Michal Greguš

Über einige Randwertprobleme dritter Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 551–560

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100586`

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

ÜBER EINIGE RADWERTPROBLEME DRITTER ORDNUNG

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

(Eingegangen am 31. Juli 1961)

In der Arbeit sind drei Arten von Randwertproblemen gelöst, welche sich auf die Differentialgleichung der Form (a) beziehen, deren Koeffizienten Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und vom Parameter $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ sind und gewisse Voraussetzungen erfüllen. Die Lösung der Randwertprobleme ist mit Hilfe der Eigenschaften der sogenannten Büschel von Lösungen der Differentialgleichung (a) durchgeführt. Im letzten Teil der Arbeit ist ein Problem gelöst, welches sich auf die Existenz der Nullstellen der Ableitung der Lösungen der Differentialgleichung (a) bezieht. Das Problem wurde in der Arbeit [1] für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelöst.

Einleitung. In den Arbeiten [2], [3] wurde ein Randwertproblem, welches sich auf die Differentialgleichung

$$y''' + 2Ay' + [A' + b]\, y = 0 \tag{a}$$

und die Randbedingungen

$$y(a) = 0\,, \quad \alpha_1 y(b) - \alpha y'(b) = 0\,, \quad \beta_1 y(c) - \beta y'(c) = 0$$
$$(-\infty < a < b < c < \infty)$$

bezieht, unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung (a) gelöst.

Im ersten Teil der Arbeit lösen wir dasselbe Randwertproblem dritter Ordnung, allerdings unter anderen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung (a).

Im zweiten Teil werden zwei ähnliche Randwertprobleme gelöst, in welchen die erste Randbedingung im ersten Falle $y'(a) = 0$ und im zweiten Falle $y''(a) = 0$ ist. Dabei werden die sog. Büschel von Lösungen zweiter und dritter Art gebraucht. Im dritten Teil wird die Existenzfrage der Nullstellen der Ableitung der Lösung y der Differentialgleichung (a) mit den Anfangsbedingungen $y(a) = y'(a) = 0$ behandelt.

Unter gewissen Bedingungen hat nämlich die Lösung links von a keine Nullstellen, aber ihre erste Ableitung kann dort Nullstellen haben.

Mit dieser Frage beschäftigte sich G. SANSONE [1] für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

1. Betrachten wir nun zwei Differentialgleichungen der Form (a)

$$(a_1) \qquad y''' + 2Ay' + (A' + b_1)\, y = 0\,,$$

$$(a_2) \qquad z''' + 2Az' + (A' + b_2)\, z = 0\,.$$

Wir setzen voraus, dass $A'(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ stetige Funktionen mit $0 \leqq b_1(x) \leqq \leqq b_2(x)\,(x \in (-\infty, \infty))$ sind; es gelte jedoch $b_1(x) \equiv 0$ in keinem Intervall. Dann gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Wenn jede Lösung der Differentialgleichung* (a_1) *mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen hat, dann hat auch jede Lösung der Differentialgleichung* (a_2) *mit einer Nullstelle diese Eigenschaft. Wenn ferner* $y(x)$ *eine Lösung von* (a_1) *und* $z(x)$ *eine Lösung von* (a_2) *mit den Eigenschaften* $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$, $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) \neq 0$ *ist, dann ist die erste rechts von a liegende Nullstelle der Lösung* $z(x)$ *nicht grösser als die erste rechts von a liegende Nullstelle der Lösung* $y(x)$.

Beweis. Es ist bekannt [4], dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass jede Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen hat, ist, dass jede Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit einer doppelten Nullstelle wenigstens noch eine weitere Nullstelle hat.

Setzen wir also voraus, dass die Lösungen der Differentialgleichung (a_1) oszillieren, d.h., dass jede Lösung mit einer Nullstelle deren zugleich unendlich viele hat. Es sei $y(x)$ eine Lösung von (a_1) und $z(x)$ eine Lösung von (a_2) mit $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) = y''(a)$. Ferner sei x_1 die erste rechts von a liegende Nullstelle der Lösung y und $\bar{x}_1$ sei die erste rechts von a liegende Nullstelle der Lösung z. Es muss gezeigt werden, dass $\bar{x}_1 \leqq x_1$ gilt.

Statt (a_2) können wir

$$z''' + 2Az' + (A' + b_1)\, z = -(b_2 - b_1)\, z$$

schreiben. Es sei y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem von (a_1), dessen Wronskische Determinante gleich 1 ist. Durch die Variation der Konstanten kann man leicht festellen, dass

$$(1) \qquad z(x) = y(x) - \int_a^x [b_2(t) - b_1(t)]\, z(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t$$

gilt, wo

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \\ y_1(t), & y_2(t), & y_3(t) \\ y_1'(t), & y_2'(t), & y_3'(t) \end{vmatrix}$$

ist.

Es ist klar, dass $W(x, t)$ bei festem t eine Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte t darstellt. Es ist deshalb $W(x, t) \geqq 0$ für $t \leqq x \in \langle a, x_1 \rangle$. Aus der Beziehung (1) folgt dann schon die Behauptung unseres Satzes.

2. Im Folgenden seien die Koeffizienten $A = A(x)$, $A' = A'(x)$, $b = b(x) \geqq 0$ der Differentialgleichung (a) stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $b(x) \equiv 0$ gelte in keinem Intervall.

Es seien y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_1''(a) \neq 0$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) \neq 0$, $a \in (-\infty, \infty)$. Es ist bekannt [5], dass jede Lösung y der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$ als $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ geschrieben werden kann (c_1, c_2 sind Konstanten) und die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(c)} \qquad \omega y'' - \omega' y' + (\omega'' + 2A\omega)\, y = 0$$

erfüllt, wo $\omega = \omega(x)$ eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad z''' + 2Az' + (A' - b)\, z = 0$$

ist und folgende Eigenschaften hat: $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$.

Diese Menge der Lösungen wird als Büschel der ersten Art im Punkte a genannt.

Es ist weiter bekannt [4], dass es Lösungen y_1, y_2 von (a) gibt, welche die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Funktion $\omega = y_1 y_2' - y_1' y_2$ ist eine Lösung von (b) und ist auf der ganzen Zahlenachse von Null verschieden.
2. Die Funktionen y_1, y_2 bilden ein Fundamentalsystem von (c).

Es sei $\omega = e^{nx}$, n sei eine natürliche Zahl. Dann geht die Differentialgleichung (c) n die Form

$$\text{(c}_1\text{)} \qquad e^{nx} y'' - n e^{nx} y' + e^{nx}(n^2 + 2A)\, y = 0$$

über.

Wenn wir die Differentialgleichung (c_1) nach x differenzieren, so erhalten wir nach entsprechender Kürzung mit e^{nx} die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad y''' + 2Ay' + (A' + n^3 + 2An + A')\, y = 0\,.$$

Es ist bekannt [4], dass jede Lösung von (a) mit einer Nullstelle oszilliert, wenn die Gleichung (c) in irgendeinem Intervall (a, ∞) oszillatorisch ist.

Wenn $A(x) \geqq -k$, $k > 0$ ist, dann ist (c_1) für alle genügend grossen n oszillatorisch und mit $n \to \infty$ strebt die Entfernung zweier benachbarter Nullstellen gegen Null. Für genügend grosse n oszilliert also jede Lösung der Differentialgleichung (α) mit einer Nullstelle.

Wenn ferner $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (α) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a ist, dann konvergiert die Entfernung jeder ihrer zwei Nullstellen mit wachsendem n gegen Null, weil zu dem Büschel im Punkte a eine Lösung der Differentialgleichung (c_1), welche diese Eigenschaft besitzt, gehört.

Satz 2. (Oszillationssatz). *Die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a) $A = A(x, \lambda)$, $A' = \frac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b = b(x, \lambda)$ *seien stetige Funktionen von* $x \in \in (-\infty, \infty)$ *und* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$. *Es sei weiter* $|A(x, \lambda)| \leqq k$, $|A'(x, \lambda)| \leqq k$, $k > 0$ *für alle* $x \in (-\infty, \infty)$ *und* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *und es gelte* $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} b(x, \lambda) = +\infty$ *gleichmässig für alle* $x \in (-\infty, \infty)$. *Es seien* $a < b \in (-\infty, \infty)$ *feste Zahlen und* $y(x, \lambda)$ *sei eine Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft* $y(a, \lambda) = 0$. *Dann wächst mit wachsendem* $\lambda \to \Lambda_2$ *die Anzahl der Nullstellen der Lösung* y *in* (a, b) *ins Unendliche, wobei die Entfernung jeder zwei benachbarten Nullstellen gegen Null strebt.*

Beweis. Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Es sei $y(x, \lambda)$ eine Lösung von (a) und $z(x, n)$ eine Lösung von (α) mit $y(a, \lambda) = z(a, n) = 0$. Aus dem Oszillationssatze folgt die Existenz eines solchen $N > 0$, dass $z(x, n)$ für alle $n > N$ in (a, ∞) oszillatorisch ist. Wenn wir (a) mit (α) vergleichen, so sehen wir, dass zu jedem $n > N$ ein solches $\bar{\lambda} \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ existiert, dass für jedes $\lambda > \bar{\lambda}$, $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ die Beziehung $b(x, \lambda) \geqq \geqq n^3 + 2A(x, \lambda)\, n + A'(x, \lambda)$ besteht. Daher folgt aus dem Satz 1, dass $y(x, \lambda)$ oszilliert, sobald $z(x, n)$ in (a, ∞) oszilliert. Da mit wachsendem $n \to \infty$ auch die Anzahl der Nullstellen der Lösung $z(x, n)$ in (a, b) unbeschränkt wächst und dabei die Entfernung zweier benachbarter Nullstellen gegen Null strebt, so besitzt auch $y(x, \lambda)$ für $\lambda \to \infty$ diese Eigenschaft. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. (Randwertproblem). *Es seien die Voraussetzungen des Oszillationssatzes erfüllt. Ferner seien* a, b, c $(-\infty < a < b < c < \infty)$ *feste Zahlen und* $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ *stetige Funktionen des Parameters* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, *für welche* $|\alpha| + |\alpha_1| > 0$, $|\beta| + + |\beta_1| > 0$ *gilt, wobei für* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *entweder* $\beta(\lambda) \equiv 0$, *oder* $\beta(\lambda) \neq 0$ *ist.*

Dann existiert eine solche natürliche Zahl ν *und eine Folge* $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, *der Werte des Parameters* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *zu welchen solche Funktionen* $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ *gehören, dass* $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ *eine Lösung von* (a) *ist, die Randbedingungen*

$$y(a, \lambda_{\nu+p}) = 0\,,$$
$$\alpha_1(\lambda_{\nu+p})\, y(b, \lambda_{\nu+p}) - \alpha(\lambda_{\nu+p})\, y'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0\,,$$
$$\beta_1(\lambda_{\nu+p})\, y(c, \lambda_{\nu+p}) - \beta(\lambda_{\nu+p})\, y'(c, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

erfüllt und in (a, c) *gerade* $\nu + p$ *Nullstellen hat.*

Der Beweis des Satzes ist derselbe, wie der Beweis der entsprechenden Randwertprobleme in den Arbeiten [2], [3], nur ist es nötig anstatt der dort verwendeten Oszillationssätze den Satz 2 anzuwenden.

Im Beweis benutzt man die Eigenschaften des Büschels erster Art im Punkte a und die stetige Abhängigkeit der Nullstellen jeder Lösung des Büschels vom Parameter λ.

Die erste Randbedingung ist für jede Lösung des Büschels $c_1 y_1 + c_2 y_2$ erfüllt und die zweite Randbedingung erhält man durch passende Wahl der Konstanten c_1, c_2.

Bemerkung. Durch eine geeignete Wahl von α, α_1, β, β_1 erhalten wir verschiedene Arten von Randbedingungen wie in den Arbeiten [2], [3].

3. $A = A(x)$, $A' = A'(x)$, $b = b(x) \geqq 0$ seien stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $b(x) \equiv 0$ gelte in keinem Intervall. Es ist bekannt [1], dass für die Lösungen der Differentialgleichung (a) folgende Integralidentitäten gelten:

(2) $yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2 \, \mathrm{d}t = \text{Konst},$

(3) $y'' + 2Ay + \int_a^x (b - A')\, y \, \mathrm{d}t = \text{Konst}.$

Für die Lösungen der Differentialgleichung (b) erhält man analogische Identitäten, wenn man in (2) und (3) $-b(x)$ anstatt $b(x)$ schreibt.

Es sei y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_1''(a) = 1$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$, $y_3'(a) = y_3''(a) = 0$, $y_3(a) = 1$.

Es ist bekannt [1], dass $\omega_1 = y_1 y_2' - y_1' y_2$, $\omega_2 = y_1 y_3' - y_1' y_3$, $\omega_3 = y_2 y_3' - y_2' y_3$ Lösungen der Differentialgleichung (b) sind, welche die Eigenschaften $\omega_1(a) = \omega_1'(a) = 0$, $\omega_1''(a) = -1$, $\omega_2(a) = \omega_2''(a) = 0$, $\omega_2'(a) = -1$, $\omega_3'(a) = 0$, $\omega_3(a) = -1$, $\omega_3''(a) = 2A(a)$ haben. Es gilt folgender

Satz 4. *Für $x > a$ ist $\omega_1(x) \neq 0$. Wenn $A(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, dann ist $\omega_3(x) \neq 0$ für $x > a$. Wenn $A(x) \leqq 0$, $A'(x) + b(x) \geqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, dann ist auch $\omega_2(x) \neq 0$ und $\omega_2'(x) \neq 0$ für $x > a$.*

Beweis. Die erste Behauptung folt unmittelbar aus der Integralidentität (2) für die Lösung $\omega_1(x)$ der Differentialgleichung (b).

Die Integralidentität (2) für die Lösung $\omega_3(x)$ lautet

$$\omega_3 \omega_3'' - \tfrac{1}{2}\omega_3'^2 + A\omega_3^2 - \int_a^x b\omega_3^2 \, \mathrm{d}t = -A(a)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung für $\omega_3(x)$.

Die Integralidentität (3) für $\omega_2(x)$ lautet

$$\omega_2'' + 2A\omega_2 - \int_a^x (A' + b)\, \omega_2 \, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Wenn wir von hier für ω_2'' in die Beziehung $(\omega_2 \omega_2')' = \omega_2 \omega_2'' + \omega_2'^2$ einsetzen, so erhalten wir

$$(\omega_2 \omega_2')' = -2A\omega_2^2 + \omega_2 \int_a^x (A' + b)\, \omega_2 \, \mathrm{d}t + \omega_2'^2\,.$$

Daraus folgt die Behauptung für $\omega_2(x)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bezeichnung. Die Menge der Lösungen $c_1 y_1 + c_2 y_2$, wo c_1, c_2 beliebige Konstanten sind, werden wir ferner als Büschel von Lösungen der Differentialgleichung (a) zweiter Art im Punkte a bezeichnen.

Ähnlich werden wir die Menge der Lösungen $c_1 y_2 + c_2 y_3$, wo c_1, c_2 beliebige Konstanten sind, als Büschel von Lösungen dritter Art der Differentialgleichung (a) im Punkte a bezeichnen.

Es ist bekannt [5], dass jedes Element der angeführten Büschel die Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form (c) erfüllt, in welcher $\omega = \omega_2$ für den Fall des Büschels zweiter, und $\omega = \omega_3$ für den Fall des Büschels dritter Art zu setzen ist.

Satz 5. *Es sei $\omega_1(x) \neq 0$, $\omega_2(x) \neq 0$, $\omega_3(x) \neq 0$ für $x > a$. Wenn die Lösungen des Büschels erster Art im Punkte a für $x > a$ oszillatorisch sind, dann sind auch die Lösungen der Büschel zweiter und dritter Art im Punkte a für $x > a$ oszillatorisch.*

Der Beweis folgt aus der Konstruktion der Büschel und aus der Eigenschaft der Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form (c).

Es seien $0 \geqq A(x, \lambda) \geqq -k$, $k > 0$, $|A'(x, \lambda)| \leqq k$, $b(x, \lambda) > 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Ferner sei $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} b(x, \lambda) = +\infty$ gleichmässig für alle $x \in (-\infty, \infty)$. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Behauptung des Oszillationssatzes 2 auch für die Büschel zweiter und dritter Art, und es kann folgender Satz bewiesen werden:

Satz 6. *Es seien $a, b, c (-\infty < a < b < c < \infty)$ feste Zahlen und $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ seien Funktionen mit denselben Eigenschaften wie im Satz* 3. *Es sei ferner i eine der Zahlen* 1, 2.

Dann existiert eine solche natürliche Zahl ν und eine Folge $\lambda_\nu^i, \lambda_{\nu+1}^i, \ldots, \lambda_{\nu+p}^i, \ldots$, der Werte des Parameters $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ zu welchen solche Funktionen $y_\nu^i, y_{\nu+1}^i, \ldots, \ldots, y_{\nu+p}^i, \ldots$ gehören, dass $y_{\nu+p}^i = y(x, \lambda_{\nu+p}^i)$ eine Lösung von (a) *ist, die Randbedingungen*

$$y^{(i)}(a, \lambda_{\nu+p}^i) = 0,$$

$$\alpha_1(\lambda_{\nu+p}^i)\, y(b, \lambda_{\nu+p}^i) - \alpha(\lambda_{\nu+p}^i)\, y'(b, \lambda_{\nu+p}^i) = 0,$$

$$\beta_1(\lambda_{\nu+p}^i)\, y(c, \lambda_{\nu+p}^i) - \beta(\lambda_{\nu+p}^i)\, y'(c, \lambda_{\nu+p}^i) = 0$$

erfüllt und in (a, c) gerade $\nu + p$ Nullstellen hat.

Bemerkung. Wenn man $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ passend wählt, so erhält man spezielle Randwertprobleme. Setzen wir z.B. $\alpha_1 \equiv 0$, $\beta_1 \equiv 0$, so haben wir die Randbedingungen

$$y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$$

oder

$$y''(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0.$$

Ähnlich kann $a = b$ gesetzt und $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ entsprechend gewählt werden.

4. Die Koeffizienten $A = A(x)$, $A' = A'(x)$, $b = b(x) \geqq 0$ der Differentialgleichung (a) seien stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $b(x) \equiv 0$ gelte in keinem Intervall.

Es sei $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, $a \in (-\infty, \infty)$.

Aus der Integralidentität (2) folgt, dass $y(x)$ links von a keine Nullstelle hat. Wenn $A(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, dann hat sogar die erste Ableitung von $y(x)$ keine links von a liegenden Nullstellen.

Weiterhin setzen wir voraus, dass $A(x) > 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist.

G. Sansone [1] hat für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten folgenden Satz bewiesen:

Es seien $A(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$ solche stetige Funktionen des Parameters $\lambda \in (\Lambda_0, \infty)$, dass $A(\lambda) > 0$, $\Omega(\lambda) > 0$ und

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty\,, \quad \frac{\Omega(\lambda)}{[2A(\lambda)]^{3/2}} \leqq \frac{2 \log 3}{9\pi}\,.$$

$\delta > 0$ sei eine beliebige Zahl. Dann existiert ein solches $\lambda_0 \in (\Lambda_0, \infty)$ und eine solche Lösung $y(x, \lambda)$ (einzige Lösung bis auf die lineare Abhängigkeit) der Differentialgleichung

$$y''' + 2A(\lambda)\, y' + \Omega(\lambda)\, y = 0 \tag{4}$$

mit der Eigenschaft $y'(a, \lambda) = 0$, welche zusammen mit der ersten Ableitung $y'(x, \lambda)$ für $\lambda > \lambda_0$ in irgendeinem Punkt des Intervalls $(a, a + \delta)$ verschwindet.

Ist die Funktion $\Omega(\lambda)/A(\lambda)$ beschränkt, so existiert für unendlich viele Werte des Parameters λ eine Lösung $y(x, \lambda)$ von (4), welche die Randbedingungen

$$y'(a, \lambda) = 0\,, \quad y(a + \delta, \lambda) = y'(a + \delta, \lambda) = 0$$

erfüllt.

Lemma 1. *Es sei y eine Lösung von* (a) *und z eine Lösung von* (b) *mit* $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$, $z(\bar{x}) = z''(\bar{x}) = 0$, $z'(\bar{x}) \neq 0$. *Dann sind die Beziehungen* $z(a) = 0$ *und* $y'(\bar{x}) = 0$ *äquivalent.*

Der Beweis des Lemma ist dem Beweis des Satzes 3 in der Arbeit [6] vollkommen ähnlich.

5. Betrachten wir die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$u''' + 2A_0 u' + \Omega_0 u = 0\,, \tag{5}$$

wo $A_0 > 0$, $\Omega_0 > 0$ Konstanten sind.

Die zu der Differentialgleichung (5) adjungierte Differentialgleichung lautet

$$v''' + 2A_0 v' - \Omega_0 v = 0\,. \tag{6}$$

Lemma 2. *Es sei* $A(x) \geqq A_0$, $A'(x) + b(x) \geqq \Omega_0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$; $v(x)$ *sei die Lösung der Differentialgleichung* (6) *mit der Eigenschaft* $v(a) = v''(a) = 0$, $v'(a) > 0$ *und* x_1 *sei die erste rechts von* a *liegende Nullstelle der Lösung* $v(x)$. *Für die erste Nullstelle* $\bar{x}_1 > a$ *der Lösung* $z(x)$ *der Differentialgleichung* (b) *mit der Eigenschaft* $z(a) = z''(a) = 0$, $z'(a) > 0$ *gilt dann* $\bar{x}_1 \leqq x_1$.

Beweis. Die Differentialgleichung (b) kann in der Form

$$z''' + 2A_0 z' - \Omega_0 z = 2(A_0 - A)\, z' + (b - A' - \Omega_0)\, z$$

geschrieben werden.

Durch die Variation der Konstanten kann man leicht feststellen, dass

$$(7) \qquad z(x) = v(x) + \int_a^x 2[A_0 - A(t)]\, z'(t)\, W(x, t)\, dt + \int_a^x [b(t) - A'(t) - \Omega_0] \,.\, z(t)\, W(x, t)\, dt$$

gilt wo

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} v_1(x), & v_2(x), & v_3(x) \\ v_1(t), & v_2(t), & v_3(t) \\ v_1'(t), & v_2'(t), & v_3'(t) \end{vmatrix}$$

ist. Dabei stellt v_1, v_2, v_3 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (6), dessen Wronskische Determinante gleich 1 ist, dar.

$W(x, t)$ ist bei festem t eine Lösung der Differentialgleichung (6), und aus der Integralidentität (2) folgt, dass $W(x, t) \geqq 0$ für $x \geqq t$ gilt.

$W_t'(x, t) = W_1(x, t)$ ist bei festem t eine Lösung der Differentialgleichung (6) mit der Eigenschaft $W_1(t, t) = 0$, $W_{1x}'(t, t) = -1$, $W_{1xx}'(t, t) = 0$. Deshalb ist $W_1(x, t) \leqq 0$ für $t \leqq x \in \langle a, x_1 \rangle$. Die Beziehung (7) kann jedoch als

$$z(x) = v(x) + \int_a^x [A'(t) + b(t) - \Omega_0]\, z(t)\, W(x, t)\, dt - 2 \int_a^x [A_0 - A(t)] \,.\, z(t)\, W_1(x, t)\, dt$$

geschrieben werden. Daraus und aus den Voraussetzungen folgt die Behauptung des Lemma.

Satz 7. A_0, Ω_0 *seien solche positive Konstanten, dass eine nichttriviale Lösung* $u(x)$ *der Differentialgleichung* (5) *mit der Eigenschaft* $u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$, $a < b$ *existiert. Es sei weiter* $A(x) \geqq A_0$, $A'(x) + b(x) \leqq \Omega_0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dann existiert eine solche Lösung (die einzige bis auf die lineare Abhängigkeit) der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft* $y'(a) = 0$, *welche zusammen mit ihrer ersten Ableitung in irgendeinem Punkte des Intervalls* $\langle a, b \rangle$ *verschwindet.*

Der Beweis folgt aus Lemma 1 und 2.

Satz 8. $A = A(x, \lambda) > 0$, $A' = A'(x, \lambda) \leqq 0$ *seien stetige Funktionen von* $x \in (-\infty, \infty)$ *und* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, *wobei* $A'(x, \lambda) \equiv 0$ *in keinem Intervall gelte. Weiter* *sei* $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ *gleichmässig für alle* $x \in (-\infty, \infty)$ *und* $a, b (a < b)$ *seien feste Zahlen. Dann existiert für unendlich viele Werte (Eigenwerte) des Parameters* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *eine Lösung* $y(x, \lambda)$ *der Gleichung*

$$(\bar{a}) \qquad y''' + 2A(x, \lambda)\, y' = 0\,,$$

welche die Randbedingungen $y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$ *erfüllt.*

Beweis. Durch Differentiation der Gleichung

$$(\bar{c}) \qquad z'' + 2A(x, \lambda)\, z = 0$$

erhalten wir die zu $(\bar{a})$ adjungierte Differentialgleichung

$$(\bar{b}) \qquad z''' + 2A(x, \lambda)\, z' + 2A'(x, \lambda)\, z = 0\,.$$

Es sei $z(x, \lambda)$ eine Lösung von $(\bar{c})$ mit $z(a, \lambda) = 0$. Dann ist auch $z''(a, \lambda) = 0$ und z ist zugleich eine Lösung von $(\bar{b})$. Aus dem Sturmschen Oszillationssatz für die Differentialgleichung zweiter Ordnung geht hervor, dass für unendlich viele Werte des Parameters $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ eine Lösung $z(x, \lambda)$ von $(\bar{c})$ existiert, welche die Bedingungen $z(a, \lambda) = z(b, \lambda) = 0$ erfüllt. Da $z(x, \lambda)$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\bar{b})$ mit der Eigenschaft $z(a, \lambda) = z''(a, \lambda) = 0$, $z(b, \lambda) = 0$ ist, so existieren für die erwähnten Eigenwerte nach Lemma 1 Eigenfuntionen $y(x, \lambda)$, welche Lösungen der Differentialgleichung $(\bar{a})$ sind und die Randbedingungen $y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$ erfüllen. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] *G. Sansone:* Studi sulle equazioni differenziali lineari omogeneee di terzo ordine nel campo reale. Revista Matem. y Fisica Teorica, Serie A, Tucuman 1948, 195—253.

[2] *M. Greguš:* Homogénny okrajový problém pre integrály lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu. Acta facultatis Rerum naturalium U.C. Bratislava, *2*, 1957, 219—227.

[3] *M. Greguš:* Oszillatorische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0$, wo $A = A(x) \leqq 0$ ist. Czechoslovak math. Journal, T. *9* (*84*), 1959, 416—427.

[4] *M. Greguš:* Über einige Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Čas. pro pěst. mat., *87* (1962), 311—319.

[5] *M. Greguš:* O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *2*, 1955, 73—85.

[6] *M. Greguš:* O niektorých vžťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu. Acta facultatis Rerum naturalium U.C. Bratislava, *1*, 1956, 265—272.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ПРОБЛЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ (Michal Greguš), Братислава

В работе решено несколько краевых проблем, касающихся интегралов дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x, \lambda)\, y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0 \tag{a}$$

с краевыми условиями

$$y(a, \lambda) = 0\,, \quad \alpha_1(\lambda)\, y(b, \lambda) - \alpha(\lambda)\, y'(b, \lambda) = 0\,,$$
$$\beta_1(\lambda)\, y(c, \lambda) - \beta(\lambda)\, y'(c, \lambda) = 0\,,$$

или с краевыми условиями, в которых первое из этих условий $y(a, \lambda) = 0$ изменится в условие $y'(a, \lambda) = 0$, или в условие $y''(a, \lambda) = 0$, при определенных предположениях относительно коэффициентов дифференциального уравнения (a) и функций $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$, причем $a < b < c$ суть действительные числа.

Далее в работе решена проблема, касающаяся существования нулевых точек производной решения y дифференциального уравнения (a) со свойством $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = 0$, $y''(a, \lambda) \neq 0$. Эту проблему разрешил Дж. Сансоне [1] для решений дифференциального уравнения типа (a) с постоянными коэффициентами.