ненулевая счётная подгруппа в G. Тогда подгруппа $S = \mathscr{S}_G(V)$, будучи счётной сервантной подгруппой в G, будет по теореме 7 свободной группой. Свободность подгруппы V теперь следует из соотношения $V \subseteq S$. Если G/H счётна, то по теореме 5 имеем $G \cong H$.

в) Это утверждение получим из части a), применяя лемму 10.

Теперь ещё обобщим теорему 5 и теорему 6 и докажем следующие две теоремы.

Теорема 9. *Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H такую, что G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если группа G/H является расширением периодической группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы и если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G, то $G \cong H$.*

Доказательство. По предположению существует в $\tilde{G} = G/H$ подгруппа $\tilde{G}_1$ с ограниченными в совокупности порядками элементов такая, что группа $\tilde{G}/\tilde{G}_1$ счётна. Если G_1 — такая подгруппа в G, что $H \subseteq G_1$ и $G_1/H = \tilde{G}_1$, то по теореме B из [3] имеем $G_1 \cong H$. Воспользовавшись леммой 9, можем утверждать (смотри доказательство теоремы 1), что для $p \in \Pi$ каждый базис группы G служит p^∞-базисом в G, значит, подгруппа G_1 p^∞-независима в G. Далее, имеет место соотношение

$$G/G_1 \cong (G/H)/(G_1/H) = \tilde{G}/\tilde{G}_1\,,$$

следовательно, G/G_1 счётна. Если применим теорему 5, то получим уже изоморфизм $G \cong G_1 \cong H$, и теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть группа без кручения G содержит однородную вполне разложимую подгруппу H такую, что G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если группа G/H является расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной редуцированной группы, то $G \cong H$.*

Доказательство. Из условий, накладываемых на группу G/H, легко следует, что группа G/H должна быть редуцированной. Теперь достаточно применить лемму 10 и теорему 9.

До сих пор мы занимались структурой некоторых расширений однородных вполне разложимых групп без кручения. Теперь докажем, наоборот, две теоремы, касающиеся подгрупп однородных вполне разложимых групп без кручения.

Лемма 11. *Пусть G — однородная вполне разложимая группа без кручения и пусть H — такая её подгруппа в G, что G/H является периодической Π-примарной группой. Если в G нет ненулевых элементов бесконечной p-высоты (в G), то $H \cong G$.*

Доказательство. Группу G можно по предположению представить в виде

$$G = \sum_{\iota \in I} \mathscr{R}^* x_\iota\,, \tag{19}$$

где $\mathscr{R}^*$ — некоторая подруппа аддитивной группы рациональных чисел и x_ι $(\iota \in I)$ — ненулевые элементы из G. Так как каждый ненулевой элемент из G обладает в G конечной p-высотой, элементы $x_\iota \in G$ $(\iota \in I)$ и подгруппу $\mathscr{R}^*$ можно выбрать таким образом, что

$$\chi(x_\iota;\, p,\, G) = 0 \quad (\iota \in I)\,.$$

Это значит, что каждое ненулевое рациональное число из $\mathscr{R}^*$, представленное в несократимом виде, обладает знаменателем, взаимно простым с p.

Теперь положим

$$U = \sum_{\iota \in I} \{x_\iota\}$$

и кроме того $V = H \cap U$. Так как G/H — периодическая группа, то для каждого $\iota \in \boldsymbol{I}$ должно быть $\{x_\iota\} \cap H \neq (0)$; итак, для рангов имеем

$$r(V) = r(U) = r(G)\,. \tag{20}$$

Ненулевая погруппа V свободной группы U будет также свободной, или, $V = \sum_{\nu \in \boldsymbol{N}} \{y_\nu\}$; но в силу (20) можно в качестве множества индексов $\boldsymbol{N}$ взять прямо множество $\boldsymbol{I}$, следовательно, имеем

$$V = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} \{y_\iota\}\,. \tag{21}$$

Пусть $\iota \in \boldsymbol{I}$. Из соотношения $y_\iota \in V \subseteq U$ следует, что имеет место некоторое соотношение вида

$$y_\iota = n_1 x_{\iota_1} + n_2 x_{\iota_2} + \ldots + n_r x_{\iota_r}\,,$$

где n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — целые рациональные числа. Это значит, что для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ существует в G элемент ϱy_ι, так как

$$\varrho y_\iota = n_1 \varrho x_{\iota_1} + n_2 \varrho x_{\iota_2} + \ldots + n_r \varrho x_{\iota_r}\,.$$

Если определим подгруппы $J_\iota^* = \mathscr{R}^* y_\iota$ $(\iota \in \boldsymbol{I})$ и если положим $H^* = \{J_\iota^*\ (\iota \in \boldsymbol{I})\}$, то по (21) должно быть

$$H^* = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota^* \cong \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota = G\,. \tag{22}$$

Так как G/H по предположению p-примарна, то для каждого простого $q \neq p$ и для каждого $h \in H$ будет

$$\chi(h;\, q, H) = \chi(h;\, q, G)\,.$$

Если $\varrho = (m/n) \in \mathscr{R}^*$, $\varrho \neq 0$ и $(m, n) = 1$, то $(n, p) = 1$. Но тогда из соотношения $y_\iota \in H$ и из разрешимости уравнения $nx = my_\iota$ в G следует его разрешимость и в H, значит, $\varrho y_\iota \in H$. Это значит, что

$$J_\iota^* = \mathscr{R}^* y_\iota \subseteq H \quad (\iota \in \boldsymbol{I})\,,$$

или, также $H^* \subseteq H$.

Если $g \in G$, то по (19) можно писать

$$g = \varrho_1 x_{\iota_1} + \varrho_2 x_{\iota_2} + \ldots + \varrho_s x_{\iota_s}\,, \tag{23}$$

где $\varrho_i \in \mathscr{R}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Далее, для некоторого натурального k имеем $p^k x_{\iota_j} \in H$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, или,

$$p^k x_{\iota_j} \in H \cap U = V \quad (j = 1, 2, \ldots, s)\,.$$

Это значит, что каждое $p^k x_{\iota_j}$ представимо в виде целочисленной линейной комбинации элементов y_ι $(\iota \in I)$, итак, для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ будет $p^k \varrho x_{\iota_j} \in H^*$. **В частности имеем**

$$p^k \varrho_j x_{\iota_j} \in H^* \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

следовательно, по (23) должно быть $p^k g \in H^*$. Этим мы доказали, что группа G/H^* и её подгруппа H/H^* являются периодическими p-примарными группами.

Пусть теперь $g \in H$; элемент g можно представить в виде (23). Тогда существует натуральное число n взаимно простое с p такое, что

$$ng = m_1 x_{\iota_1} + m_2 x_{\iota_2} + \ldots + m_s x_{\iota_s},$$

где m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ – уже целые рациональные числа. Но это значит, что

$$ng \in H \cap U = V \subseteq H^* .$$

Так как группа H/H^* p-примарна и $(n, p) = 1$, то из последнего соотношения уже следует, что $g \in H^*$. Этим мы доказали, что $H^* = H$, или, по (22) $H = H^* \cong G$. Лемма полностью доказана.

Теорема 11. *Пусть G – однородная вполне разложимая группа без кпучения и пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является периодической Π-примарной группой, где Π – конечное множество простых чисел. Если для каждого $p \in \Pi$ каждый ненулевой элемент из G обладает в G конечной p-высотой, то $H \cong G$.*

Доказательство. Теорему можно доказать методом полной индукции по числу элементов множества Π, применяя лемму 11.

Лемма 12. *Пусть G – однородная вполне разложимая группа без кручения и пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является редуцированной периодической p-примарной группой. Тогда $H \cong G$.*

Доказательство. Если имеется в G ненулевой элемент, обладающий в G бесконечной p-высотой, то в силу однородности G уже каждый ненулевой элемент из G обладает в G бесконечной p-высотой. Это значит, что для каждого $g \in G$ разрешимо в G уравнение $px = g$ и, следовательно, аналогичным свойством должна обладать и фактор-группа G/H. Отсюда и из p-примарности группы G/H уже следует, что G/H полна. Но так как G/H одновременно редуцированна, то $G/H = (0)$, или $G = H$. Итак, в этом случае утверждение выполнено тривиально.

Если в G нет ненулевых элементов бесконечной p-высоты в G, то достаточно применить лемму 11.

Теорема 12. *Пусть G – однородная вполне разложимая группа без кручения и пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является редуцированной периоди-*

ческой П-примарной группой, где П — конечное множество простых чисел. Тогда $H \cong G$.

Доказательство. Теорему можно доказать индукцией по числу элементов множества Π, если применить лемму 12.

Замечание. В частном случае из теоремы 12 получаем: Если G — вполне разложимая однородная группа без кручения и если для некоторой подгруппы H фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, то $H \cong G$.

Замечание. Теорема 12 представляет утверждение противоположное к теореме 6.

Теперь применим некоторые полученные результаты к смешанным группам.

Лемма 13. *Пусть G — смешанная группа, периодическая часть P которой является p-примарной, и пусть G содержит расщепляемую подгруппу H вида $H = A \dotplus P$, где A — вполне разложимая однородная группа без кручения. Если G/H — периодическая p-примарная группа служащая расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, и если подгруппа $\tilde{H} = H/P$ p^∞-независима в $\tilde{G} = G/P$, то $G = A_0 \dotplus P$, где $A_0 \cong A$.*

Доказательство. По второй теореме об изоморфизме имеем

$$\tilde{G}/\tilde{H} = (G/P)/(H/P) \cong G/H\,, \tag{24}$$

или, $\tilde{G}/\tilde{H}$ является периодической p-примарной группой, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи группы счётной. Так как $\tilde{H} = H/P \cong A$ и так как группа $\tilde{H}$ p^∞-независима в $\tilde{G}$, то по теореме 9 имеем $\tilde{G} \cong \tilde{H}$. Итак, можно писать

$$\tilde{G} = \sum_{\iota \in I} \tilde{J}_\iota \cong \tilde{H} \cong A\,, \tag{25}$$

где $r(\tilde{J}_\iota) = 1$ $(\iota \in I)$.

Для $G = H$ утверждение леммы выполнено тривиально, итак, будем предполагать, что $H \subsetneqq G$. Отсюда и из (24) следует, что $\tilde{G}/\tilde{H}$ является ненулевой p-примарной группой. Это значит, что в $\tilde{H}$ имеются ненулевые элменты конечной p-высоти (в $\tilde{H}$), следовательно, в силу однородности $\tilde{H}$, каждый ненулевой элемент из $\tilde{H}$ обладает в $\tilde{H}$ конечной p-высотой. Этим же свойством должна по (25) обладать и группа $\tilde{G}$.

В каждой группе $\tilde{J}_\iota$ можно выбрать ненулевой элемент $\tilde{x}_\iota$ так, что для удобной подгруппы $\mathscr{R}^*$ аддитивной группы рациональных чисел будет

$$\tilde{J}_\iota = \mathscr{R}^* \tilde{x}_\iota \quad (\iota \in I)\,;$$

очевидно, элементы $\tilde{x}_\iota$ можно выбрать так, что $\chi(\tilde{x}_\iota; p, \tilde{G}) = 0$ $(\iota \in \boldsymbol{I})$, или, знаменатель каждого ненулевого рационального числа из $\mathscr{R}^*$, представленного в несократимом виде, взаимно прост с p. Пусть x_ι — некоторый представитель класса $\tilde{x}_\iota$ и пусть $0 \neq (m/n) \in \mathscr{R}^*$, $(m, n) = 1$. Тогда уравнение $nx = m\tilde{x}_\iota$ обладает в $\tilde{G}$ (единственным) решением; пусть $n\tilde{g} = m\tilde{x}_\iota$. Если g — некоторый представитель класса $\tilde{g}$, то $ng = mx_\iota + b$, где $b \in P$. Так как $(n, p) = 1$ и P p-примарна, то существует $b' \in P$ так, что $nb' = b$, или, $n(g - b') = mx_\iota$. Это значит, что уравнение $nx = mx_\iota$ разрешимо в G; но из p-примарности периодической части P и из соотношения $(n, p) = 1$ следует единственность решения этого уравнения. Этим мы доказали, что для каждого $\varrho \in \mathscr{R}^*$ и для произвольного $\iota \in \boldsymbol{I}$ существует в G элемент ϱx_ι. Теперь положим $J_\iota = \mathscr{R}^* x_\iota$ $(\iota \in \boldsymbol{I})$. Из определения элементов x_ι и подгрупп J_ι непосредственно вытекает соотношение $\tilde{J}_\iota = \{J_\iota, P\}/P$. Так как имеем

$$\{\tilde{J}_\iota\ (\iota \in \boldsymbol{I})\} = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} \tilde{J}_\iota\,,$$

то необходимо также будет

$$\{J_\iota\ (\iota \in \boldsymbol{I})\} = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} J_\iota = A_0\,.$$

Только что определенная группа A_0 является группой без кручения; итак, имеем

$$\{A_0, P\} = A_0 \dotplus P = G^*\,.$$

Но тогда из соотношения

$$G^*/P = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} \tilde{J}_\iota = \tilde{G} = G/P$$

уже следует равенство $G = G^* = A_0 \dotplus P$. Кроме того, отсюда и из (25) получаем

$$A_0 \cong G/P = \tilde{G} \cong \tilde{H} = H/P \cong A\,,$$

чем лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus P$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения. Если G/H — периодическая p-примарная группа, служащая расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, и если подгруппа $\tilde{H} = H/P$ p^∞-независима в $\tilde{G} = G/P$, то $G = A_0 \dotplus P$, где $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Если $P^{(p)}$ — p-примарное слагаемое группы P, то можно писать $P = P^{(p)} \dotplus P_*$. Так как $H = A \dotplus P = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P_*$, то P_* служит прямым слагаемым для группы H; тогда из p-примарности группы G/H по лемме 2 из [7] следует, что P_* служит прямым слагаемым для всей группы G. Следовательно, можем писать

$$G = G_1 \dotplus P_* \,; \tag{26}$$

притом, очевидно, $P^{(p)}$ является периодической частью группы G_1. Если положим $H_1 = H \cap G_1 \subseteq G_1$, то имеем

$$H = H_1 \dotplus P_* \,, \tag{27}$$

и подгруппа $P^{(p)}$ является одновременно периодической частью группы H_1. Из (26) и (27) следуют изоморфизмы

$$\tilde{G} = G/P \cong G_1/P^{(p)}\,, \quad \tilde{H} = H/P \cong H_1/P^{(p)}\,. \tag{28}$$

Теперь покажем, что подгруппа $H_1/P^{(p)}$ p^∞-независима в группе $G_1/P^{(p)}$. Для этой цели построим отображение, представляющее одновременно оба изоморфизма (28).

Итак, определим отображение φ группы G/P в группу $G_1/P^{(p)}$ следующим образом: Если $g \in G$, то по (26) можно однозначно писать $g = g_1 + q_*$, где $g_1 \in G_1$ и $q_* \in P_*$, и положим

$$\varphi(g + P) = g_1 + P^{(p)}\,.$$

Прежде всего надо убедиться в однозначности отображения φ. Итак, если $g + P = \bar{g} + P$ и если $\bar{g} = \bar{g}_1 + \bar{q}_*$, где $\bar{g}_1 \in G_1$, $\bar{q}_* \in P_*$, то должно быть $g - \bar{g} = g_1 - \bar{g}_1 + (q_* - \bar{q}_*) \in P$. Так как $q_* - \bar{q}_* \in P_* \subseteq P$, то имеем $g_1 - \bar{g}_1 \in \in P$. Это значит, что $g_1 - \bar{g}_1 \in G_1 \cap P = P^{(p)}$, или,

$$\varphi(g + P) = g_1 + P^{(p)} = \bar{g}_1 + P^{(p)} = \varphi(\bar{g} + P)\,.$$

Далее, легко видеть, что φ является гомоморфным отображением группы G/P на группу $G_1/P^{(p)}$.

Если $\varphi(g + P) = P^{(p)}$, то $g_1 \in P^{(p)}$, или $g = g_1 + q_* \in P$, значит $g + P = P$. Этим мы доказали, что ядром гомоморфизма φ является нулевая подгруппа, итак, φ является изоморфизмом. Притом легко видеть, что

$$\varphi(H/P) = H_1/P^{(p)}\,.$$

Построением изоморфного отображения φ мы доказали, что подгруппа $H_1/P^{(p)} = \varphi(H/P)$ p^∞-независима в $G_1/P^{(p)} = \varphi(G/P)$, так как по предположению подгруппа H/P p^∞-независима в G/P. Из равенства $H = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P_* = = H_1 \dotplus P_*$ следует, что $H_1 = A_1 \dotplus P^{(p)}$, где $A_1 \cong A$. Далее, группа G_1/H_1 является периодической p-примарной группой, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, так как по (26) и (27) имеем $G_1/H_1 \cong G/H$. Если к группам G_1, H_1 применим лемму 13, то получим прямое разложение $G_1 = A_0 \dotplus P^{(p)}$, где $A_0 \cong A_1 \cong$ $\cong A$. Отсюда и из (26) уже следует утверждение леммы.

Лемма 15. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus P$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения, и пусть G/H — периодическая Π-примарная группа, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H является расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы и если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H/P p^{∞}-независима в G/P, то $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Лемму докажем полной индукцией по числу элементов множества Π.

Если Π состоит из единственного числа p, то применим лемму 14.

Итак, пусть $\Pi = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $n > 1$, и пусть лемма справедлива всегда, когда множество простых чисел содержит меньше чем n элементов. Если обозначим $\tilde{G} = G/H$, то имеем

$$\tilde{G} = \tilde{G}^{(p_1)} \dotplus \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)} = \tilde{G}^{(p_1)} \dotplus \tilde{G}_*\,, \tag{29}$$

где $\tilde{G}^{(p_i)}$ — p_i-примарное слагаемое группы $\tilde{G}$. Из предположений леммы следует, что каждая группа $\tilde{G}^{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счетной группы. Если G_* – такая подгруппа группы G, что $H \subseteq G_*$ и $G_*/H = \tilde{G}_*$, то по (29) имеем

$$G_*/H = \tilde{G}_* = \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)}\,,$$

значит, к группам G_*, H можно применить индуктивное предположение. Итак, $G_* = A_* \dotplus P$, где $A_* \cong A$. Пользуясь леммой 9, можно было бы теперь доказать, что подгруппа G_*/P p_1^{∞}-независима в G/P (смотри доказательство теоремы 1). По (29) имеем

$$G/G_* \cong \tilde{G}/\tilde{G}_* \cong \tilde{G}^{(p_1)}\,,$$

или, к группе G и её подгруппе G_* можно применить лемму 14. Следовательно, имеем $G = A_0 \dotplus P$, где $A_0 \cong A_* \cong A$.

Доказательство полной индукцией завершено.

Лемма 16. *Пусть периодическая группа P служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы. Если Q — произвольная подгруппа в P с ограниченными в совокупности порядками элементов, то P/Q является опять расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы.*

Доказательство. По предположению существует в P подгруппа P_0 с ограниченными в совокупности порядками элементов такая, что P/P_0 счётна. Если положим $\tilde{P}_0 = \{P_0, Q\}/Q$, то $\tilde{P}_0$ обладает ограниченными в совокупности порядками элементов и имеем

$$\tilde{P}/\tilde{P}_0 \cong P/\{P_0, Q\} \cong (P/P_0)/(\{P_0, Q\}/P_0)\,.$$

Следовательно, группа $\tilde{P}/\tilde{P}_0$ счётна, чем лемма доказана.

Теперь уже легко докажем следующую теорему.

Теорема 13. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus Q$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения и Q — периодическая группа, и пусть G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа $\{H, P\}/P$ p^∞-независима в G/P, и если P/Q — группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Если положим $G_0 = \{H, P\} = \{A, Q, P\} = A \dotplus P$, то имеем прежде всего

$$G/G_0 \cong (G/H)/(G_0/H)\,, \tag{30}$$

и, кроме того, можем писать

$$G_0/H = \{H, P\}/H \cong P/(P \cap H) = P/Q\,. \tag{31}$$

Из (31) следует, что G_0/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов. Отсюда и из (30), воспользовавшись леммой 16, получаем, что G/G_0 является периодической Π-примарной группой, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы. Теперь достаточно применить к группе G и её подгруппе $G_0 = A \dotplus P$ лемму 15.

Лемма 17. *Пусть P — редуцированная периодическая p-примарная группа и пусть Q — такая подгруппа в P, что $pQ = (0)$. Тогда группа P/Q опять редуцированна.*

Доказательство. Предположим, что P/Q не является редуцированной. Тогда можно вибрать элементы $y_i \in P$ $(i = 1, 2, \ldots)$ так, что элементы $\tilde{y}_i = y_i + Q \in P/Q$ удовлетворяют соотношениям:

1) $0(\tilde{y}_i) = p^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; [3])

2) $p\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

[3]) Символом $0(g)$ обозначаем порядок элемента g.

Из 2) получаем $py_{i+1} = y_i + q_i$, где $q_i \in Q$ $(i = 1,2,\ldots)$. Так как $0(\tilde{y}_1) = p$, то имеем $0(y_1 + q_1) = p^k \geqq p$; итак, $k \geqq 1$. Если положим

$$z_i = p^{k-1}(y_i + q_i) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то имеем прежде всего

$$0(z_1) = 0(p^{k-1}(y_1 + q_1)) = p ;$$

кроме того, для каждого i будет

$$pz_{i+1} = p[p^{k-1}(y_{i+1} + q_{i+1})] = p^{k-1}[p(y_{i+1} + q_{i+1})] = p^{k-1}(y_i + q_i) = z_i .$$

Это значит, что

$$U = \{z_i (i = 1, 2, \ldots)\} \cong \mathscr{C}(p^\infty),$$

или, U — ненулевая полная подгруппа в P. Таким образом мы получили противоречие с предположением, значит, группа P/Q должна быть редуцированной.

Лемма 18. *Пусть P — периодическая редуцированная p-примарная группа и пусть Q — подгруппа в P с ограниченными в совокупности порядками элементов. Тогда будет группа P/Q также редуцированной.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $p^kQ = (0)$. Лемму докажем индукцией по k.

Для $k = 1$ воспользуемся леммой 17.

Пусть $k > 1$ и пусть лемма справедлива для показателей, меньших чем k. По теореме об изоморфизме имеем

$$P/Q \cong (P/pQ)/(Q/pQ) . \tag{32}$$

Так как $p^{k-1}(pQ) = (0)$, то по индуктивному предположению группа P/pQ редуцированна. Но так как $p(Q/pQ) = (0)$, то по лемме 17 будет группа, стоящая в правой части соотношения (32), редуцированной. Этим лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть P — редуцированная периодическая группа и пусть Q — — подгруппа в P с ограниченными в совокупности порядками элементов. Тогда группа P/Q также редуцированна.*

Доказательство. Если символ $P^{(p)}$ (соотв. $Q^{(p)}$) означает p-примарное слагаемое группы P (соотв. Q), то для каждого p будет $Q^{(p)} \subseteq P^{(p)}$ и имеет место изоморфизм

$$P/Q \cong \sum(P^{(p)}/Q^{(p)}) . \tag{33}$$

Очевидно, к каждой паре групп $P^{(p)}$, $Q^{(p)}$ можно применить лемму 18; итак, каждая группа $P^{(p)}/Q^{(p)}$ редуцированна. Отсюда и из (33) уже следует редуцированность группы P/Q, и лемма доказана.

Теперь уже легко докажем следующую теорему.

Теорема 14. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus Q$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения и Q — периодическая группа, и пусть G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной редуцированной группы, и если P/Q — группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что группа G/H редуцированна. Далее имеем

$$(34) \qquad (G/P)/(\{H, P\}/P) \cong G/\{H, P\} \cong (G/H)/(\{H, P\}/H)$$

и кроме того

$$\{H, P\}/H \cong P/(H \cap P) = P/Q\ ;$$

итак, $\{H, P\}/H$ является группой с ограниченными в совокупности порядками элементов. Отсюда в силу леммы 19 следует, что группа, стоящая в правой части соотношения (34), будет редуцированной. Но тогда будет редуцированной и группа

$$(G/P)/(\{H, P\}/P)$$

(смотри (34)). Теперь достаточно применить лемму 10 (к группе G/P и её подгруппе $\{H, P\}/P$) и теорему 13.

Теорема полностью доказана.

Противоположной теоремой служит следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть G — расщепляемая группа вида $G = A \dotplus P$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения и P — периодическая группа. Пусть в G имеется подгруппа H с периодической частью Q такая, что G/H является редуцированной периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если P/Q — группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то $H = A_0 \dotplus Q$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Положим $G_1 = \{H, P\}$; так как $G = A \dotplus P$, то будет $G_1 = A_1 \dotplus P$, где $A_1 = A \cap G_1$. По первой теореме об изоморфизме будет

$$(35) \qquad A/A_1 = A/(A \cap G_1) \cong \{A, G_1\}/G_1 = G/G_1\ .$$

Далее, по второй теореме об изоморфизме имеем

$$(36) \qquad G/G_1 \cong (G/H)/(G_1/H)\ .$$

Кроме того имеет место соотношение

$$(37) \qquad G_1/H = \{H, P\}/H \cong P/(P \cap H) = P/Q\,,$$

или, группа G_1/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов. Отсюда и из (36) в силу леммы 19 следует, что G/G_1 является редуцированной периодической Π-примарной группой, и такой же будет по (35) группа A/A_1. Итак, к группе A и её подгруппе A_1 можно применить теорему 12 и получим изоморфизм $A_1 \cong A$. Так как G_1/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов (смотри (37)), то из теорем A, B из [3] следует, что $H = A_0 \dotplus Q$, где $A_0 \cong A_1 \cong A$.

Теорема доказана.

Для того, чтобы выяснить справедливость некоторых условий в предшествующих теоремах, построим ещё три следующих примера.

Пример 1. Пусть $p_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ – последовательность всех положительных простых чисел, пусть $x_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ – элементы некоторой группы такие, что $0(x_i) = p_i\ (i = 1, 2, \ldots)$, и пусть G^* – полная прямая сумма циклических групп $\{x_i\} : G^* = \sum_{i=1}^{\infty}{}^* \{x_i\}$. Периодической частью группы G^* является группа $P = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$. Если положим

$$y_0 = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle \in G^*$$

и если выберем элементы $y_i \in G^*$ так, чтобы $p_i y_i = y_0 - x_i\ (i = 1, 2, \ldots)$, то подгруппа G группы G^* определенная формулой

$$G = \{P, y_i\ (i = 0, 1, 2, \ldots)\}$$

является смешанной группой с периодической частью P; притом группа G нерасщепляема (см. [1], § 50, пример 1).

Определим подгруппу H в G,

$$H = \{y_0, P\} = \{y_0\} \dotplus P\,,$$

и положим $\tilde{G} = G/H$. Если обозначим $\tilde{y}_i = y_i + H\ (i = 1, 2, \ldots)$, то $\tilde{G} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots\}$. Так как $p_i y_i \in H$ и одновременно $y_i \notin H\ (i = 1, 2, \ldots)$ (уравнение $p_i x = y_0 - x_i$ не обладает в H решением), то $0(\tilde{y}_i) = p_i\ (i = 1, 2, \ldots)$, значит,

$$\tilde{G} = \sum_{i=1}^{\infty} \{\tilde{y}_i\}\,.$$

Итак, имеем: Смешанная группа G с периодической частью P содержит расщепляемую подгруппу H вида $H = \{y_0\} \dotplus P$, где $\{y_0\} \cong \mathscr{C}(\infty)$. Группа G/H является счётной редуцированной периодической Π-примарной групной, где Π — бесконечное множество простых чисел. Группа G не расщепляема.

Пример 2. Пусть p — простое число и пусть $G^* = \sum_{i=1}^{\infty}{}^* \{x_i\}$, где $0(x_i) = p^{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; итак, периодическая группа $P = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ содержится в G^*. Если обозначим

$$y_i = \langle 0, \ldots, 0, x_i, px_{i+1}, p^2 x_{i+2}, \ldots \rangle \in G^* \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и если положим

$$G = \{P, y_i \ (i = 1, 2, \ldots)\},$$

то G является смешанной группой с периодической частью P; притом группа G нерасщепляема (см. [1], § 50, пример 2).

Если положим $H = \{y_1, P\} = \{y_1\} \dotplus P$ и $\tilde{G} = G/H$, то $\tilde{G} = \{\tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \ldots\}$, где $\tilde{y}_i = y_i + H$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Из определения элементов y_i следует, что $py_{i+1} = y_i - x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Итак, $py_2 \in H$, но $y_2 \notin H$, так как уравнение $px = y_1 - x_1$ не разрешимо в H; это значит, что $0(\tilde{y}_2) = p$. Далее, имеем $p\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$, следовательно,

$$G/H = \tilde{G} = \{\tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \ldots\} \cong \mathscr{C}(p^\infty).$$

Итак, смешанная группа G с периодической частью P содержит расщепляемую подгруппу H вида $H = \{y_1\} \dotplus P$, где $\{y_1\} \cong \mathscr{C}(\infty)$; притом G/H является счётной периодической p-примарной группой. Хотя группа G нерасщепляема.

Пример 3. Пусть G — группа из примера 2; значит, $G = \{P, y_i \ (i = 1, 2, \ldots)\}$. Так как $py_{i+1} = y_i - x_i$, или, $x_i = y_i - py_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то $P = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \subseteq \{y_1, y_2, \ldots\}$; следовательно,

$$G = \{y_1, y_2, \ldots\}.$$

Далее, имеем

$$\{y_1, P\} = \{y_1\} \dotplus P = \{y_1\} \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i\}. \tag{38}$$

Теперь положим $H = \{y_1\}$ и построим фактор-группу $\tilde{G} = G/H$. Если $\tilde{y}_i = y_i + H$ $(i = 2, 3, \ldots)$, то имеем

$$\tilde{G} = \{\tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \ldots\}. \tag{39}$$

Нашей целью будет теперь доказать, что имеет место соотношение

$$\tilde{G} = \sum_{i=2}^{\infty} \{\tilde{y}_i\}. \tag{40}$$

Полной индукцией по k докажем, что

(41) $$p^{k-1}y_k = y_1 - x_1 - px_2 - \ldots - p^{k-2}x_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Для $k = 2$ соотношение (41), очевидно, справедливо. Если (41) выполнено для некоторого $k \geqq 2$, то имеем

$$p^{k-1}(py_{k+1}) = p^{k-1}(y_k - x_k) = (y_1 - x_1 - \ldots - p^{k-2}x_{k-1}) - p^{k-1}x_k.$$

Итак, соотношение (41) справедливо для каждого $k \geqq 2$.

Так как $0(x_i) = p^{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то из (41) следует, что для $k \geqq 2$

$$p^{2(k-1)}y_k = p^{k-1}y_1 - p^{2k-3}x_{k-1}, \quad p^{2k-3}x_{k-1} \neq \boldsymbol{0},$$

или, в силу (38), $p^{2(k-1)}y_k \notin \{y_1\} = H$. Но в то же время имеем $p^{2k-1}y_k = p^k y_1 \in \{y_1\} = H$, значит

(42) $$0(\tilde{y}_k) = p^{2k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Пусть $k \geqq 2$ и пусть $n_2, \ldots, n_k$ — такие целые рациональные числа, что имеет место равенство

(43) $$n_2\tilde{y}_2 + n_3\tilde{y}_3 + \ldots + n_k\tilde{y}_k = \boldsymbol{0}.$$

Это значит, что

$$n_2y_2 + n_3y_3 + \ldots + n_ky_k \in H = \{y_1\},$$

или же существует целое рациональное число n_1 такое, что

(44) $$n_1y_1 + n_2y_2 + \ldots + n_ky_k = \boldsymbol{0}.$$

Теперь напомним, что группа G, по существу, ничто другое, как группа

(45) $$G' = \sum_{i=1}^{\infty}\{y_i\} \dotplus \sum_{i=1}^{\infty}\{x_i\}, \quad 0(x_i) = p^{2i} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

в которой ещё выполнены соотношения

$$py_{i+1} - y_i + x_i = \boldsymbol{0} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда и из (44) следует существование целых рациональных чисел $u_1, \ldots, u_{k-1}$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{k} n_jy_j = \sum_{i=1}^{k-1} u_i(py_{i+1} - y_i + x_i);$$

притом последнее равенство надобно считать равенством в группе G'. Отсюда по (45) следует, что $u_{k-1}x_{k-1} = \boldsymbol{0}$ и $n_k = pu_{k-1}$. Это значит, что $p^{2k-2} \mid u_{k-1}$, или, $p^{2k-1} \mid n_k$.

Таким образом мы доказали следующее утверждение: Если имеет место соотношение (43), то $p^{2k-1} \mid n_k$, или, $n_k\tilde{y}_k = 0$. Индукцией по k можно доказать, что равенство (43) имеет место в точности тогда, когда $p^{2j-1} \mid n_j$, или, в силу (42), когда $n_j\tilde{y}_j = 0$ $(j = 2, \ldots, k)$. Но отсюда и из (39) уже следует формула (40).

Итак, смешанная группа G с периодической частью P содержит расщепляемую подгруппу H вида $H = \{y_1\} \cong \mathscr{C}(\infty)$ такую, что G/H является счётной редуцированной периодической p-примарной группой. Притом группа G нерасщепляема.

Замечание. Казалось бы на первый взгляд, что условия теоремы 14 (соотв. теоремы 13) слишком сильные. Но пример 1 показывает, что условие конечности множества Π нельзя выпустит. Далее, из примера 3 следует, что в формулировке теоремы 14 не можем выпустить условие ограниченности порядков элементов группы P/Q. Наконец, из примера 2 видно, что из теоремы 14 нельзя выпустить ни условие редуцированности, если его не заменить другим условием, как, например, в теореме 13.

Литература

[1] *L. Fuchs*: Abelian groups, Budapest 1958.

[2] *L. Fuchs*: Notes on abelian groups, II, Acta Math. *XI*, 1—2, 117—125.

[3] *L. G. Kovács*: On a paper of Ladislav Procházka, Czech. Math. J. *13* (*88*), 1963, 612—618.

[4] *G. Szekeres*: Countable abelian groups without torsion, Duke Math. J. *15* (1948), 293—306.

[5] *L. Procházka*: Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges, Czech. Math. J. *13* (*88*), 1963, 1—23.

[6] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чех. мат. ж. *12* (*87*), 1962, 3—43.

[7] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чех. мат. ж. *10* (*85*), 1960, 479—492.

Zusammenfassung

ÜBER HOMOGENEN TORSIONSFREIEN ABELSCHEN GRUPPEN

Ladislav Procházka, Praha

In dieser Abhandlung wird vor allem die Struktur gewisser Erweiterungen homogener torsionsfreien abelschen Gruppen studiert; ausserdem werden einige so erhaltene Resultate auf gemischte Gruppen angewandt.

Es sei G eine torsionsfreie Gruppe. Die Gruppe G heisst homogen, wenn alle ihre Servanzuntergruppen vom Range 1 denselben Typ besitzen. Die Gruppe G ist total zerlegbar genannt, falls sie als direkte Summe von Untergruppen vom Range 1 dargestellt werden kann. Sind $m, k_1, k_2, \ldots, k_n$ ganze rationale Zahlen und sind $g_1, g_2, \ldots, g_n$ Elemente einer torsionsfreien Gruppe G, so schreiben wir die Formel (1), wenn die Gleichung $mx = k_1 g_1 + k_2 g_2 + \ldots + k_n g_n$ in G lösbar ist. Weiter, sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ganze p-adische Zahlen, die als p-adisch konvergente Folgen $\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganzer rationalen Zahlen ausgedrückt sind, so schreiben wir die Formel (2), wenn alle Relationen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} g_i \equiv 0 \pmod{p^k}_G \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

gleichzeitig erfüllt sind. Die Elemente $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ heissen p^∞-unabhängig in G, wenn es keine Relation der Form (2) gibt, in der mindestens eine ganze p-adische Zahl $\mathfrak{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ von Null verschieden ist. Es ist klar, dass man den Begriff der p^∞-Unabhängigkeit auf beliebige Menge M von G übertragen kann.

Definition 4. Es seien eine torsionsfreie Gruppe G und gewisse ihre Untergruppen J_ι $(\iota \in I)$ vom Range 1 gegeben. Die Untergruppen J_ι $(\iota \in I)$ werden p^∞-unabhängig in G genannt, wenn man die Elemente $g_\iota \in J_\iota$ $(\iota \in I)$ so auswählen kann, dass sie eine in G p^∞-unabhängige Menge bilden.

Definition 5. Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und H eine ihre total zerlegbare Untergruppe. Die Untergruppe H wird p^∞-unabhängig in G genannt, falls es eine totale Zerlegung $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ gibt, so dass die Untergruppen J_ι $(\iota \in I)$ p^∞-unabhängig in G sind.

Jetzt können wir schon die wichtigsten Resultate formulieren.

Sätze 9, 10. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und H eine solche ihre homogene total zerlegbare Untergruppe, dass G/H eine periodische Π-primäre Gruppe ist, wo Π eine endliche Primzahlmenge bildet.*

a) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer abzählbaren Gruppe dar und ist für jede $p \in \Pi$ die Untergruppe H p^∞-unabhängig in G, so ist $G \cong H$.*

b) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer reduzierten abzählbaren Gruppe dar, so ist $G \cong H$.*

Für gemischte Gruppen werden hier die folgenden Sätze bewiesen.

Sätze 13, 14. *Es sei G eine gemischte Gruppe mit der maximalen periodischen Untergruppe P und sei H eine spaltbare Untergruppe in G der Form $H = A \dotplus Q$, wo A eine homogene total zerlegbare torsionsfreie und Q eine periodische Gruppe ist. Es sei weiter G/H eine periodische Π-primäre Gruppe mit endlicher Primzahlmenge Π und P/Q sei ordnungsbeschränkt.*

a) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer abzählbaren Gruppe dar und ist für jede $p \in \Pi$ die Untergruppe $\{H, P\}/P$ p^∞-unabhängig in G/P, so ist $G = A_0 \dotplus P$, und $A_0 \cong A$.*

b) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer reduzierten abzählbaren Gruppe dar, so ist $G = A_0 \dotplus P$, und $A_0 \cong A$.*

In der Arbeit werden noch einige Behauptungen über Untergruppen total zerlegbarer und spaltbarer Gruppen bewiesen.

Satz 12. *Es sei G eine homogene total zerlegbare torsionsfreie Gruppe und H eine solche ihre Untergruppe, dass G/H periodisch und Π-primär ist, wo Π eine endliche Primzahlmenge bildet. Wenn G/H noch reduziert ist, so haben wir $H \cong G$.*

Satz 15. *Es sei G eine gemischte Gruppe der Form $G = A \dotplus P$, wo A eine homogene total zerlegbare torsionsfreie und P eine periodische Gruppe ist, und H sei eine Untergruppe in G mit der maximalen periodischen Untergruppe Q. Ist G/H eine reduzierte periodische Π-primäre Gruppe, für die Π eine endliche Primzahlmenge bildet, und ist P/Q ordnungsbeschränkt, so haben wir $H = A_0 \dotplus Q$ und $A_0 \cong A$.*

Die Notwendigkeit der formulierten Bedingungen wird durch drei Beispiele demonstriert.