Zdeněk Hustý

Некоторые колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения n-ого порядка $(n \geq 3)$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 27–35,36–37,38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100599

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

НЕКОТОРЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ОГО ПОРЯДКА ($n \geqq 3$)

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 18/1 1962 г)

В работе приводится каноническая форма уравнения n-ого порядка, при помощи которой выведены некоторые колебательные свойства, известные для уравнений третьего и четвертого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^{(n-i)} = 0\,, \tag{1}$$

где функции $a_i^{(n-i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в интервале $J \equiv \langle \xi, \infty)$.

При помощи преобразования $z = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1 \, \mathrm{d}t\right)$, $x_0 \in J$ можно (1) привести к виду

$$y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0\,, \tag{2}$$

где функция $A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1'$ имеет непрерывную производную порядка $n - 2$.

Введя новые обозначения $A = A_2$, $\omega_k = A_k - f_k(A)$, $k = 3, 4, \ldots, n$ (где $f_k(A)$ является итерированным полиномом размерности k), получим каноническую форму уравнения (2)

$$I_n(y, A) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i y^{(n-i)} = 0\,, \tag{3}$$

где итерированные семиинварианты ω_i $(i = 3, 4, \ldots, n)$ имеют непрерывные производные порядка $n - i$. В случае $\omega_i = 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$ является уравнение

$$I_n(y, A) = 0 \tag{4}$$

итерированным уравнением n-ого порядка, фундаментальная система решения которого образована функциями

$$u^{n-i}, v^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

причем u, v являются независимыми интегралами уравнения

$$u'' + \frac{3}{n+1} Au = 0, \tag{6}$$

см. [5].

Замечание 1. Уравнение (2) можно считать пертурбационным итерированным уравнением (4). Заметим еще, что интегралы уравнения (6) имеют непрерывные производные порядка n.

Замечание 2. Как простое применение предыдущих предположений приведем следующие утверждения:

Пусть справедливы предположения:

a) $\int^{\infty} |\omega_i| \, \mathrm{d}x < \infty$, $i = 3, 4, \ldots, n$; b) *Функция* A *обладает свойством* $(O_{01\ldots\overline{n-3}})$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} |A + a| = 0$, $a = \mathrm{konst} < 0$, d) $\int^{\infty} |A + a| \, \mathrm{d}x < \infty$ *или* $\int^{\infty} |A'| \, \mathrm{d}x < \infty$. *Тогда уравнение* (3) *обладает свойством* $(O_{01\ldots\overline{n-1}})$.

Замечание 3. a) Мы говорим, что какая-то функция $f(x)$ обладает свойством

(O_i), если $|f^{(i)}(x)| \leqq M$ для всех $x \in J$;

$(O_{01\ldots i})$, если $\sum\limits_{r=0}^{i} |f^{(r)}(x)| \leqq M$, для всех $x \in J$;

$(o_{01\ldots i})$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \ldots, \lim\limits_{x\to\infty} f^{(i)}(x) = 0$,

где $M = \mathrm{konst} > 0$ и i является целым неотрицательным числом.

b) Мы говорим, что дифференциальное уравнение обладает некоторым из свойств замечания 3a), если каждое его решение обладает тем же свойством.

Доказательство. Если справедливо предположение c) и одно из предположений d), то уравнение (6) обладает свойством (O_{01}); см. [1] стр. 56 или 133.

Если уравнение (6) обладает свойством (O_{01}) и если справедливо предположение b), то уравнение (4) обладает свойством $(O_{01\ldots\overline{n-1}})$.

Если уравнение (4) обладает свойством $(O_{01\ldots\overline{n-1}})$ и справедливо предположение a), то уравнение (3) обладает свойством $(O_{01\ldots\overline{n-1}})$; см. [1] стр. 55, Т. 6.

Лемма 1. *Пусть U, V являются произвольными функциями переменной x, которые имеют непрерывные производные n-ого порядка. Тогда k-ая производная* *функции* $y = U^{n-2}V$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ *дана формулой*

$$(7)\qquad y^{(k)} = (n-2)(n-3)\dots(n-k)\,U^{n-k-2}[(n-k-1)(U')^k V + kU(U')^{k-1}V'] + U^{n-k-1}g_k(x),$$

где функция $g_k(x)$ *имеет непрерывную производную порядка* $n-k$. *Если* $U(a) = U''(a) = 0$, *то* $g_k(a) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Доказательство. Так как $y' = (n-2)\,U^{n-3}U'V + U^{n-2}V'$,

$$y'' = (n-2)\,U^{n-4}[(n-3)\,U'^2V + 2UU'V'] + U^{n-3}[(n-2)\,U''V + UV''],$$

справедлива формула (7) для $k = 1, 2$, причем $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = (n-2)\,U''V + UV''$. Так как функции U, V имеют непрерывные производные порядка n, имеет функция $g_2(x)$ непрерывную производную порядка $n-2$. Если $U(a) = U''(a) = 0$, то $g_2(a) = 0$.

Дифференцированием формулы (7) получим после преобразования следующее отношение

$$y^{(k+1)} = (n-2)(n-3)\dots(n-k-1)\,U^{n-k-3}[(n-k-2)(U')^{k+1}V + (k+1)\,U(U')^k V'] + U^{n-k-2}g_{k+1}(x),$$

где

$$g_{k+1}(x) = k(n-2)(n-3)\dots(n-k)\,[(n-k-1)(U')^{k-1}U''V + (k-1)\,U(U')^{k-2}U''V' + U(U')^{k-1}V''] + (n-k-1)\,U'g_k(x) + Ug_k'(x).$$

Если предположить, что утверждение леммы 1. справедливо для k-той производной функции y, то это утверждение справедливо также для производной порядка $k+1$, так как функция $g_{k+1}(x)$ имеет производную порядка $n-k-1$. Если $U(a) = U''(a) = 0$, то также $g_{k+1}(a) = 0$.

Следствие. *Производная* k*-ого порядка* ($k = 1, 2, \dots, n-1$) *функции* $y = U^{n-1}$ *дана формулой* $y^{(k)} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)\,U^{n-k-1}(U')^k + U^{n-k-1}g_k(x)$. *Если* $U(a) = 0$, *то* $g_k(a) = 0$.

Замечание 4. При помощи леммы 1 можно легко доказать формулу

$$(8)\qquad W_n[u, v] = (W[u, v])^{[n(n-1)]/2}\prod_{k=1}^{n-1} k!\,,$$

где $W_n[u, v]$ – определитель Вронского функций (5), причем $W_2[u, v] = W[u, v]$.

Доказательство. Возьмем какой-либо интеграл U уравнения (6), независимый от u, который в произвольной точке $a \in J$ удовлетворяет начальному условию $U(a) = 0$, и пусть $v = c_1 u + c_2 U$, $c_1, c_2 = \text{konst}$. Тогда, с учетом леммы 1,

$$W_n[u, v] = W_n[u, c_1 u + c_2 U] =$$
$$= W_n[u, c_2 U] = W_n[u(a), c_2 U(a)] = [c_2 u(a)\, U'(a)]^{[n(n-1)]/2} \prod_{k=1}^{n-1} k!\,;$$

так как определитель Вронского $W_n[u, v] = \text{konst}$, можно его значение вычислить в точке a. Так как $W_2[u, v] = c_2 W[u, U] = c_2 u(a)\, U'(a)$, справедливо (8).

Лемма 2. *Пусть u, v — независимые интегралы уравнения (6), определитель Вронского которых $W[u, v] = 1$. Тогда функция переменной x*

$$K(t, x) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}^{n-1},$$

где t — параметр, является решением уравнения (4), которое удовлетворяет начальному условию $K_x^{(i)}(x, x) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, $K_x^{(n-1)}(x, x) = 1$.

Лемма 2 вытекает непосредственно из леммы 1 (см. следствие).

Лемма 3. *Пусть u, v являются независимыми интегралами уравнения (6), определитель Вронского которых $W[u, v] = 1$. Тогда каждый интеграл уравнения (3) удовлетворяет уравнению*

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i(t)\, y^{(n-i)}(t) \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}^{n-1} \mathrm{d}t, \tag{9}$$

где z является решением уравнения (4), которое удовлетворяет в точке $a \in J$ тем же начальным условиям как y.

Доказательство. Возьмем уравнение

$$I_n(y, A) = \varphi(x), \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ является произвольной непрерывной функцией. По формуле Коши (см. напр. [3], стр. 238) и леммы 2 является функция $\int_a^x \varphi(t)\, K(t, x)\, \mathrm{d}t$ частным решением уравнения (10). По известной теореме, см. напр. [1], стр. 220, каждое решение y уравнения (10) удовлетворяет уравнению

$$y(x) = z(x) + \int_a^x \varphi(t)\, K(t, x)\, \mathrm{d}t, \tag{11}$$

где z является решением уравнения (4), которое удовлетворяет в точке a тем же начальным условиям как y. Если положим в (10)

$$\varphi(x) = -\sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i(x)\, y^{(n-i)}(x),$$

то из формулы (11) вытекает сразу же утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Если интеграл y уравнения* (4) *удовлетворяет в точке $a \in J$ начальным условиям $y^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $0 \leqq k \leqq n - 2$, то тогда и только тогда можно записать его в виде $y = \sum_{i=1}^{n-k-1} c_i u^{n-i} v^{i-1}$, $c_i = \text{konst}$, где u, v являются независимыми интегралами уравнения* (6), *причем $u(a) = 0$.*

Доказательство леммы 4 очевидно.

Лемма 5. *Пусть интеграл y уравнения* (4) *имеет в точке a корень. Тогда его можно записать в виде*

$$y = u y_{n-1}\,, \tag{12}$$

где u является решением уравнения (6), *причем $u(a) = 0$ и y_{n-1} является подходящим интегралом итерированного уравнения $(n - 1)$-ого порядка $I_{n-1}(y, A) = 0$, $n \geqq 3$.*

Доказателство. Если справедливы предположения леммы 5, то по лемме 4

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} c_i u^{n-i} v^{i-1}\,, \quad \text{где} \quad u(a) = 0,\ c_i = \text{konst}\,. \tag{13}$$

Уравнение (13) можно записать в виде (12), где $y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i u^{n-1-i} v^{i-1}$ является решением итерированного уравнения $(n - 1)$-ого порядка $I_{n-1}(y, A) = 0$, см. [5].

Замечание 5. Если мы скажем, что две (и больше) разные точки сопряжены, то этим разумеем, что они сопряжены в отношении к уравнению (6), т. е. являются корнями какого-то решения уравнения (6). Скажем ли, например, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_j$ несопряжены (они не должны быть взаимно разными), разумеется этим, что никакие две разные точки, выбранные из точек $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_j$, не являются сопряженными в отношении к уравнению (6).

Следствие леммы 5. *Интеграл y уравнения* (4) *может иметь наиболее $(n - 1)$ несопряженных корней. Если он имеет точно $k \leqq n - 1$ несопряженных корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то его можно записать в виде $y = u_1 u_2 \ldots u_k y_{n-k}$, где y_{n-k} является решением итерированного уравнения порядка $n - k$, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ являются решениями уравнения* (6), *причем $y_1 = 1$, $u_i(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Отсюда следует, что $\prod_{i=1}^{n} u_i$ является решением уравнения (4), *где u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются произвольными решениями уравнения* (6).

Теорема 1. *Итерированное уравнение* (4) *четного порядка будет колебательным тогда и только тогда, если уравнение* (6) *колебательно.*

Замечание 6. Дифференциальное уравнение называется колебательным, если все его интегралы в интервале J колеблются. В обратном случае мы говорим, что оно является неколебательным. Неколеблющимся решением считаем каждое решение, которое имеет в J конечное число нулей.

Доказательство теоремы 1. Пусть дифференциальное уравнение (6) колебательно и u, v являются его независимыми интегралами. Покажем, что каждый интеграл дифференциального уравнения (4) четного порядка, который можно записать в виде $y = \sum_{i=1}^{n} c_i u^{n-i} v^{i-1}$, $c_i = \text{konst}$, является колеблющимся. Если $c_n = 0$, то утверждение теоремы 1 очевидно. Пусть $c_n \neq 0$. Ввиду леммы 4 достаточно показать, что интеграл y обладает хоть одним нулем. Обе функции $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i u^{n-i} v^{i-1}$, $\bar{\bar{y}} = c_n v^{n-1}$ являются колеблющимися интегралами уравнения (4). Среди нулей функции $\bar{y}$ находятся также нули функции u. Обозначим $x_0, x_1 \in J$ два смежных корня функции u. Интеграл $\bar{\bar{y}}$ имеет только $(n-1)$-кратные корни, которые совпадают с нулями функции v. Ввиду линейной независимости интегралов u, v, вытекает отсюда (по теореме Штурма), что $v(x_0)\, v(x_1) < < 0$, так что и $0 > \bar{\bar{y}}(x_0)\, \bar{\bar{y}}(x_1) = y(x_0)\, y(x_1)$, так как $n - 1$ является нечетным числом. Отсюда следует, что функция y имеет в интервале (x_0, x_1) хотя бы один корень.

Если, наоборот, уравнение (4) колебательно, всякий интеграл u уравнения (6) является колеблющимся, ибо функция u^{n-1} по предположению не имеет в интервале J конечного числа корней.

Теорема 2. *Интеграл y итерированного уравнения* (4) *нечетного порядка является колеблющимся тогда и только тодга, если он имеет по крайней мере один корень и уравнение* (6) *колебательно.*

Доказательство. Если интеграл y итерированного уравнения (4) нечетного порядка обладает корнем a, то его по лемме 5 можно записать в виде (12). Если уравнение (6) колебательно, то интеграл y является колеблющимся.

Пусть, наоборот, интеграл y является колеблющимся. Если точка a является его корнем, то его можно записать в виде (12), так что хотя бы один из интегралов u, y_{n-1} является колеблющимся. Отсюда следует, с учетом теоремы 1, что уравнение (6) колебательно, так как y_{n-1} является решением итерированного уравнения четного порядка.

Замечание 7. Итерированное уравнение (4) нечетного порядка обладает всегда неколеблющимся интегралом, у которого нет ни одного нуля, например, $y = u^{n-1} + v^{n-1}$, где u, v являются независимыми интегралами уравнения (6).

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее следствие:

Следствие. *Итерированное уравнение* (4) *необладает ни одним колеблющимся интегралом тогда и только тогда, если уравнение* (6) *имеет по крайней мере один неколеблющийся интеграл.*

Теорема 3. *Пусть уравнение* (6) *колебательно и* $\omega_n \geqq 0$. *Тогда справедливо следующее утверждение*:

a) *Если n-четное, то уравнение*

$$I_n(y, A) + \omega_n y = 0 \tag{13}$$

является колебательным.

b) *Если n-нечетное, то каждый интеграл уравнения* (13), *который имеет по крайней мере один корень, является колеблющимся.*

Доказательство. a) Предположим, что утверждение a) теоремы 3 несправедливо, так что существует интеграл y уравнения (13), который для $x \geqq a$ не имеет нулей и пусть, напр., $y > 0$ для $x \in \langle a, \infty)$. Функция y удовлетворяет для (9) уравнению

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x y(t)\,\omega_n(t)\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x)\end{vmatrix}^{n-1} \mathrm{d}t\,, \tag{14}$$

где z является по теореме 1 колеблющимся интегралом уравнения (4), который удовлетворяет в точке a тем же начальным условиям как y, и u, v-совершенно произвольные независимые интегралы уравнения (6), для которых $W[u, v] = 1$. Возьмем теперь v так, чтобы $v(a) = 0$. Пусть $b > a$ — соседний нуль функции v, так что $v \neq 0$ для $x \in (a, b)$. Интеграл z имеет в интеграле (a, b) хотя бы один корень [см. доказательство теоремы 1].

Пусть x_0 — первый нуль функции z в интервале (a, b), так что $z \neq 0$ для $x \in \langle a, x_0)$. Возьмем теперь u так, чтобы $u(x_0) = 0$. Функция $u \neq 0$ в интегрвале $\langle a, x_0)$, и предположим, что она положительна. Тогда, в силу известных свойств интегралов уравнения (6), $u'(x_0) < 0$. Так как $1 = W[u(x_0), v(x_0)] = -u'(x_0)$. $v(x_0)$, то $v(x_0) > 0$. Если теперь подставим подобранные функции u, v в (14) и вычислим значение функции y в точке x_0, приходим к противоречию, так как

$$0 < y(x_0) = -\frac{1}{(n-1)!}\int_a^{x_0} y(t)\,\omega_n(t)\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x_0) & v(x_0)\end{vmatrix}^{n-1} \mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{(n-1)!}\,v^{n-1}(x_0)\int_a^{x_0} y(t)\,\omega_n(t)\,u^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \leqq 0\,.$$

b) Предположим, что существует интеграл y уравнения (13), который имеет в точке a корень и направо от точки a не имеет ни одного нуля, и пусть, напр., $y > 0$ для $x > a$. Функция y удовлетворяет уравнению (14), из которого заключаем, что интеграл z не имеет направо от точки a никакого корня, так как ни для какого $x > a$ не может быть

$$0 < y(x) = -\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x y(t)\,\omega_n(t)\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x)\end{vmatrix}^{n-1} \mathrm{d}t \leqq 0\,.$$

Однако, такой результат противоречит теореме 2, по которой интеграл z является колеблющимся, так как в точке a обладает корнем.

Замечание 8. Утверждение a) справедливо без изменений в интервале $(-\infty, \xi\rangle$. Утвеждение b) справедливо в интервале $(-\infty, \xi\rangle$ при условии $\omega_n \leqq 0$.

Лемма 6. *Пусть u, v — независимые интегралы уравнения (6) и пусть t, x — произвольные числа из интервала J. Уравнение*

$$G(t, x) = \begin{vmatrix} u'(t) & v'(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix} = 0$$

справедливо тогда и только тогда, если x является корнем какого-либо решения уравнения (6) *и t корнем его производной.* См. [2], стр. 204.

Замечание 9. Если в уравнении (6) $A \leqq 0$ для всех $x \in J$, то $G(t, x) \neq 0$. Если $W[u, v] > 0$, то $G(t, x) < 0$ для всех $t, x \in J$.

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения леммы* 6. *Уравнение*

$$F(t, x) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix} = 0$$

справедливо тогда и только тогда, если числа t, x являются корнями какого-либо решения уравнения (6). См. [2], стр. 204.

Замечание 10. Если в уравнении (6) $A \leqq 0$ для всех $x \in J$, то $F(t, x) = 0$ тогда и только тогда, если $x = t$. Если $W[u, v] > 0$, то функция $F(t, x)$ для всех $t \in \langle \xi, x)$ положительна и для всех $t \in (x, \infty)$ отрицательна. Согласно лемме 6 она убывает по отношению к t и возрастает по отношению к x.

Теорема 4. A) *Пусть выполнены следующие предположения*:

$$(15) \qquad n \text{ четное}, \quad A \leqq 0, \ \omega_n - n\omega'_{n-1} \leqq 0, \ \omega_{n-1} \leqq 0[\geqq 0] .$$

Тогда каждый интеграл y уравнения

$$(16) \qquad I_n(y, A) + n\omega_{n-1}y' + \omega_n y = 0 ,$$

который удовлетворяет начальным условиям

$$(17) \qquad y^{(i)}(a) = 0, \ i = 0, 1, \ldots, n-3, \ y^{(n-2)}(a)\, y^{(n-1)}(a) \geqq 0[\leqq 0]$$

не имеет направо [налево] от точки a ни одного нуля.

B) *Пусть выполнены следующие предположения*:

$$(18) \qquad n \text{ нечетное}, \quad A \leqq 0, \ \omega_n - n\omega'_{n-1} \leqq 0[\geqq 0], \ \omega_{n-1} \leqq 0 .$$

Тогда каждый интеграл y уравнения (16), *который удовлетворяет начальным условиям* (17), *не имеет направо [налево] от точки a ни одного нуля.*

Докажем только первое утверждение одновременно в обоих случаях A), B). Второе утверждение доказывается аналогично.

Предположим противное, что интеграл y уравнения (16), который удовлетворяет начальным условиям (17) и удовлетворяет, согласно леммам 3,4, уравнению

$$(19)\quad y(x) = u^{n-2}(x)\,w(x) - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x [n\omega_{n-1}(t)\,y'(t) + \omega_n(t)\,y(t)] \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}^{n-1} \mathrm{d}t$$

[где u, v являются независимыми интегралами уравнения (6), $w = c_1u + c_2v$, причем $u(a) = 0$, $W[u, v] = 1$], имеет направо от точки a нуль b, и пусть, напр., $y > 0$ для $x \in (a, b)$. Тогда $y^{(n-2)}(a) \geqq 0$, $y^{(n-1)}(a) \geqq 0$, так что по лемме 1

$$(n-2)!\,[u'(a)]^{n-2}\,w(a) \geqq 0\,, \quad (n-1)!\,[u'(a)]^{n-2}\,w'(a) \geqq 0\,.$$

Если n-четное число, то $w(a) \geqq 0$, $w'(a) \geqq 0$ и функция w и, следовательно, также функция $u^{n-2}w$ положительна для всех $x > a$. Если n-нечетное, то надо рассматривать два случая:

α) $u'(a) > 0$; тогда обстоятельства одинаковы как в случае четного n. β) $u'(a) < 0$; тогда $w(a) \leqq 0$, $w'(a) \leqq 0$ и функции u, v отрицательны для всех $x > a$. Следовательно, и в этом случае функция $u^{n-2}w$ положительна для всех $x > a$. Если уравнение (19) привести к виду

$$(20)\quad y(x) = u^{n-2}(x)\,w(x) - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x y(t) \left\{[\omega_n(t) - n\omega'_{n-1}(t)] \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}^{n-1} - \right.$$
$$\left. - n(n-1)\,\omega_{n-1}(t) \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}^{n-2} \begin{vmatrix} u'(t) & v'(t) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix} \right\} \mathrm{d}t\,,$$

то можно легко установить, что оно в точке b несправедливо, так как по предположению (15) или (18) и по леммам 6, 7 интеграл в правой части уравнения (20) в точке b неотрицателен, и $u^{n-2}(b)\,w(b) > 0$.

Следствия теоремы 4. a) *Пусть n является четным [нечетным] числом и пусть справедливо одно из предположений* (15), [(18)]. *Тогда каждый интеграл уравнения* (16) *удовлетворяет только в одной точке a одному из начальных условий*

$$(21)\qquad y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2\,;$$

$$(22)\qquad y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, (n-3), (n-1)\,.$$

b) *Пусть n является четным [нечетным] числом и пусть в уравнении* (16) *выполнены следующие предположения*:

$$A \leqq 0,\ \omega_{n-1} = 0,\ \omega_n \leqq 0,\ [A \leqq 0,\ \omega_n - n\omega'_{n-1} = 0,\ \omega_{n-1} \leqq 0]\,.$$

Тогда каждый интеграл уравнения (16), *который в точке a удовлетворяет одному из начальных условий* (21) *или* (22), *не обладает, кроме точки a, никаким другим корнем. Каждый интеграл уравнения* (16) *имеет не более двух* $(n-2)$*-кратных корней. Если* $a < b$ *являются двумя* $(n-2)$*-кратными корнями интеграла y уравнения* (16), *то* $y^{(n-2)}(a)\, y^{(n-1)}(a) < 0$, $y^{(n-2)}(b)\, y^{(n-1)}(b) > 0$. *Решение не имеет налево* [*направо*] *от точки a* [b] *ни одного нуля.*

Литература

[1] *Р. Беллман:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений Москва 1954.

[2] *О. Борувка:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка. Чех. мат. ж. *3* (*78*), 1953, 199—225.

[3] *V. V. Stěpanov:* Kurs diferenciálních rovnic. Praha 1950.

[4] *З. Густы:* Колебательные свойства однородного дифференциального уравнения 4-го порядка. Чех. мат. ж. *8*(*83*) 1958, 62—75.

[5] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno. (Im Druck.)

Zusammenfassung

EINIGE OSZILLATORISCHE EIGENSCHAFTEN HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNG n-TER ORDNUNG ($n \geqq 3$)

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

Die Differentialgleichung

$$z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^{(n-1)} = 0\,, \tag{1}$$

wo die Funktionen $a_i^{(n-i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ im Intervall $J \equiv \langle \xi, \infty)$ stetig sind, können wir durch die Transformation $z = e^{-\int a_1 dx} \,.\, y$ auf halbkanonische Form

$$y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0 \tag{2}$$

überführen, wo die Funktion $A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1'$ die stetige Ableitung der Ordnung $(n-2)$ hat. Wenn wir neue Bezeichnungen $A = A_2$, $\omega_k - A_k - f_k(A)$, $k = 3, 4, \ldots, n$ [wo $f_k(A)$ iteriertes Polynom der Dimension k ist] einführen, erhalten wir die kanonische Form der Gleichung (2) $I_n(y, A) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i y^{(n-i)} = 0$, wo die iterierten Semiinvarianten ω_i $(i = 3, 4, \ldots, n)$ stetige Ableitung der Ordnung $(n-i)$ haben.

Im Falle $\omega_i \equiv 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$, ist die Gleichung

$$I_n(y, A) = 0 \tag{I}$$

iteriert und ein Fundamentalsystem ihrer Lösungen besteht aus den Funktionen $u^{n-i}v^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wo u, v unabhängige Integrale der Gleichung

$$u'' + \frac{3}{n+1} Au = 0 \tag{II}$$

darstellen. Die iterierte Gleichung (I) hat diese Eigenschaften:

1. Wenn die Lösung y der Gleichung (I) die Anfangsbedingungen $y^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $0 \leqq k \leqq n - 2$ im Punkte a erfüllt, dann und nur dann können wir sie in der Form $y = \sum_{i=1}^{n-k-1} c_i u^{n-i} v^{i-1}$, $c_i =$ Konst., schreiben, wo u, v unabhängige Integrale der Gleichung (II) sind, wobei $u(a) = 0$.

2. Wenn die Lösung y der Gleichung (I) im Punkte a eine Nullstelle hat, können wir sie in der Form $y = uy_{n-1}$ schreiben, wo u die Lösung der Gleichung (II) ist, wobei $u(a) = 0$ und y_{n-1} eine geeignete Lösung der iterierten Gleichung $(n - 1)$-ter Ordnung $I_{n-1}(y, A_2) = 0$, $n \geqq 3$, ist.

3. Die Lösung y der Gleichung (I) kann höchstens $(n - 1)$ nichtkonjugierte Nullstellen haben. Wenn sie genau $k \leqq n - 1$ nichtkonjugierte Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ hat, können wir sie in der Form $y = u_1 u_2, \ldots, u_k y_{n-k}$ schreiben, wo y_{n-k} die Lösung der iterierten Gleichung der Ordnung $n - k$ ist und $u_1, u_2, \ldots, u_k$ die Lösungen der Gleichung (II) sind, wobei $y_1 = 1$, $u_i(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

4. Die iterierte Gleichung (I) der geraden Ordnung ist oszillatorisch dann und nur dann, wenn die Gleichung (II) oszillatorisch ist.

5. Die Lösung y der iterierten Gleichung (I) der ungeraden Ordnung oszilliert dann und nur dann, wenn sie wenigstens eine Nullstelle hat und die Gleichung (II) oszillatorisch ist. Die iterierte Gleichung der ungeraden Ordnung hat immer ein nichtoszillierendes Integral.

Satz 1. *Es sei die Gleichung* (II) *oszillatorisch und* $\omega_n \geqq 0$. *Dann gelten folgende Behauptungen*:

a) *Wenn n eine gerade Zahl ist, dann ist die Gleichung*

$$I_n(y, A) + \omega_n y = 0 \tag{3}$$

oszillatorisch.

b) *Wenn n eine ungerade Zahl ist, dann oszilliert jede Lösung der Gleichung* (3), *die wenigstens eine Nullstelle hat.*

Satz 2. a) *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt*:
1. *n ist eine gerade Zahl.* 2. $A \leqq 0$, $\omega_n - n\omega'_{n-1} \leqq 0$, $\omega_{n-1} \leqq 0$ $[\geqq 0]$. *Dann hat jede Lösung y der Gleichung*

$$I_n(y, A) + n\omega_{n-1} y + \omega_n y = 0\,, \tag{4}$$

welche die Anfangsbedigungen

$$(5) \qquad y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-3\,; \quad y^{(n-2)}(a)\, y^{(n-1)}(a) \geqq 0\,[\leqq 0]$$

erfüllt, keine Nullstelle rechts [*links*] *von dem Punkte a.*

b) *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt*:

3. *n ist eine ungerade Zahl.* 4. $A \leqq 0$, $\omega_n - n\omega'_{n-1} \leqq 0\,[\geqq 0]$, $\omega_{n-1} \leqq 0$. *Dann hat jede Lösung y der Gleichung* (4), *welche die Anfangsbedingungen* (5) *erfüllt, keine Nullstelle rechts* [*links*] *vom Punkte a.*

Folgerung 1. *Es sei n eine gerade* [*ungerade*] *Zahl und es gelte eine der Voraussetzungen* 2 [4] *des Satzes* 2. *Dann erfüllt jede Lösung der Gleichung* (4) *höchstens in einem Punkte a eine von den Anfangsbedigungen*

$$(6_1) \qquad y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

oder

$$(6_2) \qquad y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-3,\; n-1\,.$$

Folgerung 2. *Es sei n eine gerade* [*ungerade*] *Zahl und seien für die Gleichung* (4) *folgende Voraussetzungen erfüllt:* $A \leqq 0$, $\omega_{n-1} = 0$, $\omega_n \leqq 0$ [$A \leqq 0$, $\omega_n - n, \omega'_{n-1} = 0$, $\omega_{n-1} \leqq 0$.] *Dann hat jede Lösung der Gleichung* (4), *die im Punkte a eine von den Anfangsbedigungen* (6) *erfüllt, keine andere Nullstelle ausser Punkte a und bezitzt höchstens zwei* $(n-2)$-*fache Nullstellen. Wenn* $a < b$ *zwei* $(n-2)$-*fache Nullstellen der Lösung y der Gleichung* (4) *sind, dann gilt* $y^{(n-2)}(a) \,.\, y^{(n-1)}(a) < 0$, $y^{(n-2)}(b) \,.\, y^{(n-1)}(b) > 0$. *Die Lòsung y hat keine Nullstelle links* [*rechts*] *von dem Punkte a* [*b*].