Jindřich Nečas

Sur les équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique du deuxième ordre

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 125–146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100606

Чехословацкий математический журнал т. 14 (89) 1964, Прага

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE DU DEUXIÈME ORDRE

JINDŘICH NEČAS, Praha — Nancy

(Reçu le 1er juin 1962)

On étudie les problèmes de Dirichlet, de Neumann et de Newton à l'aide de l'égalité de Rellich et obtient de différents théorèmes sur la régularité de la solution. Par le procédé dual, on résout les problèmes en question généralisés sans supposer l'intégrale de Dirichlet finie. Les frontières des domaines considérés sont supposées seulement lipschitziennes.

INTRODUCTION

Le présent travail est fondé sur l'égalité de Rellich, déduite par L. HÖRMANDER dans [5] et, dans un cas spécial, par F. RELLICH dans [15]. L'égalité en question joue un rôle important dans les estimations de L. E. PAYNE et H. F. WEINBERGER (cfr. [14]). L'auteur a attaqué, utilisant ce type d'égalité, le problème de Dirichlet pour les équations du deuxième ordre resp. quatrième ordre dans [9], resp. [10]. Les solution obtenues n'ont pas, en général, l'intégrale de Dirichlet bornée. A l'aide des espaces de Sobolev avec le poids, l'auteur a obtenu dans [11] quelques résultats sur la régularité de la solution, trouvée dans [9].

Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes de Dirichlet, de Neumann et de Newton. Notre point de départ est la méthode variationnelle et la théorie des espaces de Sobolev. On démontre de différents théorèmes sur la régularité de la solution et spécialement des inégalités de Rellich (cfr. théorèmes 1, 4, 8, 10, 14). Par le procédé dual, on résout les problèmes en question pour les conditions aux limites qui ne fournissent pas en général, la solution avec intégrale de Dirichlet bornée (cfr. théorèmes 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16). On suppose seulement que les domaines ont la frontière lipschitzienne. On ne peut alors utiliser directement les estimations „à priori“ (cfr. S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG [1]), quoique ces estimations soient très importantes pour le travail. Pour quelques théorèmes, on peut affaiblir les suppositions, comme l'a fait M. J. KADLEC dans [6]. Au travail [3b] de P. DOKTOR, la même méthode est utilisée pour considérer les fonctions harmoniques et leurs conjuguées. On a obtenu de cette manière une généralisation du théorème de Riesz.

1. Les espaces fondamentaux. On désigne par E_n l'espace euclidien avec les coordonnées $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

On considère de différentes classes de domaines bornés.

Soit $k \geqq 0$ un entier, soit $0 < \mu \leqq 1$. On désigne par $\mathfrak{N}^{(k)}$ resp. $\mathfrak{N}^{(k),\mu}$ les classes des domaines, dont les frontières sont des variétés k-fois continûment différentiables resp. k-fois continûment différentiables avec les k-èmes dérivées μ-höldériennes. On se sert pour désormais de la notation suivante: Si $\Omega \in \mathfrak{N}^{(k)}$ (resp. $\mathfrak{N}^{(k),\mu}$) on suppose que:

1. Il existe m systèmes de coordonnées dans E_n et m fonctions a_r de sorte que l'on peut représenter tout point de la frontière sous la forme: $[x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn-1}, a_r . (x_{r1}, \ldots, x_{rn-1})]$, en brévité $[X_r, a_r(X_r)]$. Les fonctions a_r sont k-fois continûment différentiables dans la fermeture de la boule $\Delta_r \equiv |X_r| < \alpha$ où $|X_r| = (\sum_{i=1}^{n-1} x_{ri}^2)^{\frac{1}{2}}$ (resp. les k-èmes dérivées sont μ-höldériennes: $|\mathrm{D}^k a_r(X) - \mathrm{D}^k a_r(Y)| \leqq c|X - Y|^{\mu}$).[1])

2. Il existe un nombre $0 < \beta \leqq 1$ tel que les points $[X_r, x_{rn}]$, $X_r \in \Delta_r$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ sont à l'intérieur de Ω, tandis que les points $[X_r, x_{rn}]$, $X_r \in \Delta_r$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ sont à l'extérieur de Ω.

Il est démontré au travail de l'auteur [12] un théorème sur les domaines avec frontières lipschitziennes:

Lemme 1.1. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Soit $p \geqq 1$.*

Alors il existe une suite de sousdomaines Ω_s, $\overline{\Omega}_s \subset \Omega_{s+1} \subset \ldots$ ($\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω), $\lim_{s\to\infty} \Omega_s = \Omega$, $\Omega_s \in \mathfrak{N}^{(\infty)}$. En désignant par a_{rs} les fonctions représentant la frontière de Ω_s on a:

$$(1.1) \qquad |a_{rs}(X_r) - a_{rs}(Y_r)| \leqq |X_r - Y_r| \quad \textit{pour} \quad X_r, Y_r \in \Delta_r$$

où c est indépendant de s,

$$(1.2) \qquad \lim_{s\to\infty} (\sup_{X_r \in \Delta_r} |a_{rs}(X_r) - a_r(X_r)|) = 0\,,$$

$$(1.3) \quad \lim \int_{\Delta_r} \left|\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right|^p \mathrm{d}X_r = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,\ r = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Remarque 1.1. La démonstration du lemme 1.1 est assez délicate et compliquée. Le Lecteur qui n'aime pas les difficultés „inutiles" peut prendre (1.1), (1.2) et (1.3) comme les conditions posées sur les domaines du type $\mathfrak{N}^{(0),1}$. D'ailleurs, au contraire à la démonstration générale, dans les cas pratiques, la validité du lemme 1.1 est manifeste.

[1]) On va désigner dans la suite la plupart des constantes par le même symbole c.

On désigne:

$$U_r = \underset{X}{E}(X = [X_r, x_{rn}],\ X_r \in \Delta_r,\ a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta)\,,$$

$$V_r = \underset{X}{E}(X = [X_r, x_{rn}],\ X_r \in \Delta_r,\ a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r))\,.$$

Il existe une partition de l'unité de sorte que $X \in \Omega \Rightarrow 1 = \sum_{r=1}^{m+1} \varphi_r(X)$, φ_r sont indéfiniment continûment différentiables, $0 \leqq \varphi_r \leqq 1$; pour $r = 1, 2, \ldots, m$ les supports des φ_r sont dans U_r, pour $m + 1$ dans Ω.

On utilise désormais souvent U_r, V_r, φ_r sans répéter leurs définitions.

Soit $k \geqq 0$ un entier, $0 < \mu \leqq 1$. On désigne par $C^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles qui sont continues avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k sur Ω. On munit $C^{(k)}(\Omega)$ de la norme:

$$|u|_{C^{(k)}(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=j} \max_{X \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^j u(X)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|. \tag{1.4}$$

On désigne par $C^{(k),\mu}(\Omega)$ le sousespace de $C^{(k)}(\Omega)$ des fonctions, dont toutes les dérivées k-èmes sont μ-höldériennes. On munit $C^{(k),\mu}(\Omega)$ de la norme:

$$|u|_{C^{(k),\mu}(\Omega)} = |u|_{C^{(k)}(\Omega)} + \tag{1.5}$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \sup_{X \neq Y, X, Y \in \bar{\Omega}} \frac{\left| \dfrac{\partial^k u(X)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} - \dfrac{\partial^k u(Y)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|}{|X - Y|^{\mu}}.$$

On désigne par $\mathscr{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables sur Ω, continues avec toutes leurs dérivées dans $\bar{\Omega}$.

On désigne par $\mathscr{D}(\Omega)$ le sousespace de $\mathscr{E}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω.

Soit $p \geqq 1$, $k \geqq 0$ un entier. On désigne par $W_p^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles qui sont avec toutes leurs dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k de p-ème puissance sommable. On introduit dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ la norme par

$$|u|_{W_p^{(k)}\Omega} = \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=j} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|^p \mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

Les espaces $W_p^{(k)}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, complets, séparables.

Pour $p = 2$, on obtient l'epsace de Hilbert avec le produit scalair:

$$(u, v)_{W_2^{(k)}(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i=j} \int_{\Omega} \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \frac{\partial^j v}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \mathrm{d}\Omega\,. \tag{1.7}$$

On désigne par $\mathring{W}_p^{(k)}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ où la fermeture est définie moyennant la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$.

Il s'ensuit du théorème [2.1] du travail [4] de E. Gagliardo:

Lemme 1.2. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0)}$. Alors $\overline{\mathscr{E}(\Omega)} = W_p^{(k)}(\Omega)$. (La fermeture est définie moyennant la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$.)*

Nous énonçons un cas spécial du théorème de S. L. Sobolev (pour démonstration, cfr. p. ex. [4]):

Lemme 1.3. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $p < n$. Soit $1/q = 1/p - 1/n$. Alors $W_p^{(1)}(\Omega) \subset W_q^{(0)}(\Omega)$ et la transformation identique de $W_p^{(1)}(\Omega)$ dans $W_q^{(0)}(\Omega)$ est continue.*

Soit $1/q > 1/p - 1/n$. Alors la transformation mentionnée est complètement continue.

Soit $p = n$. Alors l'assertion vaut pour $q > 1$, d'ailleurs quelconque.

Soit $p > n$. Posons $\mu = 1 - n/p$. Alors $W_p^{(1)}(\Omega) \subset C^{(0),\mu}(\Omega)$ et la transformation identique est continue.

Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. On désigne par Γ la frontière de Ω. Soit $k = 0,1$, $p \geqq 1$ et f une fonction définie sur Γ. S'il vaut pour chague $r = 1, 2, \ldots, m$: $f(X_r, a_r(X_r)) \in W_p^{(k)}(\Delta_r)$ (cfr. définition de $\Omega \in \mathfrak{N}^{(k),\mu}$), on dit que $f \in W_p^{(k)}(\Gamma)$.

On munit $W_p^{(k)}(\Gamma)$ de la norme

$$|f|_{W_p^{(k)}(\Gamma)} = \sum_{r=1}^{m} |f|_{W_p^{(k)}(\Delta_r)} \,. \tag{1.8}$$

Remarque 1.2. On peut facilement démontrer que l'espace $W_p^{(k)}(\Gamma)$ $(k = 0, 1)$ et sa topologie ne dépendent pas du choix des cartes locales $[X_r, x_{rn}]$.

Il est démontré p. ex. dans [4]:

Lemme 1.4. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Soit $p < n$, $1/q = 1/p - 1/(n-1) \,.\, (p-1)/p$. Il existe précisément une transformation Z linéaire et continue de $W_p^{(1)}(\Omega)$ dans $W_q^{(0)}(\Gamma)$ de la manière que $u \in \mathscr{E}(\Omega) \Rightarrow Z(u) = u$. Si $1/q > 1/p - 1/(n-1) \,.\, (p-1)/p$, alors la transformation Z est complètement continue.*

On appelle $Z(u)$ trace de la fonction u de $W_p^{(1)}(\Omega)$. Dans la suite, on écrira simplement u de lieu de $Z(u)$. On désigne par $W_p^{(1-1/p)}(\Gamma)$ l'espace des traces. Par une adaptation immédiate du théorème 2.6 de [9] on obtient:

Lemme 1.5. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Alors $W_p^{(1)}(\Gamma)$ est dense dans $W_p^{(0)}(\Gamma)$.*

On obtient immédiatement, en utilisant pas à pas la démonstration du théorème 2.5 du travail [9]:

Lemme 1.6. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Alors $u \in \mathring{W}_p^{(1)}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W_p^{(1)}(\Omega)$, $u = 0$ sur Γ.*

On a:

Lemme 1.7. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Alors*

(a) *on peut prolonger f de $W_p^{(1)}(\Gamma)$ sur $W_p^{(1)}(\Omega)$ (on note ce prolongement encore f) de la manière que:*

$$|f|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \leqq c|f|_{W_p^{(1)}(\Gamma)} \,, \tag{1.9}$$

$f_s(X_r) = f(X_r, a_{rs}(X_r)) \in W_p^{(1)}(\Delta_r)$ (cfr. lemme 1.1) et

(1.10) $$|f_s|_{W_p^{(1)}(\Delta_r)} \leqq c|f|_{W_p^{(1)}(\Gamma)},$$

(b) *$\mathscr{E}(\Omega)$ est dense dans $W_p^{(1)}(\Gamma)$.*

Démonstration. (a) Dans V_r on pose $f_r(X_r, x_{rn}) = f(X_r, a_r(X_r))\, \varphi_r(X_r, x_{rn})$. Evidemment

(1.11) $$f = \sum_{r=1}^{m} f_r$$

est un prolongement avec propriétés (1.9) et (1.10).

(b) Posons $g_r(X_r) = f(X_r, a_r(X_r))\, \varphi(X_r, a_r(X_r))$ et

$$g_{rh}(X_r) = \frac{1}{\kappa h^{n-1}} \int_{|X_r - Y_r| < h} \exp \frac{|X_r - Y_r|^2}{|X_r - Y_r|^2 - h^2}\, g_r(Y_r)\, \mathrm{d}Y_r$$

où

$$\kappa = \int_{\substack{|X|<1 \\ X \in E_{n-1}}} \exp \frac{|X|^2}{|X|^2 - 1}\, \mathrm{d}X .$$

Il est bien connu (cfr. p. ex. S. L. Sobolev [16]) que $g_{rh} \to g_r$ dans $W_p^{(1)}(\Delta_r)$ pour $h \to 0$ (g_r à support compact dans Δ_r).

Soit $\psi_r \in \mathscr{D}(U_r)$, $\psi_r(X_r) = 1$ au voisinage du support de φ_r. Posons dans V_r: $f_{rh}(X_r, x_{rn}) = \psi(X_r, x_{rn})\, g_{rh}(X_r)$, prolongeons f_{rh} d'une manière évidente à Ω et posons $f_h = \sum_{r=1}^{m} f_{rh}$. On a $f_h \in \mathscr{E}(\Omega)$ et $f_h \to f$ dans $W_p^{(1)}(\Gamma)$, c.q.f.d.

Lemme 1.8. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(3)}$, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. Soit $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ un vecteur défini sur Γ avec composantes dans $C^{(1)}(\Gamma)$*[2] *et soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i > c > 0$ où $[\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n]$ est le vecteur de la normale extérieure.*

Alors il existe une suite $v_t \in C^{(2)}(\Omega)$ de sorte que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_t}{\partial x_i} \lambda_i \to g$ dans $W_2^{(0)}(\Gamma)$.

Démonstration. Posons $g_t = \sum_{r=1}^{m} f_{r1/t}$, où $f_{r1/t}$ sont les fonctions de la démonstration précédente. On a: $g_t \to g$ dans $W_2^{(0)}(\Gamma)$, $g_t \in \mathscr{E}(\Omega)$. On peut trouver $[\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \ldots, \lambda_{nt}]$, $\lambda_{it} \to \lambda_i$ dans $C^{(0)}(\Omega)$, $\lambda_{it} \in C^{(2)}(\Gamma)$ par le procédé mentionné. Soit $k_r \in C^{(2)}(U_r)$, avec le support dans U_r, choisie de sorte qu'on a dans les cartes $[X_r, x_{rn}]$ sur Γ:

$$k_r = g_t \varphi_r \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_{it} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \lambda'_{nt} \right]^{-1},$$

[2]) Pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(k)}$: $u \in C^{(k)}(\Gamma)$ si $u(X_r, a_r(X_r)) \in C^{(k)}(\Delta\,)$ pour $r = 1, 2, \ldots, m$. La topologie est évidente.

où λ'_{it} sont des cartes du vecteur $[\lambda_{1t}, \ldots, \lambda_{nt}]$ dans le système $[X_r, x_{rn}]$. Alors la fonction

$$v_{rt}(X_r, x_{rn}) = (a_r(X_r) - x_{rn})\, k_r(X_r, x_{rn}) \in C^{(2)}(\Omega)$$

et sur Γ:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_{rt}}{\partial x_{ri}} \lambda'_{it} = g_t \varphi_r \,.$$

Evidemment $v_t = \sum_{r=1}^{m} v_{rt}$ remplit les conditions du lemme.

Lemme 1.9. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, Ω_s *la suite du lemme* 1.1 *Alors il existe* P_s, *un opérateur linéaire et continu (opérateur-prolongement) de* $W_p^{(1)}(\Omega_s)$ *dans* $W_p^{(1)}(\Omega)$ *de sorte que pour* $X \in \Omega_s \Rightarrow (\mathrm{P}_s u)(X) = u(X)$ *et* $|\mathrm{P}_s| \leqq c$ *où* c *ne dépend pas de* s.

Démonstration. Soit $u \in W_p^{(1)}(\Omega_s)$. Soit $u_r = u\varphi_r$, $r \leqq m$. u_r est bien définie dans V_{rs} et on la prolonge sur U_{rs} par:

$$x_{rn} > a_{rs}(X_r) \Rightarrow u_r(X_r, x_{rn}) = u_r(X_r, 2a_{rs}(X_r) - x_{rn}) \,.$$

u_r ainsi prolongée appartient à $W_p^{(1)}(U_r)$ et a fortiori à $W_p^{(1)}(E_n)$. On a

$$(1.11) \qquad |u_r|_{W_p^{(1)}(E_n)} \leqq c|u|_{W_p^{(1)}(\Omega_s)}$$

où c ne dépend pas de s. Posons $u_{m+1} = u\varphi_{m+1}$. Alors $u_{m+1} \in W_p^{(1)}(E_n)$ et on a

$$(1.12) \qquad |u_{m+1}|_{W_p^{(1)}(E_n)} \leqq c|u|_{W_p^{(1)}(\Omega_s)}$$

où c ne dépend pas de s (s assez grand; pour simplifier on suppose $s \geqq 1$). Evidemment $u = \sum_{r=1}^{m+1} u_r$ jouit en vertu de (1.11) et (1.12) de toutes les propriétés, exigées du P.

2. Problème de Dirichlet. On désigne par

$$(2.1) \qquad \mathrm{D} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b$$

(la convention usuelle de sommation est utilisée) l'opérateur différentiel du deuxiéme ordre. On suppose $a_{ij} \in C^{(1)}(\Omega)$, $b \in C^{(0)}(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$; pour chaque $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \in$ $\in E_n$: $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $b \geqq 0$.[3])

On désigne par $W_p^{(-1)}(\Omega)$ le dual de $\mathring{W}_q^{(1)}(\Omega)$ où $1/p + 1/q = 1$.

[3]) On peut affaiblir les suppositions. La condition $a_{ij} = a_{ji}$ peut être supprimée et il suffit pour beaucoup de théorèmes qui suivront dans la partie II que a_{ij} soient lipschitziennes. (Cfr. [6].) Pour les théorèmes sur la régularité de II, cette condition paraît être trop faible.

Problème de Dirichlet (on dit désormais P. D.): Soit $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $f \in W_2^{(-1)}(\Omega)$. On cherche une fonction u de $W_2^{(1)}(\Omega)$ de sorte qu'il vaille

$$\varphi \in \mathrm{D}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + b\varphi u \right) \mathrm{d}\Omega \equiv B(\varphi, u) = f(\varphi)\,, \tag{2.2}$$

$$u - u_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)\,. \tag{2.3}$$

u est la solution faible du P. D.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $u = u_0$ sur Γ.

Il est bien connu, le lemme suivant (cfr. p. ex. E. MAGENES, G. STAMPACHA [8]):

Lemme 2.1. *Soit Ω borné. Il existe précisément une solution du P.D. et on a*

$$|u|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c\left[|u_0|_{W_2^{(1)}(\Omega)} + |f|_{W_2^{(-1)}(\Omega)}\right]. \tag{2.4}$$

On déduit du lemme 1.6 que pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, la condition (2.3) peut être remplacée par

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma \text{ où } \quad g \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)\,. \tag{2.5}$$

On a le lemme sur la „stabilité"[4])

Lemme 2.2. *Soit Ω borné, $\Omega_s \to \Omega$, $\Omega_s \subset \Omega$. Soit $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $f \in W_2^{(-1)}(\Omega)$. On a alors $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega_s)$, $f \in W_2^{(-1)}(\Omega_s)$. Soit u_s resp. u la solution du P.D. sur Ω_s resp. Ω. Posons $u_s(X) = u_0(X)$ pour $X \notin \Omega_s$, $X \in \Omega$.* [5])

Alors on a: $u_s \to u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme 2.2 dans le cas où $u_0 = 0$.

On tire de (2.4) que $|u_s|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c$. Mais il suit de (2.2) que u_s tendent vers u faiblement dans $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. On a $B(u - u_s, u - u_s) = f(u) - f(u_s)$, d'où $u_s \to u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Remarque 2.1. Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, nous utiliserons esentiellement les estimations „à priori" du type précisé ci-dessous. Pour beaucoup d'assertions qui suivront, il suffit de considérer le cas $p = 2$, dont la démonstration est élémentaire et on la trouve p. ex. dans L. NIRENBERG [13]. Nous n'aurons pas besoin directement du cas général $p \neq 2$; il faut remarquer que la démonstration du lemme 2.4 peut être basée sur cette estimation et sur l'interpolation (cfr. J. L. LIONS [7]).

Il est démontré dans [13]:

---

[4]) On peut démontrer beaucoup plus, cfr. I. BABUŠKA [2].

[5]) Plus précisément: $u_s - u_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega_s)$, alors $\varphi_k \to u_s - u_0$ dans $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega_s)$, $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega_s) \subset \mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow u_s - u_0 = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$ dans $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. En posant $f = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$, le prolongement de u_s est donné par $f + u_0$.

Lemme 2.3. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$, $u_0 \in W_2^{(2)}(\Omega)$, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, D *l'opérateur* (2.1).

Alors u, *la solution du P.D.*: $\mathrm{D}u = f$ *dans* Ω, $u = u_0$ *sur* Γ *appartient à* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *et on a*:

$$|u|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqq c[|u_0|_{W_2^{(2)}(\Omega)} + |f|_{W_2^{(0)}(\Omega)}] . \tag{2.6}$$

On a (cfr. Remarque 2.1):

Lemme 2.4. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$. *Alors l'opérateur* D est un *isomorphisme de* $\mathring{W}_p^{(1)}(\Omega)$ *sur* $W_p^{(-1)}(\Omega)$, $p > 1$.

3. Problème de Neumann (P.N.). Soit B un espace de Banach tel qu'on ait: $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans B, $W_2^{(1)}(\Omega) \subset B$ algébriquement et topologiquement, $1 \in B$. Soit $f \in B'$ [6a]) (dans le dual de B), $g \in (W_2^{(1)}(\Omega))'$. Supposons $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow g(\varphi) = 0$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. On cherche une fonction $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ telle qu'on ait:

$$v \in \mathscr{E}(\bar{\Omega}) \Rightarrow B(v, u) = f(v) + g(v) . \tag{3.1}$$

u est la solution faible du $P.$ $N.$: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $\partial u/\partial \nu = a_{ij}(\partial u/\partial x_j)\, \nu_i = g$ sur Γ.

Lemme 3.1. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $b \neq 0$. *Alors il existe précisément une solution* u *du P.N. et on a*

$$|u|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c[|f|_{B'} + |g|_{(W_2^{(1)}(\Omega))'}] . \tag{3.2}$$

Si $b = 0$, *alors la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution est*

$$f(1) + g(1) = 0 . \tag{3.3}$$

Dans ce cas, la solution est unique à une constante additive près. Si l'on choisit u *de sorte que* $\int_\Omega u \, \mathrm{d}\Omega = 0$, *alors* (3.2) *vaut.*

Pour la démonstration cfr. [8].

Lemme 3.2. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. *Alors pour* B' *on peut prendre* $W_{q_1}^{(0)}(\Omega)$ *où* $1/q_1 = 1/2 + 1/n$. [6b]) *On a* $W_{q_2}^{(0)}(\Gamma) \subset (W_2^{(1)}(\Omega))'$ *algébriquement et topologiquement où* $1/q_2 = 1/2 + 1/2(n - 1)$. [6b])

La démonstration du lemme 3.2 suit immédiatement des lemmes 1.3 et 1.4.

On désigne par $W_2^{(-1)}(\Gamma)$ le dual du $W_2^{(1)}(\Gamma)$. On a:

Lemme 3.3. $W_2^{(0)}(\Gamma)$ *est dense dans* $W_2^{(-1)}(\Gamma)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $g \in W_2^{(-1)}(\Omega)$, $h \in W_2^{(1)}(\Gamma)$. Posons $h_r = h\varphi_r$. On a $g(h) = \sum_{r=1}^{m} g(h_r)$.

[6a]) C'est une question ouverte que de savoir s'il existe B „le plus petit". Cfr. [7].

[6b]) Pour $n = 2$ on prend $q_i > 1$, $i = 1, 2$, d'ailleurs quelconque.

Soit $h \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$. En identifiant manifestement $\mathring{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$ avec le sousensemble correspondant de $W_2^{(1)}(\Gamma)$, on a d'après le lemme 2.1:

$$g(h) = \int_{\Delta_r} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x_{ri}} \frac{\partial u_r}{\partial x_{ri}} + h u_r \right) \mathrm{d}X_r \quad \text{où} \quad u_r \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Delta_r)\,. \tag{3.4}$$

Alors $u_r = \lim_{t \to \infty} u_{rt}$ dans $\mathring{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$ où $u_{rt} \in \mathscr{D}(\Delta_r)$. Soit $f_{rt} \in W_2^{(0)}(\Gamma)$ définie par:

$$f_{rt}(X_r, a_r(X_r)) = (-\Delta u_{rt}(X_r) + u_{rt}(X_r))\, \varphi_r(X_r, a_r(X_r)) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}(X_r)\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Posons $f_t = \sum_{r=1}^{m} f_{rt}$. On a $f_t \to g$ dans $W_2^{(-1)}(\Gamma)$ c. q. f. d.

Remarque 3.1. Soit $g \in W_2^{(0)}(\Omega)$ et soit Ω_s la suite des domaines du lemme 1.1. On construit $g_s \in W_2^{(0)}(\Gamma_s)$, „$g_s \to g$" de la manière suivante: On pose

$$h_{rs}(X_r, a_{rs}(X_r)) = g(X_r, a_r(X_r))\, \varphi_r(X_r, a_r(X_r)) \quad \text{et} \quad g_s = \sum_{r=1}^{m} h_{rs}\,.$$

Lemme 3.4. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D l'opérateur (2.1). Soit $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$.* [7] *Si $b = 0$, on suppose $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma g \,\mathrm{d}S = 0$. Soient Ω_s les sousdomaines du lemme 1.1, $g_s \in W_2^{(0)}(\Gamma_s)$ définies dans remarque 3.1. Pour $b \not\equiv 0$ on pose $f_s = f$ dans Ω_s; si $b = 0$, on pose $f_s = f + c_s$ et on choisit les constantes c_s de sorte que $\int_{\Omega_s} f_s \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} g_s \,\mathrm{d}S = 0$.*

Soient u_s resp. u les solution du P.N.:

D$u_s = f_s$ *dans Ω_s resp.* D$u = f$ *dans Ω, $\partial u_s/\partial \nu = g_s$ sur Γ_s resp. $\partial u/\partial \nu = g$ sur Γ.*

Pour $b \equiv 0$, on demande que $\int_{\Omega_1} u_s \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_1} u \,\mathrm{d}\Omega = 0$. On prolonge u_s sur Ω par P_s.[8])

Alors $u_s \rightharpoonup u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$ ($\rightharpoonup$ signifie la convergence faible) et on a

$$\int_{\Delta_r} |u_s(X_r, a_{rs}(X_r)) - u(X_r, a_r(X_r))| \,\mathrm{d}X_r \to 0\,. \tag{3.5}$$

Démonstration. En vertu du (3.2), on a $|u_s|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c$. Soit $v \in \mathscr{E}(\Omega)$. On a:

$$\int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + b v u_s\right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_s} v f_s \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} v g_s \,\mathrm{d}S + \int_{\Omega - \Omega_s} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + b v u_s\right) \mathrm{d}\Omega\,.$$

En tenant compte de la remarque 3.1, on obtient:

$$\int_{\Gamma_s} v g_s \,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Delta_r} v(X_r, a_{rs}(X_r))\, g(X_r, a_r(X_r))\, \varphi_i(X_r, a_r(X_r)) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_{ri}}(X_r)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_r\,. \tag{3.6}$$

---

[7]) On peut affaiblir ces conditions, cfr. lemme 3.2.

[8]) Cfr. lemme 1.9.

Il en découle: $\int_{\Gamma_s} vg_s \, dS \to \int_\Gamma vg \, dS$, ce qui entraîne $c_s \to 0$ si $b \equiv 0$. Alors $\int_{\Omega_s} vf_s \, d\Omega \to$ $\to \int_\Omega vf \, d\Omega$. Evidemment

$$\left| \int_{\Omega - \Omega_s} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + bvu_s \right) d\Omega \right| \leqq c|u_s|_{W_2^{(1)}(\Omega)} |v|_{W_2^{(1)}(\Omega - \bar{\Omega}_s)} \to 0 \, .$$

Alors $u_s \rightharpoonup u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$.

La transformation identique de $W_2^{(1)}(\Omega)$ dans $W_1^{(0)}(\Gamma)$ étant complètement continue en vertu du lemme 1.4, on obtient: $u_s(X_r, a_r(X_r)) \to u(X_r, a_r(X_r))$ dans $W_1^{(0)}(\Delta_r)$. D'autre côté:

$$\int_{\Delta_r} |u_s(X_r, a_{rs}(X_r)) - u_s(X_r, a_r(X_r))| \, dX_r \leqq c|u_s|_{W_1^{(1)}(\Omega - \bar{\Omega}_s)} \leqq$$
$$\leqq c\mu(\Omega - \bar{\Omega}_s)^{\frac{1}{2}} |u_s|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \to 0 \, ,$$

ce qui achève la démnostration du lemme.[9])

Lemme 3.5. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$, D *l'opérateur* (2.1), $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$ (*si* $b \equiv 0$ *on demande* $\int_\Omega f d\Omega = 0$). *Soit* u *la solution du P.N.*: $Du = f$ *dans* Ω, $\partial u/\partial \nu = a_{ij} (\partial u/\partial x_j) \nu_i = 0$ *sur* Γ. (*Si* $b \equiv 0$, *on demande* $\int_\Omega u \, d\Omega = 0$.)

Alors $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ *et on a*:

(3.7) $$|u|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqq c|f|_{W_2^{(0)}(\Omega)} \, .$$

Pour la démonstration, cfr. [13].

4. Problème de Newton (P. Nw.). Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Soit $\sigma \in W_\infty^{(0)}(\Gamma)$, [10]) $\sigma \geqq 0$, $\sigma \not\equiv 0$. En conservant les notations du 3, on dit que $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ résout le P. Nw.: $Du = f$ dans Ω, $\partial u/\partial \nu + \sigma u = g$ sur Γ si

$$v \in \mathscr{E}(\Omega) \Rightarrow B(v, u) + \int_\Gamma \sigma v u \, dS = f(v) + g(v) \, .$$

Lemme 4.1. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1). *Alors il existe précisément une solution* u *du P. Nw. et on a*:

(4.1) $$|u|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c[|f|_{B'} + |g|_{(W_2^{(1)}(\Omega))'}] \, .$$

Pour la démonstration cfr. [8].

Remarque 4.1. Naturellement, le lemme 3.2 reste en vigueur pour le P. Nw.

---

[9]) Tenant compte des propriétés de l'opérateur P_s, on peut, sous les conditions du lemme, démontrer: $u_s \to u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$.

[10]) On peut beaucoup affaiblir cette condition. If suffit de considérer au lieu de l'opérateur σv (sur Γ), l'opérateur $\sigma(v)$ tel que $\int_\Gamma \sigma(v) \, u \, dS$ soit une forme bilinéaire sur $W_2^{(1)}(\Omega) \times W_2^{(1)}(\Omega)$.

5. L'égalité fondamentale. Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$, $H = [h_1, h_2, \ldots, h_n]$ un vecteur avec composants dans $C^{(1)}(\Omega)$. Soit $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. On a l'identité

$$(5.1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj}) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] = 2h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{D}u - 2h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} bu + $$

$$+ \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} a_{ij} - 2\frac{\partial h_i}{\partial x_k} a_{kj} + h_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

(Cfr. L. E. Payne, H. F. Weinberger [14].)

La formule de Green nous donne:

$$(5.2) \qquad \int_\Gamma (h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj}) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_k \, \mathrm{d}S =$$

$$= 2\int_\Omega h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{D}u \, \mathrm{d}\Omega - 2\int_\Omega h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} bu \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}\Omega .$$

Ici b_{ij} est la parenthèse à la droite de (5.1).

6. Problème de Dirichlet. Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Soit $g \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$. Soit g le prolongement du g donné par lemme 1.7. On a $g \in W_2^{(1)}(\Gamma_s)$ en vertu (1.10). Soit u_s la solution du P. D.: $\mathrm{D}u_s = f$ dans Ω_s, $u_s = g$ sur Γ_s. Soit $g_{st} \in \mathscr{E}(\Omega_s)$, $g_{st} \to g$ dans $W_2^{(1)}(\Gamma_s)$; l'existence d'une telle suite est garantie par le lemme 1.7. Soit u_{st} la solution du P. D.: $\mathrm{D}u_{st} = f$ dans Ω_s, $u_{st} = g_{st}$ sur Γ_s. Alors il suit du lemme 2.3 que $u_{st} \in W_2^{(2)}(\Omega_s)$. Utilisant le lemme 1.2, on obtient (5.2) pour u_{st} et Ω_s. On a

$$(6.1) \qquad \int_{\Gamma_s} (h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj}) \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\frac{\partial u_{st}}{\partial x_j} \nu_k \, \mathrm{d}S =$$

$$= - \int_{\Gamma_s} [h_k a_{ij} + 2(h_i a_{kj} - h_k a_{ij})] \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\frac{\partial u_{st}}{\partial x_j} \nu_k \, \mathrm{d}S .$$

Le vecteur $(h_i a_{kj} - h_k a_{ij}) \nu_k$ où i est l'indice des cartes, j est fixe, est orthogonal à la normale extérieure. Alors $(h_i a_{kj} - h_k a_{ij}) \nu_k(\partial u/\partial x_i)$ est une dérivée au plan tangent. Pour les domaines en question, on peut trouver H de sorte que pour s assez grand on ait: $h_i \nu_i \geqq c > 0$.[11a] (Cfr. [9].) Alors on tire de (5.2) et (2.4):

$$(6.2) \qquad \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)}\right)^2 \leqq$$

$$\leqq c\left[\sum_{i=1}^n |g_{st}|_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)} \left|\frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} + |f|^2_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} + |g_{st}|^2_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)}\right].$$

[11a]) Pour simplifier, on va supposer cette inégalité pour $s \geqq 1$.

Ici c de dépend pas de s. Ayant pour $\varepsilon > 0$

$$(6.3) \qquad 2|g_{st}|_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)} \left|\frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} \leqq \varepsilon^2 \left|\frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\right|^2_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} + \frac{1}{\varepsilon^2} |g_{st}|^2_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)}$$

on obtient de (6.2) et (6.3)

$$(6.4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u_{st}}{\partial x_i}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} \leqq c\left[|g_{st}|_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)} + |f|_{W_2^{(0)}(\Omega_s)}\right].$$

Si on laisse $t \to \infty$, on obtient par le prolongement continu la définition de $\partial u_{st}/\partial x_i$ sur Γ_s. Considérons spécialement $\partial u_s/\partial \nu = a_{ij}(\partial u_s/\partial x_j)\, \nu_i$. On a alors

$$(6.5) \qquad \left|\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} \leqq c\left[|g|_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)} + |f|_{W_2^{(0)}(\Omega_s)}\right].$$

Soit maintenant $\psi \in \mathscr{D}(\Delta_r)$. Soit $w \in \mathscr{D}(U_r)$, choisi de manière que pour s assez grand

$$\psi(X_r)\, w(X_r, a_{rs}(X_r)) = \psi(X_r).$$

Désignons $\psi w = v$. Utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega_s} fv \, \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_s} \frac{\partial u_s}{\partial \nu} v \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega_s} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + bvu_s\right) \mathrm{d}\Omega.$$

Il en découle en vertu du lemme 2.2 l'existence du

$$(6.6) \qquad \lim_{s\to\infty} \int_{\Delta_r} \frac{\partial u_s}{\partial \nu} v \, . \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_{ri}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_r.$$

Le lemme 1.1 nous garantit avec (6.6) l'existence du

$$(6.7) \qquad \lim_{s\to\infty} \int_{\Delta_r} \frac{\partial u_s}{\partial \nu} v \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_r.$$

Les fonctions $v(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial a_r/\partial x_{ri})^2)^{\frac{1}{2}}$ forment un ensemble dense dans $W_2^{(0)}(\Delta_r)$. Compte tenu de (1.10), de (6.5) et de (6.7), on est parvenu au lemme suivant:

Lemme 6.1. *Soit $\Omega_s \to \Omega$ la suite du lemme 1.1. Soit $g \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$. Soit g le prolongement de g donné, sur Ω du lemme 1.7. Soit u_s solution du P.D.: $Du_s = f$ dans Ω_s, $u_s = g$ sur Γ_s.*

Alors la fonction $\partial u_s/\partial \nu$ appartient à $W_2^{(0)}(\Gamma_s)$, on a (6.5) et en la considérant par projection comme élément de $W_2^{(0)}(\Delta_r)$, $\partial u_s/\partial \nu$ tend faiblement[11b]*) vers une limite w_r.*

[11b]) Pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $g \equiv 0$, Ω à la frontière régulière par parties, on peut démontrer $\partial u_s/\partial \nu \to \partial u/\partial \nu$ dans $W_2^{(0)}(\Gamma)$.

Définissons sur Γ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{r=1}^{m} \varphi_r w_r . \tag{6.8}$$

On a:

Théorème 1. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1). *Soit* $g \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$. *Soit* u *la solution du P.D.*: $\mathrm{D}u = f$ *dans* Ω, $u = g$ *sur* Γ. *Soit* $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Alors à chaque solution u *on fait correspondre linéairement* $\partial u/\partial \nu$, *définie par* (6.8) *et on a*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{W_2^{(0)}(\Gamma)} \leqq c\left[|g|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} + |f|_{W_2^{(0)}(\Omega)}\right], \tag{6.9}$$

$$\int_\Omega vf \, \mathrm{d}\Omega = - \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S + \int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bvu \right) \mathrm{d}\Omega . \tag{6.10}$$

Démonstration. Soit u_s du lemme 6.1, $v \in \mathscr{E}(\Omega)$. On a

$$\int_{\Omega_s} v\varphi_r f \, \mathrm{d}\Omega = - \int_{\Gamma_s} v\varphi_r \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega_s} \left(a_{ij} \frac{\partial (v\varphi_r)}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + bv\varphi_r u_s \right) \mathrm{d}\Omega .$$

En vertu du lemme 2.2 et du lemme 6.1 on obtient

$$\int_\Omega v\varphi_r f \, \mathrm{d}\Omega = - \int_\Gamma v\varphi_r w_r \, \mathrm{d}S + \int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial (v\varphi_r)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bv\varphi_r u \right) \mathrm{d}\Omega . \tag{6.11}$$

Faisant sommation de (6.11): $\sum_{r=1}^{m+1}$, on obtient l'assertion.

Remarque 6.1. On peut construire un exemple qui montre qu'en général pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $g = 0$, l'espace $W_2^{(0)}(\Gamma)$ dans (6.9) ne peut pas être remplacé par $W_p^{(0)}(\Gamma)$, $p > 2$.

Remarque 6.2. Il suit de (6.10) que $\partial u/\partial \nu$ est définie d'une manière unique. Pour les questions de savoir comment $\partial u/\partial \nu$ dépend de l'opérateur D quand les coefficients changent, cfr. [6].

Le procédé dual: Soit $g \equiv 0$. Soit v la solution du P. D.: $\mathrm{D}v = 0$ dans Ω, $v = h$ sur Γ où $h \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$.

Alors on a, tenant compte de (6.10):

$$\int_\Omega vf \, \mathrm{d}\Omega = - \int_\Gamma h \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S . \tag{6.12}$$

De (6.9) et (6.12) on tire l'inégalité

$$|v|_{W_2^{(0)}(\Omega)} \leqq c|h|_{\Omega_2^{(0)}(\Gamma)} . \tag{6.13}$$

En vertu du lemme 1.4, 1.5 et 1.7 on obtient que

$$\overline{W_2^{(1/2)}(\Gamma)} = W_2^{(0)}(\Gamma), \text{[12]}$$

alors on est parvenu au théorème:

Théorème 2. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1).

Alors il existe précisément une transformation R, *linéaire et continue de* $W_2^{(0)}(\Gamma)$ *dans* $W_2^{(0)}(\Omega)$ *de sorte que* $h \in W_2^{(1/2)}(\Gamma) \Rightarrow R(h) = v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *et* v *est la solution faible du P. D.*: $\mathrm{D}v = 0$ *dans* Ω, $v = h$ *sur* Γ.

On obtient alors solution du P. D. généralisé.

Remarque 6.3. On peut construire un exemple qui montre que pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, l'espace $W_2^{(0)}(\Gamma)$ des conditions aux limites ne peut pas être élargi sur $W_p^{(0)}(\Gamma)$, $p < 2$. Cfr. Rem. 6.1. En ce qui concerne la régularité à l'intérieur de la solution du P. D. génér., cfr. [13]; dans [11] on a obtenu les résultats concernant la convergence vers. $h \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. Le cas de $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ est en général ouvert. Pour le cas $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$, cfr. G. Cimmino [3a].

Remarque 6.4. Le théorème 2 donne le prolongement de la transformation, laquelle fait correspondre à la trace la solution correspondante du P. D. Il suit immédiatement du lemme 6.1 que l'opérateur R est aussi le prolongement de la transformation (si elle existe) laquelle fait correspondre à la fonction continue sur Γ la solution classique du P. D.

Par la solution classique du P. D. on comprend une fonction $u \in C^{(0)}(\Omega)$, $u \in C_{\mathrm{loc}}^{(2)}(\Omega)$, $\mathrm{D}u = 0$ au sens classique.

Soit v une solution du P. D.: $\mathrm{D}v = 0$, $v \in W_2^{(1)}(\Gamma)$. Soit $f \equiv 0$, $g \in W_2^{(1)}(\Gamma)$. Soit u la solution du P. D.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $u = g$ sur Γ. On a:

$$\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, \mathrm{d}S . \tag{6.14}$$

En vertu du (6.9) on obtient de (6.14):

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{W_2^{(-1)}(\Gamma)} \leqq c |v|_{W_2^{(0)}(\Gamma)} . \tag{6.15}$$

Théorème 3. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1).

Alors à chaque solution du P. D. généralisé v, *on peut faire correspondre linéairement* $\partial v / \partial \nu \in W_2^{(-1)}(\Omega)$ *et on a* (6.14) (*pour* u *résolvant P. D.*: $\mathrm{D}u = 0$ *dans* Ω, $u \in W_2^{(1)}(\Gamma)$) *et* (6.15).

---

[12]) Il suit du lemme 1.4 que $W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ est strictement contenu dans $W_2^{(0)}(\Gamma)$ avec une topologie plus fine.

7. Régularité de la solution du P. D. Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ et soit K une boule telle, que $\overline{\Omega} \subset K$. Supposons que D est défini dans K et jouit ici des propriétés mentionnées.[13a]) Soit $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $g \in W_2^{(1)}(\Gamma)$ et soit u la solution du P. D.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $u = g$ sur Γ. On a: $K - \overline{\Omega} = \sum_{i=1}^{l} \Omega^i$ où $\Omega^i \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ et $\sum_{i=1}^{l} \Gamma^i = \Gamma + \dot{K}$, où $\dot{K}$ est la frontière de K. Posons $g \equiv 0$ sur $\dot{K}$. Soient u_i les solutions du P. D.: $\mathrm{D}u_i = 0$ dans Ω^i, $u_i = g$ sur Γ^i. Posons $U = u$ dans Ω, $U = u_i$ dans Ω^i. Il est manifeste (cfr. th. 2.5 de [4]) que $U \in \mathring{W}_2^{(1)}(K)$. Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. On a:

$$\int_K \left(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + b\varphi U \right) \mathrm{d}K = \int_\Gamma \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S + \int_\Omega \varphi f \,\mathrm{d}\Omega + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Gamma^i} \varphi \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \mathrm{d}S . \tag{7.1}$$

En tenant compte des lemmes 1.3 et 1.4, on peut prolonger l'expression à droite de (7.1) sur $\mathring{W}^{(1)}_{2n/(n+1)}(K)$ et l'on obtient par là une fonctionnelle de $W^{(-1)}_{2n/(n-1)}(K)$. En vertu du lemme 2.4, on obtient que $U \in \mathring{W}^{(1)}_{2n/(n-1)}(K)$, alors a fortiori $u \in W^{(1)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$. On obtient l'inégalité

$$|u|^2_{W^{(1)}{}_{2n/(n-1)}(\Omega)} \leqq c \left[\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2_{W_2{}^{(0)}(\Gamma)} + \sum_{i=1}^{l} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2_{W_2{}^{(0)}(\Gamma^i)} + |f|^2_{W^{(0)}{}_{2n/(n+1)}(\Omega)} \right] . \tag{7.2}$$

Soient maintenant $f \in W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$. Il existe une suite des $f_t \in W_2^{(0)}(\Omega)$ de sorte que $f_t \to f$ dans $W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$. Soit u_t la solution du P. D.: $\mathrm{D}u_t = f_t$ dans Ω, $u_t = g$ sur Γ. On a $u_t \in W^{(1)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$. De (5.2)[13b]) on obtient, en tenant compte de ce que $W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega) \subset W_2^{(-1)}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement:

(7.3)

$$\left| \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right|^2_{W_2{}^{(0)}(\Gamma)} \leqq c\left[|g|^2_{W_2{}^{(1)}(\Gamma)} + |f_t|_{W^{(0)}{}_{2n/(n+1)}(\Omega)} |u_t|_{W^{(1)}{}_{2n/(n-1)}(\Omega)} + |f_t|^2_{W^{(0)}{}_{2n/(n+1)}(\Omega)} \right] .$$

Alors, en liant (7.2) avec (7.3), on obtient

$$|u_t{}_{W\quad\;/(n-1)(\Omega)} \leqq c\left[|g|_{W_2{}^{(1)}(\Gamma)} + |f_t|_{W^{(0)}{}_{2n/(n-1)}(\Omega)} \right] . \tag{7.4}$$

Alors $t \to \infty$ entraîne

$$|u|_{W^{(1)}{}_{2n/(n-1)}(\Omega)} \leqq c\left[|g|_{W_2{}^{(1)}(\Gamma)} + |f|_{W^{(0)}{}_{2n/(n+1)}(\Omega)} \right] . \tag{7.5}$$

La formule (7.3) et (7.5) nous donne

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{W_2{}^{(0)}(\Gamma)} \leqq c\left[|g|_{W_2{}^{(1)}(\Gamma)} + |f|_{W^{(0)}{}_{2n/(n+1)}(\Omega)} \right] . \tag{7.6}$$

[13a]) Il ne s'agit au fond que de prolonger a_{ij} avec leurs premières dérivées et b sur un voisinage de Ω.

[13b]) Pour justifier l'emploi de (5.2), il faut utiliser le procédé limite $\Omega_s \to \Omega$ (cfr. lemme 1.1).

On a par là démontré:

Théorème 4. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1) *défini dans une boule* $K \supset \bar{\Omega}$. *Soit* u *la solution du P. D.*: $\mathrm{D}u = f$ *dans* Ω, $u = g$ *sur* Γ *où* $f \in W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$, $g \in W^{(1)}_2(\Gamma)$. *Alors* $u \in W^{(1)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$ *et il vaut* (7.5).

La transformation $T(f, g) = \partial u/\partial \nu$ *peut être prolongée continûment sur l'espace* $W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega) \times W^{(1)}_2(\Gamma)$ *et l'on a* (7.6).

Le procédé dual nous donne:

Théorème 5. *La transformation* R *du th.* 2 *applique* $W^{(0)}_2(\Gamma)$ *dans* $W^{(0)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$.

Soit maintenant $k \in W^{(-1)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$. Alors le procédé dual nous donne:

Théorème 6. *Il existe une transformation* M, *linéaire et continue de* $W^{(-1)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$ *dans* $W^{(0)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$ *de sorte que si* $k \in W^{(-1)}_2(\Omega)$, *allors* $M(k) \in \mathring{W}^{(1)}_2(\Omega)$, *et donne la solution du P. D.*: $\mathrm{D}v = k$ *dans* Ω, $v = 0$ *sur* $\Gamma(\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1})$.

Remarque 7.1. Il suit du théorème 4 et du lemme 1.3 que pour $n = 2$, la solution du P. D., envisagée au th. 4, appartient à $C^{(0),\frac{1}{2}}(\Omega)$ et est alors classique pour les conditions aux limites. On obtient facilement: $\overline{W^{(-1)}_2(\Omega)} = W^{(-1)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$.

Problème. Peut-on remplacer $W^{(0)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$ par $\mathring{W}^{(1)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$? Pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(2)}$ c'est vrai.

On déduit sans difficulté du lemme 6.1 un théorème sur l'unicité:

Théorème 7. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1), Ω_s *la suite du lemme* 1.1. *Soit* $u \in W^{(1)}_2(\Omega_s)$ *pour chaque* s, *soit* $\mathrm{D}u = 0$ *dans* Ω *faiblement et*

$$\lim_{s \to \infty} |u|_{W_2{}^{(0)}(\Gamma_s)} = 0 \,. \tag{7.7}$$

Alors $u \equiv 0$.

Démonstration. Soit $f \in W^{(0)}_2(\Omega)$ avec support compact dans Ω et u_s la solution du P. D.: $\mathrm{D}u_s = f$ dans Ω_s, $u_s = 0$ sur Γ_s. En vertu du (6.10) on a

$$\int_{\Omega_s} uf \,\mathrm{d}\Omega = - \int_{\Gamma_s} u \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S \,. \tag{7.8}$$

Mais (7.7) et (7.8) entraînent que $\int_\Omega uf \,\mathrm{d}\Omega = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

Remarque 7.2. Il suffit p. ex. pour la validité du th. 7 de supposer $u \in W^{(1)}_{2n/(n+1)}(\Omega)$. La supposition $u \in W^{(1)}_p(\Omega)$ pour $p < 2n/(n+1)$ ne suffit pas en général pour l'unicité ($\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ seulement) ce qu'on peut montrer sur un exemple facile.

8. Problème de Neumann. On va démontrer:

Lemme 8.1. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1). *Soit* Ω_s *la suite du lemme* (1.1). *Soit* $f \in W^{(0)}_2(\Omega)$, $g \in W^{(0)}_2(\Gamma)$. *Si* $b \equiv 0$, *on demande* $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma g \,\mathrm{d}S = 0$. *Soit* $f_s \in W^{(0)}_2(\Omega_s)$, $g_s \in W^{(0)}_2(\Gamma_s)$ *du lemme* 3.4. *Soit* u *resp.* u_s *les solutions du P. N.*:

$Du = f$ *dans* Ω *resp.* $Du_s = f_s$ *dans* Ω_s, $\partial u/\partial \nu = g$ *sur* Γ *resp.* $\partial u_s/\partial \nu = g_s$ *sur* Γ_s. *Si* $b \equiv 0$, *posons* $\int_{\Omega_1} u_s \, d\Omega = \int_{\Omega_1} u \, d\Omega = 0$. *Alors* $u_s \in W_2^{(1)}(\Gamma_s)$ *et on a*

(8.1) $$|u_s|_{W_2^{(1)}(\Gamma_s)} \leqq c[|g_s|_{W_2^{(0)}(\Gamma s)} + |f_s|_{W_2^{(0)}(\Omega_s)}]$$

où c ne dépend pas de s. En considérant $u_s(X_r, a_{rs}(X_r))$ *comme élèment de* $W_2^{(1)}(\Delta_r)$, *on a*

(8.2) $$u_s \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_2^{(1)}(\Delta_r)$$

($\rightharpoonup$ *désignant la convergence faible*), *et l'inégalité*

(8.3) $$|u|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} \leqq c[|g|_{W_2^{(0)}(\Gamma)} + |f|_{W_2^{(0)}(\Omega)}] \, .$$

Démonstration. Soit $v_{st} \in C^{(2)}(\Omega_s)$ une suite telle que $g_{st} = \partial v_{st}/\partial \nu \to g_s$ dans $W_2^{(0)}(\Gamma_s)$. L'existence d'une telle suite est garantie par le lemme 1.8. Si $b \equiv 0$, soit $f_{st} = f_s + c_{st}$ où les constantes c_{st} sont choisies de sorte qu'on ait: $\int_{\Omega_s} f_{st} \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} g_{st} \, dS = 0$. Soit w_{st} la solution du P. N.:

(8.4) $$Dw_{st} = f_{st} - Dv_{st} \quad \text{dans} \quad \Omega_s \, , \quad \frac{\partial w_{st}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_s \, .$$

$u_{st} = w_{st} + v_{st} \in W_2^{(2)}(\Omega)$ en vertu du lemme 3.5 et résout le P. N.: $Du_{st} = f_{st}$ dans Ω_s, $\partial u_{st}/\partial \nu = g_{st}$ sur Γ_s. (Pour $b \equiv 0$ on modifie, si c'est nécessaire, u_{st} de façon à avoir $\int_{\Omega_1} u_{st} \, d\Omega = 0$). On a alors (5.2) pour u_{st} et Ω_s. Mais il est valable:

(8.5) $$\int_{\Gamma_s} (h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj}) \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{st}}{\partial x_j} \nu_k \, dS = \\ = \int_{\Gamma_s} h_k \nu_k a_{ij} \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{st}}{\partial x_j} \, dS - 2 \int_{\Gamma s} h_i \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i} g_{st} \, dS \, .$$

Ayant $h_i \nu_i \geqq c > 0$, nous tirons de (5.2) et (8.5):

(8.6) $$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_{st}}{\partial x_i} \right|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} \leqq c[|g_{st}|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} + |f_{st}|_{W_2^{(0)}(\Omega_s)}] \, .$$

$t \to \infty$ entraîne (8.1) pour u_s.

Cela entraîne:

(8.7) $$|u_s|_{W_2^{(0)}(\Delta_r)} \leqq c[|g_s|_{W_2^{(0)}(\Gamma_s)} + |f_s|_{W_2^{(0)}(\Omega_s)}] \, .$$

Mais (8.7)avec (3.5) donne (8.2) et (8.3) c.q.f.d. Le procédé dual: on a évidemment:

Lemme 8.2. *Soit v la solution du P. N.:* $Dv = 0$ *dans* Ω, $\partial v/\partial \nu = h$ *sur* Γ *où* $h \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. *Soit u la solution du P. N.:* $Du = f$ *dans* Ω, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$; $\partial u/\partial \nu = 0$ *sur* Γ.

Alors on a

(8.8) $$\int_{\Omega} vf \, d\Omega = \int_{\Gamma} hu \, d\Omega \, .$$

(Si $b \equiv 0$, on fait les suppositions $\int_\Gamma h \, dS = \int_\Omega f \, d\Omega = \int_\Omega v \, d\Omega = \int_\Omega u \, d\Omega = 0$.) L'inégalité (8.3) *avec* (8.8) *donnent*

(8.9) $$|v|_{W_2^{(0)}(\Omega)} \leqq c|h|_{W_2^{(-1)}(\Gamma)}\,.$$

Tenant compte du lemme 3.3 (si $b \equiv 0$ et $g(1) = 0$, on peut évidemment trouver $g_t \to g$ dans $W_2^{(-1)}(\Gamma)$ de sorte que $g_t(1) = 0$) on obtient:

Théorème 8. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D l'opérateur* (2.1). *Soit u la solution du P. N.: $Du = f$ dans Ω, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $\partial u/\partial v = g$ sur Γ, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. (Si $b \equiv 0$, on demande $\int_\Omega f \, d\Omega + \int_\Gamma g \, dS = \int_\Omega u \, d\Omega = 0$.) Alors on a* (8.3).

Il existe précisément une transformation R, linéaire et continue de $W_2^{(-1)}(\Omega)$ dans $W_2^{(0)}(\Omega)$ telle que $g \in W_2^{(0)}(\Gamma) \Rightarrow R(g) = v$ soit la solution du P. N.: $Dv = 0$ dans Ω, $\partial v/\partial v = g$ sur Ω. (Si $b \equiv 0$, on demande $g(1) = \int_\Omega v \, d\Omega = 0$ et on définit R seulement sur le sousespace de $W_2^{(-1)}(\Omega)$ des éléments pour lesquels $g\,(1) = 0$.)

Remarque 8.1. On obtient comme conséquence immédiate de la note[12]): Soit V le sousespace de $(W_2^{(1)}(\Omega))'$ des éléments pour lesquels $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow g(\varphi) = 0$. Alors $V \subset W_2^{(-1)}(\Gamma)$ strictement, avec une topologie plus fine.

On a obtenu alors par théorème 8 solution du P. N. généralisé.

Soit maintenant v, u les solutions du P. N.:

$$Dv = 0 \text{ dans } \Omega\,, \quad \frac{\partial v}{\partial v} = h \text{ sur } \Gamma\,, \quad h \in W_2^{(0)}(\Gamma)$$

et

$$Du = 0 \text{ dans } \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = g \text{ sur } \Gamma\,, \quad g \in W_2^{(0)}(\Gamma)\,.$$

On a

(8.10) $$\int_\Gamma vg \, dS = \int_\Gamma hu \, dS\,.$$

On tire de (8.10), utilisant (8.3):

(8.11) $$|v|_{W_2^{(0)}(\Gamma)} \leqq c|h|_{W_2^{(-1)}(\Gamma)}\,.$$

(Si $b \equiv 0$, on suppose $h(1) = \int_\Gamma v \, dS = 0$.)

Alors on a:

Théorème 9. *La solution du P. N. génér. est une solution du P. D. génér. et on a* (8.11).

9. Régularité de la solution. Soit u la solution du P. N.: $Du = f$ dans Ω, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $\partial u/\partial v = g$ sur Γ, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. Supposons que l'opérateur D est défini dans une boule $K \supset \bar{\Omega}$. [13a]) L'inégalité (8.3) avec (7.5) nous donne $u \in W_{2n/(n-1)}^{(1)}(\Omega)$. En appliquant

(5.2) sur u_{st} (cfr. lemme 8.1), tenant compte de (3.2) et du lemme 3.2 et faisant les limites $t \to \infty$ et après $s \to \infty$ on obtient

(9.1) $$|u|^2_{W_2^{(1)}(\Gamma)} \leqq \left[|g|^2_{W_2^{(0)}(\Gamma)} + |u|_{W^{(1)}_{2n/(n-1)}(\Omega)} |f|_{W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)} + |f|^2_{W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)}\right].$$

La formule (7.5) avec (9.1) nous donne

(9.2) $$|u|_{W^{(1)}_{2n/(n-1)}(\Omega)} \leqq c\left[|f|_{W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)} + |g|_{W_2^{(0)}(\Gamma)}\right]$$ [cfr.: [13b])]

d'où aussi

(9.3) $$|u|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} \leqq c\left[|f|_{W^{(0)}_{2n/(n+1)}(\Omega)} + |g|_{W_2^{(0)}(\Gamma)}\right].$$ [13c])

Nous avons alors démontré:

Théorème 10. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $\bar{\Omega} \subset K$ où K est une boule. L'opérateur* D *soit défini par* (2.1) *dans K. Soit u la solution du P. N.*: $\mathrm{D}u = f$ *dans* Ω, $f \in W^{(0)}_{2n(n+1)}(\Omega)$, $\partial u/\partial \nu = g$ *sur* Γ, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. *Alors on a* (9.2) *et* (9.3).

Le procédé dual nous donne:

Théorème 11. *La transformation R du théorème* 8 *applique* $W_2^{(-1)}(\Gamma)$ *dans* $W^{(0)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$.

Soit $n \geqq 3$. On peut prendre pour l'espace $B' = W^{(0)}_{2n/(n+2)}(\Omega)$ (cfr. lemme 3.2). Théorème 10 nous donne:

Théorème 12. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $K \supset \bar{\Omega}$, *K une boule où est défini l'opérateur* (2.1), $n \geqq 3$.

Alors il existe la transformation M, linéaire et continue de $W^{(0)}_{2n/(n+3)}(\Omega)$ [14]) *dans* $W^{(0)}_{2n/(n-1)}(\Omega)$ *de sorte, que* $k \in W^{(0)}_{2n/(n+2)}(\Omega) \Rightarrow M(k) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *et donne la solution du P. N.*: $\mathrm{D}v = k$ *dans* Ω, $\partial v/\partial \nu = 0$ *sur* Γ. (*Si* $b \equiv 0$, *la transformation est définie seulement pour k avec propriété* $\int_\Omega k \, \mathrm{d}\Omega = 0$; *on demande* $\int_\Omega v \, \mathrm{d}\Omega = 0$.)

Remarque 9.1. Pour $n = 2$, on peut remplacer l'espace $W_p^{(0)}(\Omega)$, $p > 1$ par $W_1^{(0)}(\Omega)$, ou par l'espace des mesures.

A l'aide du lemme 8.1, on obtient

Théorème 13. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1). *Soit* Ω_s *la suite construite au lemme* 1.1. *Soit* $v \in W^{(2)}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\mathrm{D}v = 0$ *dans* Ω, $\lim\limits_{s \to \infty} |\partial v/\partial \nu|_{W_2^{(-1)}(\Gamma_s)} = 0$.

Alors $v = 0$ resp. $v = \text{const}$ si $b \neq 0$ resp. $b \equiv 0$.

[13c]) Si $b \equiv 0$, on demande pour (9.2) $\int_\Omega u \, \mathrm{d}\Omega = 0$, pour (9.3) $\int_\Gamma u \, \mathrm{d}S = 0$.
[14]) Pour $n = 3$ on prend $W_p^{(0)}(\Omega)$, $p > 1$, d'ailleurs quelconque.

Remarque 9.2. Pour illustrer la remarque 8.1 et généraliser le lemme 3.2 on se sert du lemme 1.3 pour $n - 1$.

$n = 2$: on peut prendre $\partial v/\partial \nu = g$ où $g \in W_1^{(0)}(\Gamma)$ ou est une mesure,

$n = 3$: on peut prendre $g \in W_p^{(0)}(\Gamma)$, $p > 1$,

$n > 3$: $g \in W_{[2(n-1)]/(n+1)}^{(0)}(\Gamma)$.

10. Problème de Newton. Soit u la solution du P. Nw.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $\partial u/\partial \nu + \sigma u = g$ sur Γ, $g \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. En vertu du lemme 1.4, on a $g - \sigma u \in W_2^{(0)}(\Gamma)$, alors u est solution du P. N.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $\partial u/\partial \nu = g - \sigma u$ sur Γ. Les inégalités (4.1) et (8.3) nous donnent:

Théorème 14. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D *l'opérateur* (2.1). *Soit* u *la solution du P. Nw.*: $\mathrm{D}u = f$ *dans* Ω, $\partial u/\partial \nu + \sigma u = g$ *sur* Γ.

Alors on a

(10.1) $$|u|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} \leqq c[|f|_{W_2^{(0)}(\Omega)} + |g|_{W_2^{(0)}(\Gamma)}] \,.$$

Le procédé dual. Soit u la solution du P. Nw.: $\mathrm{D}u = f$ dans Ω, $f \in W_2^{(0)}(\Omega)$, $\partial u/\partial \nu + \sigma u = 0$ sur Γ. Soit v la solution du P. Nw.: $\mathrm{D}v = 0$ dans Ω, $\partial v/\partial \nu + \sigma v = h$ sur Γ où $h \in W_2^{(0)}(\Gamma)$. Alors on obtient

(10.2) $$\int_\Omega vf \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma hu \,\mathrm{d}S \,.$$

L'inégalité (10.1), avec (10.2), entraîne

(10.3) $$|v|_{W_2^{(0)}(\Omega)} \leqq c|h|_{W_2^{(-1)}(\Gamma)} \,.$$

On est parvenu alors au théorème, tenant compte du lemme 3.3:

Théorème 15. *Il existe précisément une transformation* R *de* $W_2^{(-1)}(\Gamma)$ *dans* $W_2^{(0)}(\Omega)$, *linéaire et continue, de sorte que* $h \in W_2^{(0)}(\Gamma) \Rightarrow R(h) = v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *et* v *est la solution du P. Nw.*: $\mathrm{D}v = 0$ *dans* Ω, $\partial v/\partial \nu + \sigma v = h$ *sur* Γ.

Par le procédé utilisé plusieurs fois on obtient:

Théorème 16. *La solution du P. Nw. génér. est une solution du P. D. géner. et on a*

(10.4) $$|v|_{W_2^{(0)}(\Gamma)} \leqq c|h|_{W_2^{(-1)}(\Gamma)} \,.$$

Remarque 10.1. Les théorèmes analogues aux théorèmes du 9. sont une suite immédiate du fait que la solution du P. Nw. est solution du P. N. correspondant et la solution du P. Nw. génér. est solution du P. D. génér. correspondant.

Remarque 10.2. Pour les questions concernant la régularité de la solution du P. N. génér. et du P. Nw. génér. à l'intérieur, cfr. [13]. Les problèmes sur la convergence vers les conditions aux limites restent ouverts pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ tant bien pour P. N., P. Nw. que pour P. N. génér. et P. Nw. génér.

Remarque 10.3. En se servant du poids, défini sur Γ et à la croissance logarithmique, dans un nombre fini de points, on peut améliorer (6.9) pour $g = 0$ en remplaçant $|\partial u/\partial v|^2_{W_2^{(0)}(\Gamma)}$ par $\int_\Gamma (\partial u/\partial v)^2 \, p \, \mathrm{d}S$. Cela entraîne la possibilité de remplacer $|h|^2_{W_2^{(0)}(\Gamma)}$ dans (6.13) par $\int_\Gamma h^2 p^{-1} \, \mathrm{d}S$.

Bibliographie

[1] *S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg:* Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I. Comm. on P. a. Appl. Math., Vol. *XII*, n. 4, 1959, 623—727.

[2] *I. Babuška:* Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных главным образом в связи с теорией упругости, 1. Чех. мат. журнал *11*, 1961, 76—105.

[3a] *G. Cimmino:* Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tom *LXI*, 1937, XVI.

[3b] *P. Doktor:* Приближенное решение задачи Дирихле. A paraître dans Časopis pro pěst. mat., *89* (1964).

[4] *E. Gagliardo:* Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ricerche di matematica, vol. *VII*, 1958, 102—137.

[5] L. Hörmander: Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order. Comptes rendus du Douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves à Lund, 1953, 105—115.

[6] *J. Kadlec:* О некоторых свойствах решений эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралов дирихле. Časopis pro pěstování matematiky, *88*, 1963, 142—155.

[7] *J. L. Lions:* Quelques remarques sur les problèmes de Dirichlet et de Neumann. Semin. L. Schwartz, Paris, 1962.

[8] *E. Magenes, G. Stampacchia:* I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico. Annalli della Scuola Normale Superiore di Pisa, ser, III, vol. *XII*, fasc. III, 1958, 247—358.

[9] *J. Nečas:* О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Czechoslovak Mathematical Journal, *10*, 1960, 283—298.

[10] *J. Nečas:* Sur le problème de Dirichlet pour l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre du type elliptique. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol *XXXI*, 1961, 1, 198—231.

[11] *J. Nečas:* On the Regularity of Solutions of Second order Elliptic Partial Differential Equations with an Unbounded Dirichlet Integral. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. *9*, Num. 2, 1962, 134—144.

[12] *J. Nečas:* Об областях типа $\mathfrak{N}$. Czech. Math. Journal, *12*, 1962, 274—287.

[13] *L. Nirenberg:* Remarks on Strongly Elliptic Differential Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics *8*, 1955, 649—675.

[14] *L. E. Payne, H. F. Weinberger:* New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations. Pacific Journal of Mathematics, Vol. *8*, n. 3, 1958, 551—573.

[15] *F. Rellich:* Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u$ durch ein Randintegral. Math. Z. *46*, 1940, 635—646.

[16] *S. L. Sobolev:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

Резюме

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНИХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага-Нансы

Мы занимаемся в этой работе проблемой Дирихле, Неймана и Ньютона. При помощи равенства Реллиха получаются разные теоремы о регулярности решения, и дуальным подходом решены упомянутые проблемы в обобщенной постановке без условия ограниченности интеграла Дирихле. Границы областей удовлетворяют только условию Липшица.