Milan Sekanina

К факторизации множества целых неотрицательных чисел

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 161–170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100611

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *14* (*89*) ПРАГА 20. VI. 1964 г., No 2

К ФАКТОРИЗАЦИИ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 13/XII 1960 г.)

В работе дается рекуррентное построение всех разложений в смысле Хайоша множества неотрицательных целых чисел.

1

Настоящая работа является продолжением второй части работы [1]. Как и в [1], $\mathfrak{A}$ означает множество всех целых неотрицательных чисел.

1.1. Пусть I — непустое множество. Пусть f — отображение I в $\mathfrak{A}$. Мы скажем, что f является суммируемым отображением, если только для конечного количества $i \in I$ имеет место $f(i) \neq 0$. Если таковыми являются индексы $i_1, \ldots, i_n$, положим $\sum_{i \in I} f(i) = f(i_1) + \ldots + f(i_n)$. Если для всех $i \in I$ отображение $f(i) = 0$, то положим $\sum_{i \in I} f(i) = 0$.

1.2. Пусть I — опять-таки непустое множество, а $\{A_i\}_{i \in I}$ — система подмножеств из $\mathfrak{A}$ (мы допускаем существование $i \neq j$ таких, что $A_i = A_j$). Пусть F — множество всех суммируемых отображений, определенных на I и таких, что $f(i) \in A_i$ для всех $i \in I$. Тогда множество $\{\sum_{i \in I} f(i) : f \in F\}$ обозначим через $\sum_{i \in I} A_i$. Если $A = \sum_{i \in I} A_i$ и если для всякого $x \in A$ существует только одно $f \in F$ так, что $x = \sum_{i \in I} f(i)$, то мы напишем $A = \overset{\bullet}{\sum_{i \in I}} A_i$. В таком случае мы называем систему $\{A_i\}_{i \in I}$ *факторизацией множества* A, A_i — факторами множества A.

1.3. Из определения $\sum_{i \in I} A_i$ непосредственно следуют следующие утверждения:

1. Если существует $i \in I$ так, что $A_i = \emptyset$, то $\sum_{i \in I} A_i = \emptyset$.

2. Если $\operatorname{card} I \geqq \aleph_0$ и $0 \operatorname{non} \in A_i$ для бесконечного количества индексов i, то $\sum_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Читатель легко убедится в том, что во всех остальных случаях $\sum\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

1.4. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — факторизация множества A. Пусть g — взаимно однозначное отображение множества I на себя. Тогда и $\{A_{g(i)}\}_{i\in I}$ будет факторизацией A.*

Доказательство непосредственно следует из 1.2.

1.5. 1) *Пусть $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I}} A_i$. Пусть $A_i = \overset{\bullet}{\sum\limits_{j\in J_i}} B_j^i$. Пусть $J = \{\langle i, j\rangle : i \in I,\ j \in J_i\}$. Тогда $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{<i,j>\in J}} B_j^i$.*

2) *Пусть $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I}} A_i$, $A \neq \emptyset$. Пусть $\emptyset \neq I_1 \subset I$. Тогда $\sum\limits_{i\in I_1} A_i = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I_1}} A_i$.*

Доказательство непосредственно следует из 1.2.

1.6. Пусть $A \subset \mathfrak{A}$. Пусть существует $k \in \mathfrak{A}$, $k \neq 0$ такое, что $A + k \subset A$ ($A + k = \{x : x = a + k,\ a \in A\}$); тогда мы говорим, что A *почти периодическое* множество.

1.7. *Пусть $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I}} A_i$ и пусть существует $i_1 \in I$ такое, что A_{i_1} — почти периодическое множество. Тогда A почти периодическое множество.*

Доказательство. Пусть для $k \neq 0$ имеет место $A_{i_1} + k \subset A_{i_1}$. Пусть $x \in A$. Тогда существуют элементы $x_i \in A_i$ такие, что $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$. Определим функцию f на I следующим образом: $f(i) = x_i$ для $i \neq i_1$, $f(i_1) = x_1 + k$. Так как $x_1 + k \in A_{i_1}$ и f — суммируемое отображение, то $x + k = \sum\limits_{i=I} f(i) \in A$, следовательно, $A + k \subset A$, а это значит, что A — почти периодическое множество.

1.8. Пусть $\emptyset \neq A \neq \{0\}$, $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I}} A_i$, $A_j = \{0\}$ для некоторого $j \in I$. Тогда, очевидно, $A = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i\in I, i\neq j}} A_i$. Все факторы, равные множеству $\{0\}$, можно, следовательно, опустить. В последующем изложении, если не будет особой оговорки, мы будем предполагать, что в факторизациях непустых множеств, отличных от $\{0\}$, не встречаются факторы, равные $\{0\}$. Под факторизацией множества $\{0\}$ мы будем в дальнейшем для простоты понимать систему $\{\{0\}\}$.

1.9. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — факторизация множества $A \neq \emptyset$. Тогда I — конечное или счетное множество.*

Доказательство. Для $A = \{0\}$ теорема будет, согласно 1.8, очевидно справедлива. Итак, пусть $A \neq \{0\}$. Пусть $I_1 \subset I$ — множество тех индексов i, для которых $0 \in A_i$. Допустим, что I — бесконечное несчетное множество. Тогда согласно 1.3 множество $I - I_1$ конечно и, значит, I_1 — несчетное множество. В каждом A_i, $i \in I$ возьмем $x_i \neq 0$ и определим

$$f_i(i) = x_i,\ f_i(j) = 0 \quad \text{для} \quad j \neq i,\ j \in I_1,\ f_i(j) = x_j \quad \text{для} \quad j \in I - I_1\,.$$

Отображение f_i всегда суммируемо и $i, j \in I_1$, $i \neq j \Rightarrow f_i \neq f_j$. Следовательно, множество всех f_i несчетно. Так как A — счетное множество, существуют $x \in A$ и два различные отображения f_k и f_j, для которых $\sum_{i\in I} f_k(i) = \sum_{i\in I} f_j(i) = x$, что противоречит определению факторизации.

1.10. *Пусть* $A = \mathop{\overset{\bullet}{\sum}}_{i\in I} A_i$, $A \neq \emptyset$, $k, j \in I$, $k \neq j$. *Тогда* $A_k \cap A_j$ *содержит не более одного элемента.*

Доказательство. Допустим, что существуют $x \neq y$, $x, y \in A_k \cap A_j$. Пусть I_1 — множество тех индексов i, которые отличны от j и k и для которых $0 \in A_i$. Определим f_j и f_k так: $i \in I_1 \Rightarrow f_j(i) = f_k(i) = 0$, $i \in I - I_1 - \{j, k\} \Rightarrow f_j(i) = f_k(i) \in A_i$, $f_j(j) = x$, $f_j(k) = y$, $f_k(j) = y$, $f_k(k) = x$. Очевидно, $\sum_{i\in I} f_k(i) = \sum_{i\in I} f_j(i) \in A$ и притом $f_k \neq f_j$, что является противоречием.

Следствие. Если $A = \mathop{\overset{\bullet}{\sum}}_{i\in I} A_i$, причем $0 \in A_i$ для всех i, то $k \neq j \Rightarrow A_k \cap A_j = \{0\}$.

1.11. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение: *Пусть* $A = \mathop{\overset{\bullet}{\sum}}_{i\in I} A_i$, $0 \in A_i$ *для всех* i. *Тогда самое больше для одного* i *множество* A_i *будет почти периодическим.*

Доказательство. Пусть $i \neq j$, $A_i + k_i \subset A_i$, $A_j + k_j \subset A_j$, $k_i \neq 0 \neq k_j$. Тогда $k_i \in A_i$, следовательно, и $k_i + k_i = 2k_i \in A_i$; вообще для натурального n будет $nk_i \in A_i$, аналогично $mk_j \in A_j$. Итак, $k_i \,.\, k_j \in A_i \cap A_j$, что противоречит следствию 1.10.

1.12. Пусть $A = \mathop{\overset{\bullet}{\sum}}_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Согласно 1.9 множество I конечно или счетно. Мы будем большей частью предполагать, что $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ или $I = \{1, 2, 3, \ldots, \ldots, n, \ldots\}$. Тогда можно также написать

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus A_3 \dotplus \ldots \dotplus A_n \quad \text{или} \quad A = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n \dotplus \ldots\,.$$

Настоящий параграф мы закончим следующей теоремой о сокращении:

Пусть $A \neq \emptyset$. *Пусть* $A \dotplus B = A \dotplus C$ (*притом множества* A, B, C *могут быть равны* $\{0\}$). *Тогда* $B = C$.

Доказательство. Из 1.3 видно, что или $B = \emptyset = C$ или $B \neq \emptyset \neq C$. Если $B = \emptyset = C$, теорема доказана. Пусть имеет место второй случай. Допустим, что $B \neq C$. Тогда пусть $a = \min A$, $d = \min(B \cup C - B \cap C)$. Пусть, напр., $d \in B$. Тогда для подходящих $a_1 \in A$ и $c \in C$ будет $a + d = a_1 + c$. Так как $d \operatorname{non} \in C$, будет $d \neq c$, откуда $a < a_1$ и, следовательно, $d > c$. По определению d имеем $c \in B$, что по определению факторизации дает $d = c$, то есть противоречие. Аналогично мы рассуждаем и в случае $d \in C$.

2

2.1. Пусть k, m — натуральные числа, $m > 1$. Тогда положим

$$F(k, m) = \{0, k, \ldots, (m - 1)\, k\}\,, \quad F(k, \infty) = \{0, k, \ldots, nk, \ldots\}\,.$$

2.2. *Пусть k, m, p — натуральные числа, $m, p > 1$. Тогда $F(k, m) \dotplus F(mk, p) = F(k, mp)$.*

Доказательство. Пусть $x \in F(k, m) + F(mk, p)$. Тогда существуют целые числа x_1, x_2 такие, что $0 \leqq x_1 < m$, $0 \leqq x_2 < p$ и $x = x_1 k + x_2 mk$. Числа x_1 и x_2 однозначно определяются числом x (а именно, это остаток и частное при делении числа x/k на число m). Итак,

$$F(k, m) + F(km, p) = F(k, m) \dotplus F(km, p)$$

и $x = (x_1 + x_2 m)\, k$, где $0 \leqq x_1 + x_2 m < mp$, т. е. $x \in F(k, mp)$. Если, наоборот, $x \in F(k, mp)$, т. е. $x = x_3 k$, $0 \leqq x_3 < mp$, то существуют целые числа x_1 и x_2 такие, что $x_3 = x_1 + x_2 m$, $0 \leqq x_1 < m$, $0 \leqq x_2 < p$, т.е. $x \in F(k, m) \dotplus F(mk, p)$.

2.3. Пусть $k_1, k_2, k_3, \ldots (= \{k_n\}_n)$ — возрастающая последовательность (конечная или бесконечная) натуральных чисел, для которой $k_n \setminus k_{n+1}$ для всех n. В таком случае мы называем последовательность $\{k_n\}_n$ *f-последовательностью.*

2.4. В работе [1] было показано, что $A \in \mathfrak{A}$ является фактором $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, если существует f-последовательность $\{k_n\}_n$, бесконечная или конечная, такая, что или

а) $A = F(k_1, k_2/k_1) \dotplus F(k_3, k_4/k_3) \dotplus \ldots$ (с весконечным числом факторов) или

б) $A = F(k_1, k_2/k_1) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2m-1}, k_{2m}/k_{2m-1})$ ($\{k_n\}_n$ имеет четное число элементов) или

в) $A = F(k_1, k_2/k_1) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2m-1}, \infty)$ (последовательность $\{k_n\}_n$ имеет нечетное число элементов).

(В работе [1] мы допускали в качестве фактора и $\{0\}$.)

2.5. *Пусть A — фактор $\mathfrak{A}$. Тогда A — почти периодическое множество, если и только если A имеет вид* в) *из* 2.4.

Доказательство. Если A имеет вид в), то $F(k_{2m-1}, \infty)$ является почти периодическим множеством и согласно 1.7 A будет почти периодическим множеством.

Множество вида б) непусто и конечно и поэтому не является почти периодическим. Если A имеет вид а), а n — любое натуральное число, то правым соседом элемента $a = (k_2/k_1 - 1)\, k_1 + \ldots + (k_{2n}/k_{2n-1} - 1)\, k_{2n-1} (a \in A!)$ в множестве A будет k_{2n+1}. Притом $k_{2n+1} - a = (k_{2n+1} - k_{2n}) + \ldots + (k_3 - k_2) + k_1 \geqq \geqq n + 1$. Итак, для $0 < k < n + 1$ будет $a + k$ non $\in A$. Так как n было взято произвольно, следует отсюда, что A не является почти периодическим множеством.

2.6. *Пусть k, p — натуральные числа, $p > 1$. Пусть $A \subset \mathfrak{A}$, $0 \in A$. Если $A \neq \{0\}$, пусть $\min(A - \{0\}) > kp$ и $x \in A \Rightarrow k \mid x$. Пусть $\{h_i\}_i$, $\{m_i\}_i$ — конечные или бесконечные последовательности, $\{h_i\}_i$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, пусть m_i — натуральные числа больше* 1 *за исключением, может быть, одного i, для которого m_i может означать символ ∞.*

Пусть

$$F(k, p) \dotplus A = F(h_1, m_1) \dotplus F(h_2, m_2) \dotplus \ldots \,. \tag{1}$$

Тогда существует n так, что

$$F(k, p) = F(h_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(h_n, m_n)\,, \quad m_1, \ldots, m_n$$

натуральные числа и $h_2 = m_1 k$, $h_3 = m_2 m_1 k, \ldots, p = m_n \cdot \ldots \cdot m_1$.

Доказательство. Обозначим левую часть уравнения (1) через B, правую — через C. Прежде всего покажем, что $\{h_i\}_i$ — возрастающая последовательность. Действительно, если бы $h_i = h_{i+1}$ для некоторого i, то было бы $\{0, h_i\} \subset \subset F(h_i, m_i) \cap F(h_{i+1}, m_{i+1})$, что противоречит следствию 1.10. Имеем $k = = \min[B - \{0\}] = \min[C - \{0\}] = h_1$. Покажем, что $m_1 \neq \infty$.

Если бы $m_1 = \infty$, то $pk \in B$, то есть $pk = x + y$, где $x \in F(k, p)$, $y \in A$. Так как pk non $\in F(k, p)$, будет $y \neq 0$, то есть $y > kp$, и следовательно, $pk > x + kp$, что противоречит допущению.

Так как pk non $\in B$, $0, k, \ldots, (p - 1)\, k \in B$ и $0, k, \ldots, (m_1 - 1)\, k \in C$, т.е. эти числа лежат также в B, то $m_1 \leqq p$. Если имеет место равенство, теорема доказана. Пусть $m_1 < p$. Тогда $m_1 k \in B$, то есть $m_1 k \in C$. Итак, существуют числа x, y такие, что $0 \leqq x < m_1$, $y \in F(h_2, m_2) \dotplus F(h_3, m_3) \dotplus \ldots$, $m_1 k = xk + y$. Допустим, что $x > 0$. Имеем $(m_1 - x)\, k = y$, причем $(m_1 - x)\, k \in F(h_1, m_1)$, что противоречит следствию 1.10. Итак, $x = 0$, откуда $m_1 k = y$. Допустим, что $y \neq h_2$. Так как $h_2 = \min(F(h_2, m_2) \dotplus F(h_3, m_3) \dotplus \ldots - \{0\})$, будет $y > h_2$, откуда $m_1 k > h_2$. Так как $k \mid h_2$ $(h_2 \in B!)$, существует x так, что $h_2 = xk$ и

$0 \leqq x < m_1$. Поэтому $h_2 \in F(h_1, m_1)$, что также противоречит следствию 1.10. Итак, $h_2 = m_1 k = y$. Покажем, что m_2 – натуральное число. Если бы $m_2 = \infty$, то $kp \in B$, так как существуют целые числа x, y такие, что $0 \leqq x < m_1$, $0 \leqq y$, $kp = xk + ym_1 k$ и $xk \in F(h_1, m_1)$, $ymk \in F(h_2, \infty)$. В силу 2.2 можно написать

$$B = F(k, m_1 m_2) \dotplus F(h_3, m_3) \dotplus \dots , \tag{2}$$

где

$$F(k, m_1 m_2) = F(h_1, m_1) \dotplus F(h_2, m_2) . \tag{3}$$

Правая часть уравнения (2) имеет тот же вид, как и C. Поэтому ее можно представить в виде левой части уравнения (1). Так как $m_1, m_1 m_2, \dots$ образуют возрастающую последовательность, существует n так, что $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n = p$ и по индукции получаем из (3)

$$F(k, p) = F(h_1, m_1) \dotplus \dots \dotplus F(h_n, m_n) .$$

Мы показали, что $h_2 = m_1 k$. По индукции получаем $h_3 = m_2 m_1 k$ и т. д.

3

3.1. Пусть $\{k_n\}_n$ и $\{h_n\}_n$ суть f-последовательности, конечные или бесконечные. Если $\{k_n\}_n$ конечна, то она имеет четное число членов. Пусть существует f-последовательность $\{r_n\}_n$ со следующими свойствами (соотношения касаются тех случаев, для которых все символы определены):

1) $k_1 = r_1$, $k_{2n-1} \in \{r_n\}_n$, $h_{2n-1} \in \{r_n\}_n$.

2) $r_j < k_n \Rightarrow r_j \backslash k_n$.

3) $h_{2i-1} = r_j \Rightarrow h_{2i} = r_{j+1}$ или $r_j < k_{2s} < r_{j+1}$ (если r_{j+1} определено) и $h_{2i} = k_{2s}$ для некоторого s. Из $h_{2i-1} < k_{2s}$ всегда следует $h_{2i} \leqq k_{2s}$.

4) Не существует пары индексов i, j так, что $k_{2i} \leqq r_j < k_{2i+1}$. Если $\{k_n\}_n$ – – конечная последовательность, а k_m – ее последний элемент, то для всех n будет $r_n < k_m$.

Тогда последовательность $\{r_n\}_n$ мы назовем дополнением последовательности $\{h_n\}_n$ по отношению к $\{k_n\}_n$. [1])

[1]) Читатель может без труда сам убедиться в том, что дополнение к f-последовательности $\{h_n\}_n$ по отношению к f-последовательности $\{k_n\}_n$ существует, если и только если 1) $k_1 \leqq h_1$, $h_i < k_j \Rightarrow h_i \setminus k_j$, $k_j < h_i \Rightarrow k_j \setminus h_i$.

2) Для всех i, s имеет место $h_{2i-1} \neq k_s$. Далее, $h_{2i-1} < k_n \Rightarrow h_{2i} \leqq k_n$.

3) Не существуют индексы i, j так, что $k_{2i} < h_j < k_{2i+1}$. Если k_m — последний элемент $\{k_n\}_n$, то $h_i < k_m$ для всех i и m — четное число.

3.2. В работе [1] были описаны все факторизации $\mathfrak{A} = A \dotplus B$. Рассмотрим теперь факторизацию $\mathfrak{A}$ в общем виде. Итак, пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqq 3$, соответственно $I = \{1, 2, \ldots\}$, и пусть $\mathfrak{A} = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i \in I}} A_i$. Положив $B_1 = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i \in I, i \neq 1}} A_i$, $B_2 = \overset{\bullet}{\sum\limits_{i \in I, 1 \neq i \neq 2}} A_i$, мы получим $\mathfrak{A} = A_1 \dotplus B_1$, $B_1 = A_2 \dotplus B_2$. Итак, построение всех факторизаций множества $\mathfrak{A}$ сводится к решению последнего уравнения $B_1 = A_2 \dotplus B_2$. Снова напоминаем, что все множества, входящие в эго уравнение, имеют один из видов а), б), в) из 2.4.

3.3. *Пусть B_1 имеет вид* а) *или* б), *т. е.* $B_1 = F(k_1, k_2/k_1) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2n-1}, k_{2n}/k_{2n-1}) \dotplus \ldots$ *с бесконечным или конечным числом факторов. При конечном числе факторов $\{k_n\}_n$ имеет четное число членов. Тогда $A_2 \subset \mathfrak{A}$ будет фактором множества B_1, если и только если оно имеет вид* а) *или* б), *то есть*

$$A_2 = F(h_1, h_2/h_1) \dotplus \ldots \dotplus F(h_{2n-1}, h_{2n}/h_{2n-1}) \dotplus \ldots$$

(в правой части конечное или бесконечное число факторов) *и существует дополнение* (см. 3.1) *последовательности $\{h_n\}_n$ по отношению к последовательности $\{k_n\}_n$.*

Доказательство. Согласно 2.5 B_1 не является почти периодическим множеством, следовательно, согласно 1.7 и A_2 не будет почти периодическим. Поэтому фактор множества B_1 должен быть вида а) или б). Итак, пусть

$$B_1 = A_2 \dotplus B_2,\ B_2 = F(g_1, g_2/g_1) \dotplus \ldots \dotplus F(g_{2n-1}, g_{2n}/g_{2n-1}) \dotplus \ldots,$$
$$A_2 = F(h_1, h_2/h_1) \dotplus \ldots \dotplus F(h_{2n-1}, h_{2n}/h_{2n-1}) \dotplus \ldots .$$

(в правых частях конечное или бесконечное число факторов). Упорядочим ситему $h_1, h_3, \ldots, h_{2n-1}, \ldots, g_1, g_3, \ldots, g_{2n-1}, \ldots$ в виде неубывающей последовательности $\{r_i\}_i$ и положим $m_j = h_{i+1}/h_i$, если $r_j = h_i$, и $m_j = g_{i+1}/g_i$, если $r_j = g_i$. Тогда

$$B_1 = F(r_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(r_n, m_n) \dotplus \ldots .$$

Положим $B' = F(k_3, k_4/k_3) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2n-1}, k_{2n}/k_{2n-1}) \dotplus \ldots$ (в случае, если последовательность $\{k_n\}_n$ содержит лишь два элемента, B' равно $\{0\}$). Тогда имеем

$$F(k_1, k_2/k_1) \dotplus B' = F(r_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(r_n, m_n) \dotplus \ldots .$$

Условия теоремы 2.6 выполняются. Следовательно, существует n_1 так, что

$$F(k_1, k_2/k_1) = F(r_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(r_{n_1}, m_{n_1})$$

и

(4) $$r_1 = k_1,\ r_2 = m_1 k_1, \ldots, k_2 = m_{n_1} . m_{n_1 - 1} . \ldots . m_1 k_1 .$$

Итак, по индукции получаем, что для s, для которого определено k_{2s-1}, а значит и k_{2s}, существует n_s такое, что

$$F(k_{2s-1}, k_{2s}/k_{2s-1}) = F(r_{n_{s-1}+1}, m_{n_{s-1}+1}) \dotplus \dots \dotplus F(r_{n_s}, m_{n_s})$$

и

(5) $r_{n_{s-1}+1} = k_{2s-1}, \quad r_{n_{s-1}+2} = m_{n_{s-1}+1} \cdot k_{2s-1}, \dots, k_{2s} = m_{n_s} \cdot \dots \cdot m_{n_{s-1}+1} \cdot k_{2s-1}$.

Покажем, что последовательность $\{r_n\}_n$ является дополнением последовательности $\{h_n\}_n$ по отношению к $\{k_n\}_n$. Из (5) и из того, что $\{k_n\}_n$ есть f-последовательность, вытекает то же самое для $\{r_n\}_n$.

Соотношение 1) следует непосредственно из определения $\{r_n\}_n$ и из равенств (4) и (5); 2) и 4) следуют из (5). Вторую часть утверждения 4) можно получить так: Пусть $\{k_n\}_n$ – конечная последовательность с последним элементом k_{2s}. Допустим, что существует r_{n_s+1} (n_s выбрано согласно (5)). Тогда

$$F(k_{2s-1}, k_{2s}/k_{2s-1}) \dotplus \{0\} =$$
$$= F(r_{n_{s-1}+1}, m_{n_{s-1}+1}) \dotplus \dots \dotplus F(r_{n_s}, m_{n_s}) \dotplus F(r_{n_s+1}, m_{n_s+1}) \dotplus \dots$$

и согласно 1.12

$$\{0\} = F(r_{n_s+1}, m_{n_s+1}) \dotplus \dots ,$$

что невозможно, так как r_{n_s+1} non $\in \{0\}$. Соотношение 3) следует из (5) и из определения чисел m_i. Таким образом, необходимость условия доказана.

Достаточность. Пусть $\{r_n\}_n$ – дополнение последовательности $\{h_n\}_n$ по отношению к $\{k_n\}_n$. Согласно 1) имеем $k_1 = r_1$. Так как $\{r_n\}_n$ есть f-последовательность и справедливо 2), существуют индекс n_1 и натуральные числа $m_i > 1$ $(1 \leqq i \leqq n_1)$ такие, что

(6) $$r_2 = m_1 k_1, \dots, r_{n_1} = m_{n_1-1} \cdot \dots \cdot m_1 k_1,\ k_2 = m_{n_1} \cdot \dots \cdot k_1 ,$$

причем, если r_{n_1+1} определено, имеет место $r_{n_1+1} > k_2$. Согласно (4) тогда будет $r_{n_1+1} = k_3$.

Итак, вообще для s, для которого определено число k_{2s-1}, существуют n_s и натуральные числа $m_{n_{s-1}+1}, \dots, m_{n_s} > 1$ такие, что справедливо (5), причем, если r_{n_s+1} определено, будет $r_{n_s+1} > k_{2s}$. Из 2.2 и (6) следует по индукции

$$F(k_1, k_2/k_1) = F(r_1, m_1) \dotplus \dots \dotplus F(r_{n_1}, m_{n_1}) .$$

В общем случае тогда будет $F(k_{2s-1}, k_{2s}/k_{2s-1}) = F(r_{n_{s-1}+1}, m_{n_{s-1}+1}) \dotplus \dots \dotplus F(r_{n_s}, m_{n_s})$. Итак, $B_1 = F(r_1, m_1) \dotplus \dots \dotplus F(r_{n_{s-1}+1}, m_{n_{s-1}+1}) \dotplus \dots$. Согласно 3.1 имеем $h_{2i-1} \in \{r_n\}_n$, поэтому $h_{2i-1} = r_j$ для некоторого j. Согласно 3 наступит один из следующих случаев а), б):

а) $r_{j+1} = h_{2i}$. Согласно тому же пункту 3 из $r_j < k_{2s}$ следует $r_{j+1} \leqq k_{2s}$. Поэтому $m_j = r_{j+1}/r_j = h_{2i}/h_{2i-1}$ и, следовательно, $F(r_j, m_j) = F(h_{2i-1}, h_{2i}/h_{2i-1})$.

б) Существует s так, что $h_{2i} = k_{2s}$ и (если r_{j+1} определено) будет $r_j < k_{2s} < r_{j+1}$.

Имеем $r_j \geqq k_{2s-1}$ (согласно второй части утверждения 3)) и, следовательно, используя обозначения формулы (5), n_s является определенным. Имеем $n_s \geqq j$. Допустим, что $n_s > j$. Тогда r_{j+1} определено и $r_{j+1} < k_{2s}$, что противоречит приведенному выше неравенству. Итак, $n_s = j$ и поэтому $h_{2i}/h_{2i-1} = m_{n_s}$, следовательно, снова $F(r_j, m_j) = F(h_{2i-1}, h_{2i}/h_{2i-1})$. Итак, каждое $F(h_{2i-1}, h_{2i}/h_{2i-1})$ равно некоторому и в точности одному (см., напр., следствие 1.10) $F(r_j, m_j)$. На основании 1.4 можно, следовательно, написать

$$B_1 = A_2' \dotplus B_2\,,$$

где в A_2' содержатся все факторы $F(h_{2i-1}, h_{2i}/h_{2i-1})$. Итак, $A_2' = A_2$ и A_2 является фактором множества B_1.

3.4. Пусть B_1 имеет вид в), то есть

$$B_1 = F(k_1, k_2/k_1) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2n-1}, \infty)\,.$$

Пусть $B_1 = A_2 \dotplus B_2$. Тогда и A_2 и B_2 имеют один из видов а), б), в). Итак, пусть $A_2 = F(h_1, h_2/h_1) \dotplus \ldots \dotplus F(h_{2n-1}, h_{2n}/h_{2n-1}) \dotplus \ldots$, $B_2 = F(g_1, g_2/g_1) \dotplus \ldots \dotplus F(g_{2n-1}, g_{2n}/g_{2n-1}) \dotplus \ldots$, где число факторов может быть конечным или бесконечным, а один (см. 1.11) из символов $h_2/h_1, \ldots, h_{2n}/h_{2n-1}, \ldots, g_{2n}/g_{2n-1}, \ldots$ может означать и ∞. Если расположить систему чисел $h_1\, h_3, \ldots, h_{2n-1}, \ldots, \ldots, g_1, \ldots, g_{2n-1}, \ldots$ в виде неубывающей последовательности $\{r_n\}_n$ и если положить $m_i = h_{j+1}/h_j$ для $r_i = h_j$, $m_i = g_{j+1}/g_j$ для $r_i = g_j$, то будет

$$B_1 = F(r_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(r_i, m_i) \dotplus \ldots\,.$$

Условия из 2.6 выполняются и по индукции следует, что существует j такое, что
(7) $F(k_1, k_2/k_1) \dotplus \ldots \dotplus F(k_{2n-3}, k_{2n-2}/k_{2n-3}) = F(r_1, m_1) \dotplus \ldots \dotplus F(r_j, m_j)\,.$
Из 1.12 тогда получаем соотношение

$$F(k_{2n-1}, \infty) = F(r_{j+1}, m_{j+1}) \dotplus \ldots \dotplus F(r_i, m_i) \dotplus \ldots\,.$$

Вопрос факторизации B_1 таким образом сводится к факторизации левой части уравнения (7), однако, это фактор множества $\mathfrak{A}$ типа б), о котором была речь в теореме 3.3, и к факторизации $F(k_{2n-1}, \infty)$, то есть множества, изоморфного (относительно сложения) множеству $\mathfrak{A}$, факторы которого описаны в 2.4.

Литература

[1] *Секанина М.:* Замечания к факторизации бесконечной циклической группы. Чех. мат. жур., *9 (84)*, 1959, 485—495.

Summary

ON THE FACTORISATION OF THE SET OF ALL NONNEGATIVE INTEGERS

MILAN SEKANINA, Brno

$\mathfrak{A}$ denotes the set of all nonnegative integers. In the paper [1] all factorisations of $\mathfrak{A}$ in Hajós' sense were constructed, i.e. all pairs A, B of subsets of $\mathfrak{A}$ were given such that every $x \in \mathfrak{A}$ can be written in exactly one way as a sum $a + b$ where $a \in A$, $b \in B$. In present paper a recursive construction of all Hajós' factorisations is given, in which the number of factors is arbitrary.