ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
*Математический институт Чехословацкой Академии наук*
Т. *14* (*89*) ПРАГА 20. III. 1964 г., No 1

# LES VARIÉTÉS DE KÖNIG GÉNÉRALISÉES

BOHUMIL CENKL, Praha
(Reçu le 23 octobre 1961)

Pour les variétés de König généralisées, à connexion projective, on trouve le tenseur de courbure-torsion et l'on donne la signification géométrique de annulation de ce tenseur et de ses sous-tenseurs. Le travail présente aussi l'appareil de calcul pour l'étude de ces variétés.

Pour une variété de König nous entendons une variété $V_N$ qui est en principe la réunion de sous-espaces linéaires locaux $S_N(\xi)$ des associés $\xi^\nu$ d'une variété $X_n$ à $n$ dimensions; le groupe des transformations linéaires de l'espace local $S_n(\xi)$ étant tel que ses coefficients sont fonctions des paramètres de la variété $X_n$. On a déjà étudié les variétée de ce type aux espaces locaux $S_n(\xi)$ projectifs, surtout pour le cas où $N = n$, (on les appelle variétés à connexion projective). Si les espaces locaux sont supposés projectifs et $N \gtreqless n$, les variétés de König sont étudiés p.ex. dans le travail [6], mais pour le cas où $N = n^r - 1$ ($r$-entier positif) seulement. Sur les variétés de ce type, on a introduit one connexion; on a étudié les sous-variétés de ces variétés à connexion et l'on a développé l'appareil tensoriel pour ces études. Lorsqu'on suppose que le groupe des transformations linéaires de l'espace local ne dépend pas des transformations des paramètres sur la variété $X_n$, que l'on ne se donne aucune relation entre la dimension $n$ de la variété $X_n$ et la dimension $N$ de l'espace local $S_N(\xi)$ et que chaque espace local $S_N(\xi)$ contient un sous-espace $S_p(\xi)$ à $p$ dimensions, nous parlons de variétés de König généralisées (voir [11]). Pour la généralisation ainsi définie de la variété de König à connexion affine $A^n_{pN}$ on a établi dans [11] le calcul tensoriel, c'est-à-dire on a généralisé la notion de tenseur, de dérivée covariante de tenseurs d'un certain type et l'on a trouvé le tenseur de courbure dont l'annulation a été caractérisée géométriquement. Dans la première partie du présent travail, nous développons la théorie des variétés de König généralisées à connexion projective $P^n_{pN}$; dans la deuxième partie nous montrons leurs rapports à $A^n_{pN}$. La connexion de la variété $P^n_{pN}$ est donnée d'une part par le système d'équations différentielles (voir [11]), pris pour le point de départ; on travaille ensuite avec l'expression explicite de l'homographie existant entre les espaces locaux. On introduit les notions de tenseur généralisé, appelé agrégat de caractéristique générale, et de sa dérivée covariante. Pour qu'il soit possible de définir la dérivée covariante de l'agrégat de caractéristique générale, on a défini sur la variété $X_n$ une connexion affine auxiliaire. On trouve l'agrégat de courbure-torsion et l'agrégat de torsion qui représente une généralisation du tenseur de torsion connu pour les variété à connexion affine. On trouve en même temps la signification géométrique de l'annulation de ces agrégats. Pour la variété $\tilde{A}^n_{pN}$ les espaces locaux sont des réunions linéaires de l'espace tangent à la variété $X_n$ et d'un espace affine à $N - n$ dimensions, choisi arbitrairement dans chaque point. Cela rend possible que la connexion affine auxiliaire de la variété $X_n$ soit la connexion induite sur cette variété considéré comme sous-variété de $A^n_{pN}$. Si nous renonçons à ces hypothéses, c'est-à-dire si nous considérons les espaces locaux affines comme des espaces affines généraux, nous retrouvons le cas étudié dans le travail [11]; l'appareil de calcul ne change pas dans ce cas-là. Pour les cas particuliers de $P^2_{03}$, $P^2_{04}$, $P^2_{13}$, $A^2_{03}$ on a établi dans les travaux [3], [4], [11], [5] une théorie géométrique des variétés mentionnées. D'autres problèmes ayant rapport à la théorie de ces variétés sont donnés dans [11].

Pour les variétés $A^n_{pN}$ on donne le tenseur de courbure-torsion et la signification géométrique de son annulation et de celle de ses sous-tenseurs (de courbure, de torsion ponctuelle, de torsion directionnelle). Les rapports des résultats ainsi obtenus au calcul tensoriel classique sont immédiats si l'on tient compte du fait que le présent travail généralise et complète les résultats de [11] où l'on a cependant étudié ces rapports en détails.

## I. NOTION DE VARIÉTÉ $P^n_{pN}$ A CONNEXION PROJECTIVE — CALCUL TENSORIEL GÉNÉRALISÉ

**1.** Soit donnée une variété ponctuelle $X_n$ à $n$ dimensions; au voisinage de chacun de ses points ayons des coordonnés ponctuelles admettant la transformations[1])

(1.1) $$\xi^{\nu'} = \xi^{\nu'}(\xi) \quad {}^{2})$$

avec le jacobien

(1.2) $$\Delta = \text{Dét}\,|\partial_\mu \xi^{\nu'}| \neq 0\,.$$

A chaque point $\xi^\nu$ de la variété $X_n$ soit associé un espace projectif $P_N(\xi)$ à $N$ dimensions, et dans chacun de ces espaces un sous-espace $P_p(\xi)$ $(0 \leqq p \leqq N)$, appelé centre de l'espace local $P_N(\xi)$. Dans l'espace $P_N(\xi)$ ayons un repère ponctuel

(1.3) $$A_0, A_1, \ldots, A_N$$

tel que

(1.4) $$A_0, A_1, \ldots, A_p$$

[1]) Toutes les fonctions que nous considérons ici sont supposées appartenir à $C^\infty$.

[2]) Dans la suite, on aura toujours, sauf mention explicite du contraire:

$$a, b, c, \ldots = 0, 1, \ldots, N\,; \quad A, B, \ldots = 0, 1, \ldots, p\,; \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, N\,;$$
$$\alpha, \beta, \varkappa, \lambda, \nu, \ldots = 1, 2, \ldots, n\,; \quad M, P, \ldots = p + 1, \ldots, N\,;$$

soit le repère de l'espace projectif $P_p(\xi)$. $A_a$ sont des fonctions scalaires du point $\xi^\nu$ de la variété $X_n$. Ayons de plus $(N+1)^2$ fonctions scalaires $\sigma_a^{b'} = \sigma_a^{b'}(\xi)$ telles que

$$\sigma = \text{Dét}\,|\sigma_a^{b'}| = 1\,, \quad \sigma_A^{M'} = 0\,. \tag{1.5}$$

Nous admettons ensuite les changements de la base (1.3) de l'espace $P_N(\xi)$:

$$A_a = \sigma_a^{b'} A_{b'}\,. \tag{1.6}$$

Les transformations (1.6) forment un groupe que nous désignerons par $G_p$.

Puis dans l'espace $P_N^*(\xi)$, dual de $P_N(\xi)$, ayons la base

$$E^0, E^1, \dots, E^N\,; \quad E^a = (-1)^a\,[A_0, \dots, A_{a-1}, A_{a+1}, \dots, A_N]\,. \tag{1.7}$$

Soit alors $A = [A_0, A_1, \dots, A_N] \neq 0$. Nous avons évidemment $[A_a E^b] = A\delta_a^b$. Soit $\sigma_{b'}^a$ le complément algébrique de $\sigma_a^b$ dans $\sigma$. On a donc

$$\sigma_{b'}^a = \frac{\partial \log \sigma}{\partial \sigma_a^{b'}}\,. \tag{1.8}$$

Nous avons alors évidemment $\sigma_{b'}^a \sigma_c^{b'} = \delta_c^a$, $\sigma_b^{a'} \sigma_{c'}^b = \delta_{c'}^{a'}$, et aussi

$$E^{a'} \sigma_{a'}^b = E^b\,. \tag{1.9}$$

Soit maintenant $\underset{0}{X}, \underset{1}{X}, \dots, \underset{N}{X}$ (ou plus brièvement $\underset{c}{X}$) un repère quelconque de l'espace $P_N(\xi)$. Nous pouvons écrire

$$\underset{c}{X} = \underset{c}{u}^a A_a\,, \quad \text{Dét}\,|\underset{a}{u}^b| \neq 0\,. \tag{1.10}$$

Sans le répéter à chaque reprise, nous supposerons dans la suite

$$\underset{A}{u}^M = 0 \tag{1.11}$$

ce qui signifie que $\underset{0}{X}, \underset{1}{X}, \dots, \underset{p}{X}$ est un repère du centre $P_p(\xi)$. Nous écrivons alors

$$u = \text{Dét}\,|\underset{a}{u}^b| \neq 0 \tag{1.12}$$

et nous pouvons définir $\overset{a}{u}_b$ ainsi:

$$\overset{a}{u}_b = \frac{\partial \log u}{\partial \underset{a}{u}^b}\,, \tag{1.13}$$

de sorte que nous avons à nouveau $\overset{c}{u}_b \underset{c}{u}^a = \overset{a}{u}_c \underset{b}{u}^c = \delta_b^a$.

Dans l'espace $P_N^*(\xi)$, dual de $P_N(\xi)$, ayons le repère $\overset{a}{Y}$,

$$\overset{a}{Y} = \overset{a}{u}_b E^b\,. \tag{1.14}$$

Par les transformations du groupe $G_p$, le repère $X$ change en $'\underset{a}{X}$, d'où

$$(1.15) \qquad '\underset{a}{u}^b = \underset{a}{u}^c \sigma_c^{b'}, \quad '\overset{a}{u}_b = \overset{a}{u}_c \sigma_{b'}^c .$$

Il est évident que $G_p$ n'est pas le groupe général de transformations projectives qui laissent le centre inchangé. Il est en effet possible de multiplier $'\underset{a}{X}$ par un facteur scalaire $f$ arbitraire. Les transformations projectives de $G_p + f = G$ donnent donc

$$(1.16) \qquad '\underset{a}{\bar{u}}^b = f\sigma_c^{b'} \underset{a}{u}^c, \quad '\overset{a}{\bar{u}}_b = f^{-1}\sigma_{b'}^c \overset{a}{u}_c .$$

Nous avons évidemment

$$(1.17) \qquad '\bar{u} = f^{N+1}\sigma u .$$

Les grandeurs $\underset{a}{u}^b$ (ou $\overset{a}{u}_b$) sont connus à un facteur scalaire arbitraire près. Nous avons ainsi déterminé *le repère fondamental* $\underset{a}{u}^b$, $\overset{a}{u}_b$ aux transformations admissibles (1.16), et tel que $(1.5_2)$ a nécessairement lieu. La variété ainsi obtenue sera désignée par $WP^c_{pN}$.

**2.** Nous allons définir à présent les généralisations des tenseurs pour les variétés mentionnées. L'ensemble des fonctions $V^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}$ qui se transforment par les transformations de $G$ + (1.1) suivant la loi

$$(2.1) \qquad '\bar{V}^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v} = A^{\nu_1'}_{\alpha_1} \ldots A^{\nu_n'}_{\alpha_u} A^{\beta_1}_{\lambda_1'} \ldots A^{\beta_v}_{\lambda_v'} f^i \Delta^p V^{\alpha_1\ldots\alpha_u}_{\beta_1\ldots\beta_v}$$

sera appelé *agrégat scalaire* (de la variété $WP^n_{pN}$) *de caractéristique* $\left(\begin{matrix}u\\v\end{matrix}, ip\right)$. Soit donc $\underset{e_1\ldots e_t}{\overset{d_1\ldots d_s}{V}}{}^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}$ l'agrégat scalaire de caractéristique $\left(\begin{matrix}u\\v\end{matrix}, i - s + t, p\right)$ et formons l'ensemble des fonctions

$$V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} = \underset{e_1\ldots e_t}{\overset{d_1\ldots d_s}{V}}{}^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v} \underset{d_1}{u}^{a_1} \ldots \underset{d_s}{u}^{a_s} \overset{e_1}{u}_{b_1} \ldots \overset{e_t}{u}_{b_t}$$

qui se transforment par les transformations de $G$ + (1.1) suivant la loi

$$(2.2) \qquad '\bar{V}^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} =$$
$$= A^{\nu_1'}_{\alpha_1} \ldots A^{\nu_u'}_{\alpha_u} A^{\beta_1}_{\lambda_1'} \ldots A^{\beta_v}_{\lambda_v'} f^i \Delta^p \sigma^{a_1'}_{c_1} \ldots \sigma^{a_s'}_{c_s} \sigma^{d_1}_{b_1'} \ldots \sigma^{d_t}_{b_t'} V^{\alpha_1\ldots\alpha_u\, c_1\ldots c_s}_{\beta_1\ldots\beta_v\, d_1\ldots d_t} .$$

Un tel ensemble de fonctions sera appelé *agrégat projectif* (de la variété $WP^n_{pN}$) *de caractéristique* $\left(\begin{matrix}u\\v\end{matrix}, i, p, \begin{matrix}s\\t\end{matrix}\right)$. Lorsque $u = v = s = t = 0$, nous parlons *d'un scalaire de caractéristique* $(i, p)$; lorsqu'on a $s = t = 0$, nous parlons d'un agrégat

projectif (et nous dirons souvent agrégat tout court) de caractéristique $\begin{pmatrix} u \\ & , i, p \\ v \end{pmatrix}$.
D'une manière analogue: si $u = v = 0$, nous parlons d'un agrégat de caractéristique $\begin{pmatrix} & & s \\ i, p, & \\ & & t \end{pmatrix}$. L'agrégat de caractéristique $\begin{pmatrix} 1 \\ & , 0, 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ & , 0, 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou bien $\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1, 0, & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} & & 0 \\ 1, 0, & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ sera appelé *vecteur contrevariant*, *vecteur covariant*, *point* et *hyperplan*, respectivement.

**3.** Nous définissons la connexion sur la variété $WP^n_{pN}$, de la façon suivante: Soient ${}^1\xi^\nu$, ${}^2\xi^\nu$ deux points[3]) sur la variété $X_n$ et soit $\gamma$ un arc sur $X_n$ joignant ces deux points. Nous pouvons évidemment écrire les équations paramétriques de l'arc $\gamma$ comme suit:

$$\xi^\nu = \xi^\nu(t)\,, \quad 0 \leqq t \leqq h\,, \quad \xi^\nu(0) = {}^1\xi^\nu\,, \quad \xi^\nu(h) = {}^2\xi^\nu\,. \tag{3.1}$$

A tout arc $\gamma$ qui réunit deux points ${}^1\xi^\nu$ et ${}^2\xi^\nu$ on associe une homographie $H_\gamma$ existent entre les espaces projectifs locaux: $P_N({}^1\xi) \to P_N({}^2\xi)$. Comme nous avons, dans chaque espace local $P_N(\xi)$, choisi un repère (1.3), nous pouvons écrire l'homographie $H_\gamma$ comme suit

$$H_\gamma({}^2\xi, {}^1\xi)\, A_a({}^2\xi) = B_a(h) \tag{3.2}$$

où $B_0(t), \ldots, B_N(t)$ est le repère dans $P_N({}^1\xi)$, déterminé par le système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}B_a}{\mathrm{d}t} = \Pi^b_{a\nu}(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\,B_b \tag{3.3}$$

aux conditions initiales $B_a(0) = A_a({}^1\xi)$. Dans ce qui suit, nous désignons la variété $WP^n_{pN}$ à connexion par $P^n_{pN}$. Nous disons tout bref que la connexion de la variété $P^n_{pN}$ est donnée par les équations

$$\mathrm{d}A_a = \omega^b_a A_b\,, \quad \omega^b_a = \Pi^b_{a\nu}(\xi)\,\mathrm{d}\xi^\nu \tag{3.4}$$

L'homographie qui existe entre les espaces locaux peut s'écrire comme suit

$$A_a({}^1\xi) = \underset{a}{h^b}({}^2\xi, {}^1\xi)\, A_b({}^2\xi)\,; \quad \underset{a}{h^b}({}^1\xi, {}^1\xi) = \delta^b_a\,, \tag{3.5}$$

où nous supposons que $\underset{a}{h^b}$ sont des fonctions scalaires de caractéristique (0, 0) ce qui ne restreint évidemment pas la généralité. L'homographie (3.5) est, en principe, le résultat de la composition de deux homographies, à savoir de l'homographie $P_\gamma$ de l'espace projectif $P_N({}^1\xi)$ sur lui-même

$$A_a({}^1\xi) = \underset{a}{h^b}(\xi(t), {}^1\xi)\, B_b(t) \tag{3.6}$$

[3]) $\xi^\nu$ désigne le point aux coordonnées $\xi^\nu$, c'est-à-dire le point $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$.

et de l'homographie $H_\gamma$. Supposons maintenant $P_\gamma$ non-singulière, on aura donc

(3.7) $$h = \text{Dét}\,|\underset{a}{h^b}| \neq 0\,.$$

Nous pouvons alors définir

(3.8a) $$\overset{a}{h_b} = \frac{\partial \log h}{\partial \underset{a}{h^b}}$$

et nous aurons

(3.8b) $$\overset{a}{h_b}\underset{c}{h^b} = \overset{b}{h_c}\underset{b}{h^a} = \delta^a_c\,.$$

Si nous considérons, dans les espaces locaux, les repères duals, nous pouvons écrire au lieu de (3.4) les équations qui donnent la connexion de la variété $P^{n*}_{pN}$, duale de $P^n_{pN}$ (voir [11]), induite par la connexion de la variété $P^n_{pN}$ sous la forme

(3.9) $$\mathrm{d}E^a = -\,\omega^a_b E^b$$

et l'homographie $P^*_\gamma$, duale de $P_\gamma$, sera

(3.10) $$E^a({}^1\xi) = \overset{a}{h_b}(\xi(t), {}^1\xi)\, F^b(t)$$

où $F^b(t)$ est la solution du système d'équations différentielles

(3.11) $$\frac{\mathrm{d}F^a}{\mathrm{d}t} = -\,\Pi^a_{b\nu}(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\,F^b\,.$$

Les équations (3.3) et (3.6) montrent que les coefficients de l'homographie $P_\gamma$ doivent vérifier les équations différentielles

(3.12) $$\frac{\mathrm{d}\overset{b}{h_a}}{\mathrm{d}t} = \Pi^c_{a\nu}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\,\overset{b}{h_c}\,,$$

et les coefficients de l'homographie duale vérifient

(3.13) $$\frac{\mathrm{d}\underset{a}{h^b}}{\mathrm{d}t} = -\,\Pi^b_{c\nu}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\,\underset{a}{h^c}\,.$$

On a donc évidemment

(3.14) $$\overset{b}{h_a}(\xi(t), {}^1\xi) = \delta^b_a + \Pi^b_{a\nu}({}^1\xi)\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}.\,t + \ldots\,.$$

$$\underset{b}{h^a}(\xi(t), {}^1\xi) = \delta^a_b - \Pi^a_{b\nu}({}^1\xi)\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}.\,t + \ldots$$

où ... représente les termes d'ordres supérieurs en $t$. Si nous considérons les repéres fondamentaux dans les espaces locaux, nous pouvons écrire l'homographie entre les espaces locaux $P_N(^1\xi)$ et $P_N(^2\xi)$ sous la forme

$$(3.15) \qquad \underset{c}{X}(^2\xi) = L^b_c(h)\,\underset{b}{X}(^1\xi)\,; \quad \overset{c}{Y}(^2\xi) = M^c_a(h)\,\overset{b}{Y}(^1\xi)\,,$$

où, évidemment,

$$(3.16) \qquad \underset{c}{u^a}(^2\xi)\,\overset{k}{h_a}(^2\xi, {}^1\xi) = L^b_c(h)\,\underset{b}{u^k}(^1\xi)\,;$$

$$\overset{c}{u_a}(^2\xi)\,\underset{k}{h^a}(^2\xi, {}^1\xi) = M^c_a(h)\,\overset{a}{u_k}(^1\xi)\,.$$

Nous introduisons maintenant l'opérateur $R_0$:

$$(3.17) \qquad R_0\underset{a}{u^b}(^2\xi) = \underset{a}{u^c}(^2\xi)\,\overset{b}{h_c}(^2\xi, {}^1\xi)\,,$$

$$R_0\overset{a}{u_b}(^2\xi) = \overset{a}{u_c}(^2\xi)\,\underset{b}{h^c}(^2\xi, {}^1\xi)\,.$$

L'opérateur $R_0$ associe au point contrevariant (ou covariant) correspondant au point $\xi^\nu(t)$ de la courbe $\gamma$ sur la variété $X_n$ le point contrevariant (ou covariant, respectivement) correspondant au point ${}^1\xi^\nu$ sur la variété $X_n$; autrement dit, il associe au repère de l'espace $P_N(^2\xi)$ un repère de l'espace $P_N(^1\xi)$. Nous pouvons alors prendre (3.16) pour une homographie de l'espace local sur lui-même, donc écrire les équations (3.15) de la façon suivante

$$(3.18) \qquad \underset{c}{\mathscr{X}}(^2\xi) = L^b_c(h)\,\underset{b}{X}(^1\xi)\,; \quad \overset{c}{\mathscr{Y}}(^2\xi) = M^c_a(h)\,\overset{a}{Y}(^1\xi)\,,$$

où

$$\underset{c}{\mathscr{X}}(^2\xi) = H_\gamma(^2\xi, {}^1\xi)\,\underset{c}{X}(^2\xi)\,, \quad \overset{c}{\mathscr{Y}}(^2\xi) = H^*_\gamma(^2\xi, {}^1\xi)\,\overset{c}{Y}(^2\xi)\,.$$ [4])

Nous avons manifestement

$$(3.19) \qquad \text{a)} \quad {}'\overline{L}^b_a = L^b_a\,; \quad {}'\overline{M}^b_a = M^b_a\,; \qquad \text{b)} \quad L^b_a(0) = M^b_a(0) = \delta^b_a\,;$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{\mathrm{d}L^b_a}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} + \left(\frac{\mathrm{d}M^b_a}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} = 0\,.$$

Ensuite, nous voyons que nous avons pour l'opérateur $R_0$ la relation

$$(3.20\text{a}) \qquad R_0\,\underset{a}{u^c}(^2\xi)\,.\,R_0\,\overset{b}{u_c}(^2\xi) = \underset{a}{u^c}(^1\xi)\,.\,\overset{b}{u_c}(^1\xi)\,.$$

---

[4]) $H^*_\gamma$ étant l'homographie duale á $H_\gamma$.

$R_0 \underset{a}{u}^b({}^2\xi)$ est le point contrevariant qui a les mêmes coordonnées par rapport au repère $A_a({}^1\xi)$ que le point $\underset{a}{X}({}^2\xi)$ par rapport au repère qui a subi un transport parallèle du point ${}^1\xi^\nu$ au point ${}^2\xi^\nu$ suivant la courbe $\gamma$, c'est-à-dire au repère $\tilde{A}_a({}^2\xi)$, image du repère $A_a({}^1\xi)$ par l'homographie $H_\gamma$ entre les espaces locaux.

Par le développement d'un scalaire $s(\xi)$ de caractéristique $(0, 0)$ défini suivant la courbe $\gamma$ nous comprenons la fonction $s(t)$ définie aux points du développement de la courbe $\gamma$ dans l'espace local $P_N({}^1\xi)$ de telle façon que

$$s(t) = s(B_0(t)) \overset{\text{def}}{=} s(\xi(t))\,; \tag{3.21}$$

nous pouvons alors définir

$$R_0\, s({}^2\xi) = s(h)\,. \tag{3.20b}$$

Nous avons alors pour l'opérateur $R_0$: Si $V$, $W$ sont deux agrégats de caractéristique $\left(i_1, 0, \begin{smallmatrix} s_1 \\ t_1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(i_2, 0, \begin{smallmatrix} s_2 \\ t_2 \end{smallmatrix}\right)$ respectivement, la relation suivante a lieu

$$R_0\, V({}^2\xi) \,.\, R_0\, W({}^2\xi) = R_0\{V({}^2\xi) \,.\, W({}^2\xi)\}\,. \tag{3.20c}$$

Elle est facile à vérifier si nous tenons compte du fait qu'un scalaire de caractéristique $(i, 0)$ peut s'écrire sous la forme $K = u^{i/(N+1)} \,.\, s$, où $s$ est un scalaire de caractéristique $(0, 0)$.

Ayons maintenant, réciproquement, une variété $P^n_{pN}$ et introduisons un opérateur $R_0$, associant à chaque point contrevariant, ou covariant, $u^a(\xi)$ ou $u_a(\xi)$ respectivement, défini suivant la courbe $\gamma$ le point contrevariant, $R_0\, u^a({}^2\xi)$, ou covariant $R_0\, u_a({}^2\xi)$ respectivement, de l'espace local $P_N({}^1\xi)$ et tel que (3.20a, b) ait lieu, et les fonctions $L^c_b(h)$, $M^c_b(h)$ par les équations

$$R_0\, \underset{a}{u}^b({}^2\xi) = L^c_a(h)\, \underset{c}{u}^b({}^1\xi)\,, \quad R_0\, \overset{a}{u}_b({}^2\xi) = M^a_c(h)\, \overset{c}{u}_b({}^1\xi)\,, \tag{3.22}$$

telles que (3.19a, b) ait lieu; nous obtenons ainsi une variété $P^n_{pN}$ à connexion (voir [6]). Cette proposition peut être prise pour la définition de variété $P^n_{pN}$ à connexion. Les relations (3.19c) et (3.20c) découlent dèjà de la proposition citée en vertu des propriétés du repère fondamental dans l'espace local.

**4.** En nous appuyant sur les considérations précédentes nous pouvons introduire maintenant la notion de différentielle projective covariante. Soit $V$ un agrégat projectif de caractéristique $\left(i, 0, \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$. Formons un nouvel agrégat

$$\left(\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}\right)_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[R_0\, V({}^2\xi) - V({}^1\xi)\right]. \tag{4.1}$$

Nous voyons que $\mathrm{D}V/\mathrm{D}t$ et $V$ sont deux agrégats de même caractéristique. Calculons maintenant p. ex. $R_0\, v^a_b(^2\xi)$, où $v^a_b$ est un agrégat de caractéristique $\left(i, 0, \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Nous pouvons écriré évidemment

$$v^a_b = u^{i/(N+1)} \overset{c}{\underset{d}{v}} \underset{c}{u}^a \overset{d}{u}_b\,, \tag{4.2}$$

où $\overset{c}{\underset{d}{v}}$ est un scalaire de caractéristique (0, 0). A présent, nous avons évidemment

$$\begin{aligned} R_0\, v^a_b(^2\xi) &= R_0 u^{i/(N+1)} R_0 \overset{c}{\underset{d}{v}} R_0 \underset{c}{u}^a R_0 \overset{d}{u}_b = \\ &= \left\{u^{i/(N+1)}(^1\xi) + h \frac{i}{N+1} \left(\frac{\mathrm{d}L^a_a}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} u^{i/(N+1)}(^1\xi) + \ldots\right\} \times \\ &\times \left\{\overset{c}{\underset{d}{v}}(^1\xi) + h \left(\frac{\mathrm{d}\overset{c}{\underset{d}{v}}}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} + \ldots\right\} \times \left\{\underset{c}{u}^a(^1\xi) + h \left(\frac{\mathrm{d}L^k_c}{\mathrm{d}h}\right) \underset{k}{u}^a(^1\xi) + \ldots\right\} \times \\ &\times \left\{\overset{d}{u}_b(^1\xi) - h \left(\frac{\mathrm{d}L^d_k}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} \overset{k}{u}_b(^1\xi) + \ldots\right\} = \\ &= v^a_b(^1\xi) + h u^{i/(N+1)}(^1\xi)\, \underset{c}{u}^a(^1\xi)\, \overset{d}{u}_b(^1\xi)\,. \left\{\frac{\mathrm{d}\overset{c}{\underset{d}{v}}}{\mathrm{d}h} + \frac{i}{N+1} \frac{\mathrm{d}L^a_a}{\mathrm{d}h} \overset{c}{\underset{d}{v}} + \right. \\ &\left. + \frac{\mathrm{d}L^c_k}{\mathrm{d}h} \overset{k}{\underset{d}{v}} - \frac{\mathrm{d}L^k_d}{\mathrm{d}h} \overset{c}{\underset{k}{v}}\right\}_{h=0} + \ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

où toujours ... représente les termes d'ordres supérieurs en $h$. A l'aide des expressions (3.8b), (3.14), (3.16) on peut calculer $L^b_a$ en fonction de $\underset{a}{u}^b$, $\overset{b}{u}_a$, $\Pi^b_{a\alpha}$. On voit donc qu'au point $\xi^\nu(t)$ de la courbe $\gamma$ on a

$$\frac{\mathrm{D}v^a_b}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v^a_b}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}\left(\Pi^a_{c\nu}v^c_b - \Pi^c_{b\nu}v^a_c + (i/(N+1))\,\Pi^c_{c\nu}v^a_b\right). \tag{4.4}$$

D'une manière tout à fait analogue, nous calculons (4.1) pour un agrégat de caractéristique $\left(i, 0, \begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)$. Si $t$ est un scalaire de caractéristique (0, 0), alors on a $\mathrm{D}t/\mathrm{D}t = \mathrm{d}t/\mathrm{d}t$, nous écrivons donc dans la suite $\mathrm{d}t$ au lieu de $\mathrm{D}t$. La grandeur $\mathrm{D}V$ où $V$ est un agrégat de caractéristique $\left(i, 0, \begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)$ sera appelée différentielle projective de l'agrégat $V$.

**5.** Pour pouvoir définir la différentielle projective d'un agrégat de caractéristique arbitraire $\begin{pmatrix} u & & s \\ & , i, p, & \\ v & & t \end{pmatrix}$, nous introduisons sur la variété $X_n$ une connexion affine auxiliaire par les équations

$$\text{(5.1)} \qquad \mathrm{d}M = \omega^\nu I_\nu \,; \quad \mathrm{d}I_\nu = \omega^\mu_\nu I_\mu \,; \quad \omega^\nu = \Gamma^\nu_\lambda \,\mathrm{d}\xi^\lambda \,; \quad \omega^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}\xi^\lambda \,,$$

où $\{M, I_1, \ldots, I_n\}$ est une base de l'espace affine tangent à la variété $X_n$ au point $\xi^\nu$ et $\Gamma^\nu_\lambda$, $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ est l'objet de la connexion affine. Le changement de base locale soit donné, en fonction du changement de paramètres sur la variété, de la manière suivante:

$$\text{(5.2)} \qquad I_\nu = A^{\nu'}_\nu I_{\nu'} \,; \quad I_{\nu'} = A^\nu_{\nu'} I_\nu \quad \text{quand} \quad A^{\nu'}_\nu = \partial_\nu \xi^{\nu'} \,, \quad A^\nu_{\nu'} = \partial_{\nu'} \xi^\nu \,.$$

A tout agrégat $W$ arbitraire de caractéristique $\begin{pmatrix} u & \\ & , 0, p \\ v & \end{pmatrix}$ nous associons, tout comme dans le cas précédent[5]) la grandeur

$$\text{(5.3)} \qquad \left(\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[R_0 \, W({}^2\xi) - W({}^1\xi)\right] ,$$

où l'opérateur $R_0$ a la même signification que dans le cas précédent. Si donc $v^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}$ est un agrégat de caractéristique $\begin{pmatrix} u & \\ & , 0, p \\ v & \end{pmatrix}$ nous avons

$$\text{(5.4)} \quad \frac{\mathrm{D}v^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\left(\Gamma^{\nu_1}_{\omega\mu} v^{\omega\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v} + \ldots - \Gamma^{\omega}_{\lambda_1\mu} v^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\omega\ldots\lambda_v} - \ldots + p\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} v^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}\right) .$$

Il est facile de voir que pour l'agrégat $V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}$ de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & s \\ & , i, p, & \\ v & & t \end{pmatrix}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\text{(5.5)} \qquad \frac{\mathrm{D}V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}\Bigg(\Gamma^{\nu_1}_{\omega\mu} V^{\omega\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \ldots \\
&\ldots - \Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\omega\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} - \ldots + \Pi^{a_1}_{c\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, c\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \ldots - \Pi^{c}_{b\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, c\ldots b_t} - \ldots \\
&\ldots + p\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \frac{i - s + t}{N + 1}\Pi^{c}_{c\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}\Bigg) .
\end{aligned}$$

Par *le développement d'un agrégat V* de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & s \\ & , i, p, & \\ v & & t \end{pmatrix}$ défini aux points de la courbe $\gamma$: $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, dans l'espace local (nous parlons de la réunion

---

[5]) Les espaces locaux sont maintenant affines et leur dimension est égale á celle de la variété $X_n$. Dans ce cas, que nous obtenons en spécialisant les variétés $P^n_{pN}$ à connexion, nous avons donc toutes les notions connues des cas précédents.

des espaces $P_N({}^1\xi)$ et $A_n({}^1\xi)$, où $A_n({}^1\xi)$ est l'espace affine tangent à la variété $X_n$ au point ${}^1\xi$) nous comprenons l'ensemble des fonctions d'une variable défini comme suit: Soient $V^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}{}^{a_1\ldots a_s}_{b_1\ldots b_t}(\xi)$ les composantes de l'agrégat $V$ par rapport aux repères $X, N, K_\alpha(N, K_\alpha$ étant le repère général dans l'espace $A_n(\xi)$ suivant la courbe $\gamma$. Par exemple l'agrégat $\overset{a}{v}{}^{\nu}_{a}$ de caractéristique $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & i, & p, & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ peut être exprimé par la relation

$\overset{a}{v}{}^{\nu}_{a} = u^{(i+1)/(N+1)} v^p \overset{\lambda}{\underset{b}{v}} \overset{b}{\underset{\lambda}{u}}_a v^\nu$, où $K = \underset{\lambda}{v}{}^\nu \underset{\lambda}{I}_\nu$, $v = \text{Dét}\,|v^\nu| \neq 0$, $\overset{\lambda}{\underset{b}{v}}$ étant un scalaire de caractéristique (0, 0). L'homographie $H_\gamma$ de l'espace local $P_N({}^2\xi)$ sur $P_N({}^1\xi)$ et l'affinité $A_\gamma$ (donnée par la connexion affine (5.1), de l'espace $A_n({}^2\xi)$ sur $A_n({}^1\xi)$ nous donnent dans le espaces locaux $P_N({}^1\xi)$ et $A_n({}^1\xi)$ les bases $\mathscr{X}$, $\mathscr{N}$, $\underset{c}{\mathscr{I}}_\alpha$, images des bases $X, N, \underset{c}{I}_\alpha$ des espaces $P_N({}^2\xi)$ et $A_n({}^2\xi)$. Alors $R_0 V^{\nu_1\ldots\nu_u}_{\lambda_1\ldots\lambda_v}{}^{a_1\ldots a_s}_{b_1\ldots b_t}({}^2\xi)$ sont les composantes, par rapport aux bases $\mathscr{X}$, $\mathscr{N}$, $\underset{c}{\mathscr{I}}_\alpha$, de l'agrégat que nous appellerons développement de l'agrégat $V$.

Par *la différentielle projective* D$V$ au point ${}^1\xi$ nous comprenons alors la différentielle ordinaire de la „fonction" (il s'agit d'un ensemble de fonctions — composantes) $R_0V$ au point $h = 0$, définie dans l'espace local $P_N({}^1\xi)$, $A_n({}^1\xi)$ dans le sens précisé ci-dessus.

6. Nous voyons donc qu'il est possible de définir *l'agrégat de courbure — torsion* d'une variété $P^n_{pN}$ à connexion projective, et qui est une généralisation du tenseur de courbure et du tenseur de torsion des variétés à connexion affine pris au sens usuel (classique). Pour faire cela, étudions d'abord comment se transforment les fonctions $\Pi^b_{a\alpha}$ par les transformations $G$ + (1.1). En vertu des équations (3.4) nous trouvons facilement que pour les transformations $G_p$ + (1.1) nous avons

$$\Pi^{b'}_{c'\alpha'} = \{\Pi^b_{c\alpha}\sigma^{b'}_b - \partial_\alpha\sigma^{b'}_c\}\, A^\alpha_{\alpha'}\sigma^c_{c'}\,. \tag{6.1}$$

En changeant le facteur scalaire, c'est-à-dire en procédant à une $f$-transformation, nous obtenons la loi de transformation que voici

$$\overline{\Pi}{}^a_{a\alpha} = \Pi^a_{a\alpha} + (N + 1)\,\partial_\alpha \log f\,. \tag{6.2}$$

Pour les transformations $G$ + (1.1) nous avons donc

$$\overline{\Pi}{}^{b'}_{c'\alpha'} = \{\Pi^b_{c\alpha}\sigma^{b'}_b\sigma^c_{c'} - \sigma^c_{c'}\,\partial_\alpha\sigma^{b'}_c + \delta^c_b\sigma^c_{c'}\sigma^{b'}_b\,\partial_\alpha \log f\}\, A^\alpha_{\alpha'}\,. \tag{6.3}$$

Maintenant nous définissons les objets

$$G^b_{a\alpha} = \Pi^b_{a\alpha} - 1/(N + 1)\,\delta^b_a\Pi^c_{c\alpha}\,, \tag{6.4}$$

$$\Omega^b_{a\alpha} = \Pi^b_{a\alpha} - \delta^b_a\Pi^0_{0\alpha}\,. \tag{6.5}$$

Il est aisé de vérifier que $G^b_{a\alpha}$, $\Omega^b_{a\alpha}$ sont des $f$-invariants qui se transforment par $G_p$ + + (1.1) de la façon suivante:

$$(6.6) \qquad G^{b'}_{a'\alpha'} = \{G^b_{a\alpha}\sigma^{b'}_b - \partial_\alpha\sigma^{b'}_a\} A^\alpha_{\alpha'}\sigma^a_{a'},$$
$$\Omega^{b'}_{a'\alpha'} = \{\Omega^b_{a\alpha}(\sigma^a_{a'}\sigma^{b'}_b - \delta^{b'}_{a'}\sigma^a_{o'}\sigma^{o'}_b) - \sigma^c_{a'}\,\partial_\alpha\sigma^{b'}_c - \delta^{b'}_{a'}\sigma^c_{o'}\,\partial_\alpha\sigma^{o'}_c\} A^\alpha_{\alpha'}.$$

En même temps nous avons bien entendu l'objet de la connexion affine auxiliaire $\Gamma^\beta_\alpha$, $\Gamma^\beta_{\gamma\alpha}$, dont les formules de transformation, lorsque les paramètres changent selon (6.1) et la base selon (5.2), découlent de (5.1): ce sont comme on le sait bien

$$(6.7) \qquad \Gamma^{\beta'}_{\alpha'} = \Gamma^\beta_\alpha A^\alpha_{\alpha'} A^{\beta'}_\beta, \quad \Gamma^{\beta'}_{\alpha'\gamma'} = \{\Gamma^\beta_{\alpha\beta} A^{\beta'}_\beta - \partial_\gamma A^{\beta'}_\alpha\} A^\gamma_{\gamma'} A^\alpha_{\alpha'}.$$

Supposons maintenant pour un instant que le repère (1.3) est choisi de telle façon que

$$(6.8) \qquad A_0, \ldots, A_r, A_{p+1}, \ldots, A_{n+p-r}, \quad 0 \leqq r \leqq n,$$

soit l'espace tangent aux développements de toutes les courbes $\gamma$ passant par le point $A_0$ sur $X_n$, dans l'espace local $P_N({}^1\xi)$. Soit donc

$$(6.9) \quad \Pi^\omega_{0\alpha} = \delta^\omega_\alpha, \quad \Pi^\delta_{0\alpha} = 0, \quad \delta = r+1, \ldots, p,\ n+p-r+1, \ldots, N.$$ [6]

Nous écrivons maintenant l'équation de structure de la variété $P^n_{pN}$ à connexion sous la forme

$$(6.10) \qquad [\mathrm{d}\omega^b_a] = [\omega^c_a\omega^b_c] - \Omega^b_a.$$

Le tenseur généralisé de courbure $K^b_{\alpha\beta a}$ soit donné par les équations

$$(6.11) \qquad \Omega^b_a - \delta^b_a\Omega^0_0 = -\tfrac{1}{2}K^b_{\alpha\beta a}[\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta].$$

Si nous tenons compte de $(3.4_2)$ et de la spécialisation du repère donnée par les expressions (6.9), nous obtenons par calcul direct à partir de (6.10) et (6.11) que nous pouvons écrire les composantes du tenseur de courbure $K^b_{\alpha\beta a}$ à l'aide de (6.6) comme suit:

$$(6.12) \qquad K^b_{\alpha\beta a} = 2\partial_{[a}\Omega^b_{|a|\beta} + 2\Omega^b_{c[\alpha}\Omega^c_{|a|\beta]} + 2\delta^b_a\Omega^c_{0[\alpha}\Omega^0_{|c|\beta]}.$$

Définissons maintenant *le sous-tenseur* du tenseur généralisé de courbure (6.12)

$$(6.13) \qquad K^M_{\alpha\beta A} = 2\partial_{[\alpha}\Omega^M_{|A|\beta]} + 2\Omega^M_{a[\alpha}\Omega^a_{|A|\beta]},$$

que nous appellerons *tenseur de torsion généralisé* de la variété $P^n_{pN}$ à connexion projective. Les grandeurs (6.12) et (6.13) sont évidemment $f$-invariantes. Pour les transformations (1.1) nous avons

$$(6.14) \qquad K^b_{\alpha'\beta'a} = K^b_{\alpha\beta a}A^\alpha_{\alpha'}A^\beta_{\beta'}.$$

Pour les transformations $G_p$, les équations (1.6), (1.8), (3.4) entraînent

$$(6.15) \qquad \omega^{c'}_{b'} = (\omega^c_b\sigma^{c'}_c - \mathrm{d}\sigma^{c'}_b)\,\sigma^b_{b'}.$$

---

[6]) Dans ce qui suit, nous écrivons $\omega, \Pi = \alpha$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots, r$; $\omega, \Pi = p - r + \alpha$ pour $\alpha = r+1, \ldots, n$.

En vertu de (6.10) nous avons

(6.16) $$\Omega^{b'}_{a'} = \Omega^b_a \sigma^{b'}_b \sigma^a_{a'} \,.$$

Si nous substituons cette relation dans (6.11), nous obtenons

(6.17) $$K^{b'}_{\alpha\beta a'} = K^b_{\alpha\beta a}(\sigma^a_{a'}\sigma^{b'}_b + \sigma^{o'}_b \sigma^a_{o'} \sigma^{b'}_c \sigma^c_{a'}) \,.$$

Nous voyons donc que $K^b_{\alpha\beta a}$ n'est pas un agrégat projectif au sens de la définition mentionnée, mais un tenseur généralisé au sens de E. CARTAN [1]. Mais nous trouvons immédiatement

(6.18) $$K^{M'}_{\alpha\beta A'} = K^M_{\alpha\beta A}\sigma^A_{A'}\sigma^M_{M'} \,.$$

Pour les transformations $G$ + (1.1) nous avons donc

(6.19) $$\begin{aligned} K^{b'}_{\alpha'\beta' a'} &= K^b_{\alpha\beta a}(\sigma^a_{a'}\sigma^{b'}_b + \sigma^{o'}_b \sigma^a_{o'} \sigma^{b'}_c \sigma^c_{a'})\, A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \,, \\ K^{M'}_{\alpha'\beta' A'} &= K^M_{\alpha\beta A}\sigma^A_{A'}\sigma^{M'}_M A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \,. \end{aligned}$$

Donc $K^M_{\alpha\beta A}$ est un agrégat projectif de caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & ,0, & 0, & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite nous définissons l'agrégat de courbure-torsion

(6.20) $$R^b_{\alpha\beta a} = 2\partial_{[\alpha} G^b_{|a|\beta]} + 2G^b_{c[\alpha} G^c_{|a|\beta]}$$

et analogiquement l'agrégat de torsion

(6.21) $$R^M_{\alpha\beta A} = 2\partial_{[\alpha} G^M_{|A|\beta]} + 2G^M_{c[\alpha} G^c_{|A|\beta]} \,.$$

Ayons ensuite l'objet

(6.22) $$Q_\mu = 1/(N+1)\,.\,\Pi^a_{a\mu}$$

et l'agrégat de caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & ,0, & 0 \\ 2 & & \end{pmatrix}$

(6.23) $$Q_{\nu\mu} = 2\partial_{[\mu} Q_{\nu]} \,.$$

Nous appellerons $\Omega$-objet de la connexion de la variété $P^n_{pN}$ les grandeurs

(6.24) $$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}, \Gamma^\beta_\alpha, \Omega^b_{a\alpha}, Q_\mu, S_\mu = \Pi^0_{0\mu} - Q_\mu \,,$$

et $G$-objet de la connexion de la variété $P^n_{pN}$

(6.25) $$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}, \Gamma^\beta_\alpha, G^b_{a\alpha}, O_\mu \,.$$

La dérivée projective covariante d'un agrégat quelconque de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & & s \\ & ,i, & p, & \\ v & & & t \end{pmatrix}$ c'est l'agrégat de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & & s \\ & ,i, & p, & \\ v+1 & & & t \end{pmatrix}$:

$$(6.26)\qquad \mathrm{D}_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} = \partial_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \Gamma^{\nu_1}_{\alpha\mu} V^{\alpha_1\ldots\nu_u a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v b_1\ldots b_t} + \ldots$$

$$\ldots - \Gamma^{\alpha}_{\lambda_1\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\alpha\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} - \ldots + \Omega^{a_1}_{c\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, c\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \ldots -$$

$$- \Omega^{c}_{b_1\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, c\ldots b_t} - \ldots + p\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + iQ_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} +$$

$$+ (s - t)\, S_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}\,.$$

L'expression de la dérivée covariante d'un agrégat $\begin{pmatrix} u & & & s \\ & ,\, i, & p, & \\ v & & & t \end{pmatrix}$ à l'aide du $G$-objet de la connexion projective a la forme (voir [6])

$$(6.27)\qquad D_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} = \partial_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \Gamma^{\nu_1}_{\alpha\mu} V^{\alpha\ldots\nu_1\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \ldots$$

$$\ldots - \Gamma^{\alpha}_{\lambda_1\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\alpha\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} - \ldots + G^{a_1}_{c\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, c\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + \ldots - G^{c}_{b_1\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, c\ldots b_t} - \ldots$$

$$\ldots + p\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t} + iQ_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_u\, a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\, b_1\ldots b_t}\,.$$

Si $v^a(v_a)$ est un agrégat projectif de caractéristique $\left(i,\, p,\, \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\text{ou } \left(i,\, p,\, \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \text{ respectivement}\right)$, nous écrivons les identités de Ricci généralisées sous la forme

$$(6.28)\qquad \begin{aligned} 2\mathrm{D}_{[\alpha}\mathrm{D}_{\beta]}v^a &= v^b R^a_{\alpha\beta b} + pv^a\Gamma^\gamma_{\alpha\beta\gamma} + iv^a Q_{\alpha\beta} + 2S^\lambda_{\alpha\beta}\,\mathrm{D}_\lambda v^a\,, \\ 2\mathrm{D}_{[\alpha}\mathrm{D}_{\beta]}v_a &= -\, v_b R^b_{\alpha\beta a} + pv_a\Gamma^\gamma_{\alpha\beta\gamma} + iv_a Q_{\alpha\beta} + 2S^\lambda_{\alpha\beta}\,\mathrm{D}_\lambda v_a\,, \end{aligned}$$

où nous posons

$$(6.29)\qquad S^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{[\alpha\beta]}\,,\quad \Gamma^\delta_{\alpha\beta\gamma} = 2\partial_{[\alpha}\Gamma^\delta_{|\gamma|\beta]} + 2\Gamma^\delta_{\kappa[\alpha}\Gamma^\kappa_{|\gamma|\beta]}\,.$$

**7.** Dans cette partie de notre travail nous allons étudier le transfer de l'espace local suivant une courbe fermée. Soit donc donné sur la variété $X_n$ un champ vectoriel $v^\alpha(\xi^\nu)$ $\left(\text{un agrégat de caractéristique } \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix},\, 0,\, 0\right)\right)$. Les équations

$$(7.1)\qquad \frac{\mathrm{d}\zeta^\alpha}{\mathrm{d}t} = v^\alpha(\zeta^\nu)$$

déterminent un ensemble de courbes — les trajectoires du champ vectoriel $v^\alpha(\xi^\nu)$. La solution du système (7.1) avec conditions initiales $\zeta^\nu = \xi^\nu$ ($\xi^\nu$ étant un point choisi sur la variété $X_n$) pour $t = 0$, s'écrit sous la forme

$$(7.2)\qquad \zeta^\alpha = \xi^\alpha + tv^\alpha + \frac{t^2}{2!}\, v^\nu\,\partial_\nu v^\alpha + \frac{t^3}{3!}(v^\nu\,\partial_\nu)^2\, v^\alpha + \ldots = \exp\big(t\underset{v}{X}\big)\,\xi^\alpha\,,$$

où $\underset{v}{X} = v^\kappa\partial_\kappa$. Nous avons ainsi un groupe abélien monoparamétrique de transformations ponctuelles $\underset{\tau v}{T}$ qui associent au point sur la trajectoire correspondant à la valeur $t$ du paramètre le point correspondant à la valeur $t + \tau$.

Soit ensuite donné, sur la variété $X_n$, un champ de points contrevariants $u^a(\xi^\nu)$ $\left(\text{un agrégat de caractéristique } \left(1, 0, \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)\right)$; nous allons définir le champ de points contrevariants $*u^a(\xi^\nu)$.

Nous dirons que le point contrevariant $'u(\xi^\nu)$ est la translation parallèle du point contrevariant $u^a(\eta^\nu)$ suivant une courbe $\gamma$ joignant les points $\xi^\nu$, $\eta^\nu$ sur la variété $X_n$, lorsque $'u^a(\xi^\nu)$ est l'image du point $u^a(\eta^\nu)$ par l'homographie existant entre les espaces locaux $P_N(\eta)$, $P_N(\xi)$, associée à la courbe $\gamma$ donnée.

Le champ de points contrevariants $*u^a(\xi^\nu)$ c'est le champ que nous obtenons par translation parallèle suivant la trajectoire du champ vectoriel $v^\alpha = v^\alpha(\xi^\nu)$ sur $tv^\alpha$; cela signifie que nous procédons à la translation du point correspondant à la valeur $\tau$ du paramètre au point correspondant à $t + \tau$.

Considérons maintenant de plus près la trajectoire $\gamma$ passant par un point $\xi^\nu$ choisi sur $X_n$. Désignons par $\eta^\nu$ le point de la courbe $\gamma$ tel que

$$\eta^\alpha = \exp(-t\underset{v}{X})\,\xi^\alpha = \xi^\alpha - tv^\alpha + \frac{t^2}{2!}\,v^\nu\partial_\nu v^\alpha - \dots\,, \tag{7.3}$$

où l'on a $\eta^\alpha = \xi^\alpha$ pour $t = 0$. Nous pouvons évidemment écrire pour le champ de points contrevariants

$$*u^a(\xi^\nu) = u^a(\xi^\nu) + (\xi^\nu - \eta^\nu)\,[\partial_\nu *u^a]_{\eta^\nu} + \dots\,. \tag{7.4}$$

D'après la définition des points contrevariants $*u^a(\xi^\nu)$ nous savons que c'est un point $*X(\xi^\nu)$ pour lequel

$$*X(\xi^\nu) = u^b(\eta^\nu)\,\underset{b}{h^a}(\xi^\nu, \eta^\nu)\,A_a(\xi^\nu)\,, \tag{7.5}$$

ce qu'on trouve aisément à partir de (3.6). Nous avons donc

$$*u^a(\xi^\nu) = u^b(\eta^\nu)\,\underset{b}{h^a}(\xi^\nu, \eta^\nu)\,. \tag{7.6}$$

Comme nous savons que (3.13), donc aussi ($3.14_2$) a lieu, nous pouvons écrire

$$*u^a(\xi^\nu) = u^a(\eta^\nu) + tv^\lambda(\xi^\nu)\,u^b\eta^\nu[\partial_\lambda \underset{b}{h^a}]_{\eta^\nu} + \dots\,. \tag{7.7}$$

Si nous fixons le point $\eta^\nu$, la relation (7.7) pourra être écrite comme suit

$$*u^a(\xi^\nu) = u^a(\eta^\nu) + tv^\lambda\xi^\nu[\partial_\lambda *u^a]_{\eta^\nu} + \dots\,. \tag{7.8}$$

Il faut alors se rendre compte du fait que le point contrevariant $*u^a(\xi^\nu)$ satisfaisant à l'équation (7.7), ou (7.8) resp., c'est le point contrevariant $u^a(\xi^\nu)$ translaté parallèlement du point $\eta^\nu$ au point $\xi^\nu$ suivant la courbe $\gamma$. L'application $u^a(\xi^\nu) \to *u^a(\xi^\nu)$

sera désignée par l'opérateur $\overset{tv}{P}$ et l'on a

$$\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) = {}^*u^a(\xi^\nu)\,. \tag{7.9}$$

Soient maintenant $u^a(\xi^\nu)$, $v^a(\xi^\nu)$ deux champs de points contrevariants; $k$, $l$ étant deux constantes. Nous voyons alors que l'opérateur $\overset{tv}{P}$ jouit des propriété suivantes:

I. *Si $u^a(\xi^\nu)$ est un point contrevariant, $\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu)$ est aussi un point contrevariant.*

II. $\overset{tv}{P}(ku^a(\xi^\nu) + lv^a(\xi^\nu)) = k\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) + l\overset{tv}{P}\, v^a(\xi^\nu)$.

III. $\overset{sv}{P}\,\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) = \overset{(s+t)v}{P}\; u^a(\xi^\nu)$.

IV. $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}\{u^a(\xi^\nu) - \overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu)\} = v^\kappa\, \mathrm{D}_\kappa\, u^a(\xi^\nu)$.

La démonstration de la proposition citée découle immédiatement des raisonnements précedents. Puis, on voit (cf. [8]) que la relation suivante a lieu

$$\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) = \exp\left(-tv^\kappa\, \mathrm{D}_\kappa\right) u^a(\xi^\nu) = u^a(\xi^\nu) - tv^\kappa\, \mathrm{D}_\kappa v^a + \dots\,. \tag{7.10}$$

Calculons d'abord $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\; \overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu)$. Nous voyons alors que l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\{\overset{(t+\tau)u}{P}\; u^a(\xi^\nu) - \overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu)\} = \\ &= \overset{tv}{P}\,\{\lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}(\overset{\tau v}{P}\, u^a(\xi^\nu) - u^a(\xi^\nu)\} = -\overset{tv}{P}\, v^\kappa\, \mathrm{D}_\kappa u^a\,,\end{aligned}$$

et, d'une manière tout analogue, nous voyons que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\overset{tv}{P}\, u^a(\xi^\nu) = (-1)^k\, \overset{tv}{P}(v^\kappa\, \mathrm{D}_\kappa)^k\, u^a(\xi^\nu)$$

a lieu; cela achève notre démonstration.

Ayons maintenant sur $X_n$ deux champs vectoriels $u^\alpha$, $v^\alpha$; soeint $u$, $v$ les paramètres correspondant à ces deux champs. Supposons que nous ayons

$$\underset{u}{\mathscr{L}} v^\alpha = 0\,. \text{ [7]} \tag{7.11}$$

Soit donné sur la variété $X_n$ un champ de points contrevariants $u^a(\xi^\nu)$. Procédons à une translation parallèle du point contrevariant $u^a(\xi^\nu)$ sur $uu^\alpha$, ensuite sur $vv^\alpha$, puis sur $-uu^\alpha$, et enfin sur $-vv^\alpha$. En vertu de la relation (7.11) les quatre transformations ponctuelles $\overset{uu^\alpha}{T}, \dots$ appliquées dans l'ordre mentionné nous ramènent en fin de compte à la position initiale. Nous allons trouver maintenant le point contrevariant que nous obtenons par la transformation mentionnée. Nous voyons que

---

[7]) Le symbole $\mathscr{L}$ désigne la dérivée de Lie.

$$(7.12)\qquad 'u^a(\xi^\nu) = \overset{-vv^\alpha}{P}\;\overset{-uu^\alpha}{P}\;\overset{vv^\alpha}{P}\;\overset{uu^\alpha}{P}\,u^a(\xi^\nu) =$$

$$= \exp(vv^\kappa \mathrm{D}_\kappa)\exp(uu^\kappa \mathrm{D}_\kappa)\exp(-vv^\kappa \mathrm{D}_\kappa)\exp(-uu^\kappa \mathrm{D}_\kappa)\,u^a(\xi^\nu) =$$

$$= u^a(\xi^\nu) - uv(u^\nu \mathrm{D}_\nu\, v^\mu \mathrm{D}_\mu - v^\nu \mathrm{D}_\nu\, u^\mu \mathrm{D}_\mu)\,u^a + \dots .$$

En vertu de (6.28) on a évidemment

$$(7.13)\qquad (u^\nu \mathrm{D}_\nu\, v^\mu \mathrm{D}_\mu - v^\nu \mathrm{D}_\nu\, u^\mu \mathrm{D}_\mu)\,u^a = 2\mathrm{D}_{[\nu}\mathrm{D}_{\mu]}u^a u^\nu v^\mu +$$

$$+ 2S^{\mu}_{\alpha\nu}\mathrm{D}_\mu u^a v^\alpha u^\nu + (\underset{u}{\mathscr{L}} v^\mu)\,\mathrm{D}_\mu u^a = R^a_{\nu\mu b}u^b u^\nu v^\mu + (\underset{u}{\mathscr{L}} v^\mu)\,\mathrm{D}_\mu u^a .$$

Les relations (7.11), (7.12), (7.13) nous donnent alors

$$(7.14)\qquad 'u^a(\xi^\nu) = u^a(\xi^\nu) - uvu^\alpha u^\beta R^a_{\alpha\beta b}\,.\,u^b(\xi^\nu)\,.$$

Nous voyons donc que le point contrevariant $'u^a(\xi^\nu)$ que nous obtenons par translation du point contrevariant $u^a(\xi^\nu)$ suivant une courbe fermée ne dépend pas de la façon dont nous choisissons la connexion affine auxiliaire sur la variété $X_n$, mais seulement de la connexion de la variété $P^n_{pN}$, ou plus exactement de dépend que de l'agrégat de courbure-torsion. La variété $X_n$ joue seulement le rôle du domaine des paramètres. En vertu des équations (7.14) nous voyons que

$$(7.15)\qquad R^M_{\alpha\beta A} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $P_p(\xi^\nu)$ — centre de l'espace local $P_N(\xi^\nu)$ — reste inchangé (se transforme en lui-même) par le transfer parallèle suivant une courbe fermée. Si

$$(7.16)\qquad R^b_{\alpha\beta a} = 0\,,$$

alors le transfer parallèle de l'espace local $P_N(\xi^\nu)$ du point ${}^1\xi^\nu$ au point ${}^2\xi^\nu$ ne dépend pas de la courbe joignant les deux points en question.

## II. VARIÉTÉ $A^n_{pN}$ A CONEXION AFFINE

Supposons à présent que les espaces locaux soient des espaces affines $A_N(\xi^\nu)$ à $N$ dimensions et que ce soient les espaces tangents à la variété fondamentale $X_n$. Dans l'espace $A_N(\xi^\nu)$ choisissons un repère

$$(8.1)\qquad M, I_1, \dots, I_N\,.$$

Soient $M, I_a$[8]) des fonctions scalaires du point $\xi^\nu$ de la variété $X_n$ et soit $M$ un point de la variété $X_n$. Dans chaque espace local $A_N(\xi^\nu)$ soit donné un sous-espace $A_p(\xi^\nu)$

[8]) Dans cette deuxième partie nous écrivons partout:

$$a, b, \dots = 1, 2, \dots, N; \qquad M, P, \dots = q+1, \dots, n,\ n+p-q+1, \dots, N;$$
$$\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n; \qquad A, B, \dots = 1, \dots, q,\ n+1, \dots, n+p-q;$$
$$\tilde{a} = 0, 1, \dots, N; \qquad \tilde{A} = 0, A\,.$$

à $p$ dimensions ($0 \leqq p \leqq N$), appelé centre, et dans ce sous-espace choisissons un repère

$$(8.2)\qquad M, I_1, \ldots, I_q, \ldots, I_{n+p-q}, \quad q = \min(p, n)\,.$$

La connexion de la variété $A^n_{pN}$ soit donnée par les équations

$$(8.3)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega^a I_a\,, & \omega^a &= \Gamma^a_\alpha \,\mathrm{d}\xi^\alpha\,, \\ \mathrm{d}I_a &= \omega^b_a I_b\,, & \omega^b_a &= \Gamma^b_{a\alpha}\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,. \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions $\Gamma^a_\alpha, \Gamma^\beta_{a\alpha}$ sera appelé *objet de la connexion de la variété* $A^n_{p,N}$. Les changements admissibles de la base locale sont

$$(8.4)\qquad \begin{gathered} I_a = \varrho^{a'}_a I_{a'}\,, \quad \varrho^{M'}_A = 0\,, \quad \varrho = \mathrm{Dét}\,|\varrho^{a'}_a| \neq 0\,, \\ M = M' + \varrho^{\alpha'} I^{\alpha'}\,, \quad \varrho^{M'} = 0\,. \end{gathered}$$

Les changements admissibles des paramètres de la base fondamentale de $X_n$ soient (1.1). Si nous n'admettons que les transformations affines (8.4) de la base et les changements (1.1) des paramètres, nous obtenons immédiatement par spécialisation du cas projectif la définition de l'agrégat affine de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & s \\ & ,\, p, & \\ v & & t \end{pmatrix}$ et sa différentielle covariante en specialisant les raisonnements précédents.

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{D}V^{\nu_1\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V^{\nu_1\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}\big(G^{\nu_1}_{\alpha\mu} V^{\alpha\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t} + \ldots \\ &\quad - G^\alpha_{\lambda\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\alpha\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t} - \ldots + \Gamma^{a_1}_{c\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\;c\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t} + \\ &\quad - \ldots - \Gamma^c_{b_1\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;c\ldots b_t} - \ldots + pG^\alpha_{\alpha\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_u\;a_1\ldots a_s}_{\lambda_1\ldots\lambda_v\;b_1\ldots b_t}\big)\,, \end{aligned}$$

où $G^\beta_{\alpha\mu}, G^\beta_\alpha$ est l'objet de la connexion affine auxiliaire définie sur la variété $X_n$ par les équations

$$(8.6)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}N &= \varpi^\alpha J_\alpha\,, & \varpi^\alpha &= G^\alpha_\beta\,\mathrm{d}\xi^\beta\,, \\ \mathrm{d}J_\alpha &= \varpi^\beta_\alpha J_\beta\,, & \varpi^\beta_\alpha &= G^\beta_{\alpha\gamma}\,\mathrm{d}\xi^\gamma\,, \end{aligned}$$

d'où par changements des paramètres (1.1) et de la base locale

$$(8.7)\qquad J_\alpha = A^{\alpha'}_\alpha J_{\alpha'}\,, \quad J_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} J_\alpha\,.$$

Lorsque nous nous bornons aux agrégats de caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & & s \\ & ,\, 0, & \\ 0 & & t \end{pmatrix}$, nous obtenons, en principe, la différentielle covariante du tenseur généralisé au sens du travail [11].

Supposons maintenant que dans l'espace local $A_N(\xi)$ la base soit choisie de telle que $M, I_1, \ldots, I_n$ soit le repère de l'espace tangent à la variété $X_n$ au point $\xi^\nu$ et que l'espace local soit l'enveloppe linéaire de cet espace tangent et de l'espace affine à $(N - n)$ dimensions associé à tout point $\xi^\nu$ de la variété $X_n$. L'espace tangent et l'espace $(N - n)$-dimensionnel mentionné sont supposés avoir un et un seul point commun, savoir $M(\xi^\nu)$. La variété $A^n_{pN}$ dont les espaces locaux sont définis de cette manière-là sera désignée par $\tilde{A}^n_{pN}$, tandis que $A^n_{pN}$ dénotera une variété prise au sens bien connu (voir [11]), dont les espaces locaux sont des espaces affines à $N$ dimensions. Nous pouvons donc considérer la connexion de la variété $X_n$, donnée par les équations (8.6), comme connexion induite sur la variété $X_n$ par une „$(N-n)$-direction normale“; pour un choix convenable de la base (8.1)

$$I_\alpha = J_\alpha\,, \tag{8.8}$$

la connexion de la variété $X_n$ sera donnée par les équations

$$G^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_\beta\,, \quad G^\beta_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\,. \tag{8.9}$$

Nous voyons que par différentiation covariante d'un agrégat affine de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & s \\ & ,p, & \\ v & & t \end{pmatrix}$ nous obtenons un agrégat affine de caractéristique $\begin{pmatrix} u & & s \\ & ,p, & \\ v+1 & & t \end{pmatrix}$. D'une manière tout à fait analogue au cas projectif nous obtenons le tenseur généralisé de courbure-torsion (agrégat affine de caractéristique $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & ,0, & \\ 3 & & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & ,0, & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$ – soit tout court: tenseur de courbure-torsion.

$$\begin{aligned} G^\nu_{\alpha\beta\lambda} &= 2\partial_{[\alpha}G^\nu_{|\lambda|\beta]} + 2G^\nu_{\mu[\alpha}G^\mu_{|\lambda|\beta]}\,; \quad S^\nu_{\alpha\beta} = G^\gamma_{[\alpha\beta]}\,, \\ R^b_{\alpha\beta\tilde{a}} &= 2\partial_{[\alpha}\Gamma^b_{|\tilde{a}|\beta]} + 2\Gamma^b_{c[\alpha}\Gamma^c_{|\tilde{a}|\beta]}\,, \quad (\Gamma^a_{0\alpha} = \Gamma^a_\alpha)\,. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Nous appellerons *tenseur de courbure les agrégats* $G^\nu_{\alpha\beta\lambda}$, $R^b_{\alpha\beta a}$. Par le *tenseur de torsion ponctuelle* nous entendrons

$$S^\nu_{\alpha\beta},\ R^M_{\alpha\beta\tilde{A}},\ R^M_{\alpha\beta A}\,. \tag{8.11}$$

Nous savons dèjà que $R^b_{\alpha\beta\tilde{a}} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété $A^n_{pN}$ soit un système à $n$ paramètres de sous-espaces à $p$ dimensions d'un espace affine à $N$ dimensions.

$$R^b_{\alpha\beta a} = 0 \tag{8.12}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que tout vecteur de l'espace vectoriel $\mathscr{A}_N(\xi^\nu)$ de l'espace local affine $A_N(\xi^\nu)$ soit invariant par le transfer parallèle de l'espace local suivant une courbe fermée sur la variété $X_n$. Les raisonnements faits dans le cas projectif entraînent que

$$R^M_{\alpha\beta\tilde{A}} = 0 \tag{8.13}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace affine $A_p$ (centre de l'espace local $A_N$) soit invariant par le transfer parallèle de l'espace local suivant une courbe fermée, invariant en tant qu'espace ponctuel, mais non pas point par point. Si nous avons

$$R^M_{\alpha\beta A} = 0 \tag{8.14}$$

($R^M_{\alpha\beta A}$ est appelé *tenseur de torsion de direction*), alors la direction $A_p(\xi^\nu)$ du centre $A_p(\xi^\nu)$ de l'espace local $A_N(\xi^\nu)$ reste inchangée par le transfer parallèle suivant une courbe fermée, et réciproquement.

Si nous étudions au lieu de la variété $\tilde{A}^n_{pN}$ la variété plus générale $A^n_{pN}$ et que la connexion affine de la variété $X_n$ soit donnée tout à fait arbitrairement comme une connexion auxiliaire, nous voyons que la signification géométrique de l'annulation du tenseur de courbure-torsion et de ses sous-tenseurs, donnée ci-dessus, reste la même également pour la variété $A^n_{pN}$ et ne dépend pas du choix de la connexion auxiliaire. Nous n'allons pas nous intéresser de plus près au fait que la théorie développée ici est une généralisation du calcul tensoriel classique: Il est manifeste que c'est une généralisation et un complément du calcul tensoriel généralisé de M. A. Švec (voir [11]), où les rapports au calcul tensoriel classique sont clairement expliqués.

*Littérature*


[1] *E. Cartan:* Leçons sur la théorie des espaces â connexion. Paris 1937.

[2] *E. Cartan:* Sur les variétés à connexion projective. Bull. Soc. Math. France *52* (1924), 205—241.

[3] *B. Cenkl:* La normale d'une surface dans l'espace â connexion projective. Czechoslovak Math. J. *12* (1962), 582—606.

[4] *B. Cenkl:* Réseaux semi-conjugués sur une surface dans l'espace à connexion projective à quatre dimensions. Czechoslovak Math. J. *13* (1963), 492—506.

[5] *J. Havelka:* K problému zobecnění afinní normály. Thèse, Brno, mars 1961.

[6] *V. Hlavatý:* Espaces abstraits, courbes de König. Rendinconti Circ. Mat. Palermo *59* (1935), 1—39.

[7] *Т. Ф. Лаптев:* Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. ДАН *126*, Но 3, (1959), 490—493.

[8] *A. Nijenhuis:* Theory of the Geometric Object. Amsterdam 1952.

[9] *А. П. Норден:* Пространства аффинной связности. Москва 1950.

[10] *J. A. Schouten:* Ricci-Calculus. Berlin 1954.

[11] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czechoslovak Math. J. *10* (1960), 523—550.

[12] *K. Yano:* Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des „paths". Annales Scient. Univers. Iassy *24* (*2*), (1938), 395—463.


## Резюме

## ОБОБЩЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КЕНИГА


БОГУМИЛ ЦЕНКЛ (Bohumil Cenkl), Прага



В работе изучаются обобщенные многообразия Кенига с проективной связностью $P^n_{p,N}$. Вводится т. наз. *обобщенное тензорное исчисление.* Проективный агреагат некоторой характеристики, являющийся обобщением класси-

ческого понятия тензора, определяется как множество функций $V^{\nu_1 \dots \nu_u \, a_1 \dots a_s}_{\lambda_1 \dots \lambda_v \, b_1 \dots b_t}$, удовлетворяющих соотношению (2.2). Связность многообразия $P^n_{p,N}$ дана системой уравнений (3.4). Далее показано, что можно ввести проективный дифференциал агрегат любой характеристики, если ввести вспомогательную аффинную связность на основном многообразии $X_n$. На многообразии $P^n_{p,N}$ с проективной связностью определяется обобщенный тензор кривизны и показана связь с тензором кривизны, определенным при помощи уравнений структуры (6.10). Агрегат кривизны-кручения определяется уравнениями (6.20), а агрегат кручения – уравнениями (6.21). Обобщенный тензор кривизны и агрегат кривизны-кручения являются, собственно говоря, обобщением тензора кривизны многообразия со связностью в классической концепции, если исходить из $\Omega$-объекта связности (6.24) или из $G$ объекта связности (6.25) многообразия $P^u_{p,N}$. Показано, что равенство нулю агрегата кручения является необходимым и достаточным условием для того, чтобы центр локального пространства был инвариантным при параллельном переносе локального пространства по замкнутой кривой.

Во второй части работы указанные результаты применяются к многообразию $A^n_{p,N}$ с аффинной связностью. В этом случае характеризуется равенство нулю двух аффинных агрегатов кручения, а именно аффинного агрегата точечного кручения и аффинного агрегата кручения направлений. Равенство нулю аффинного агрегата точечного кручения имеет тот же геометрический смысл, как и равенство нулю проективного агрегата кручения. Однако, для того, чтобы был инвариантным только замер центра локального пространства при параллельном переносе локального пространства по замкнутой кривой, необходимо и достаточно, чтобы аффинный аггрегат кручения направлений был тождественно равен нулю.