Czechoslovak Mathematical Journal

Alena Bílková

Sur la différentiabilité du tétraèdre de Frenet dans l'espace E_4

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 507–532

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100583

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DU TÉTRAÈDRE DE FRENET DANS L'ESPACE E_4

ALENA BÍLKOVÁ, Praha

(Reçu le 5 juillet 1961)

On étudie la classe différentielle des éléments du tétraèdre de Frenet pour une courbe régulière dans l'espace E_4, la courbe étant déterminée au moyen des coefficients dans les formules de Frenet. Le travail est une extension de deux articles de E. ČECH, consacrés aux mêmes problèmes.

Le présent travail forme une suite aux articles [1] et [2] de E. ČECH. Son but est d'étudier la classe différentielle des éléments du tétraèdre de Frenet pour une courbe régulière C dans l'espace E_4; la définition de la courbe régulière a été donnée dans les travaux mentionnés de Čech. Cette définition est d'ailleurs étroitement liée à celle de classe différentielle d'une fonction $f(t)$ signée par $\mathrm{cl}\, f$ que voici:

Définition 1. Nous dirons que $\mathrm{cl}\, f \geqq 0$ si la fonction $f(t)$ est continue; de même nous aurons $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ si $f(t)$ admet une dérivée $r^{\text{ème}}$ $f^{(r)}(t)$ continue; enfin $\mathrm{cl}\, f = \infty$ si $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ pour tout $r > 0$. Nous poserons $\mathrm{cl}\, f = r$ si $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ mais la relation $\mathrm{cl}\, f \geqq$ $\geqq r + 1$ n'a pas lieu. La classe différentielle d'une fonction vectorielle, ou bien encore la classe différentielle d'un produit extérieur sera définie comme le minimum des classes différentielles des composantes. Plus généralement, la classe différentielle d'un objet géométrique G est définie comme $\min_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{cl}\, G_\lambda$ où G_λ, $\lambda \in \Lambda$, sont les coordonnées non-homogènes de l'objet donné G.

Nous avons ensuite la

Définition 2. Une courbe C, c'est-à-dire un ensemble de points $X = X(t)$, sera dite régulière (et le paramètre t sera également dit régulier) si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) $\mathrm{cl}\, X \geqq 1$,

b) il existe un système orthonormal de vecteurs $e_i = e_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, et un système de fonctions scalaires $K_j = K_j(t)$, $j = 0, 1, 2, 3$, tels que l'on ait $\mathrm{cl}\, e_i \geqq 1$,

$\mathrm{cl}\, K_j \geqq 0$, $K_j \neq 0$ pour tout t, et que les grandeurs X, e_i, K_j soient liées par les formules de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1 \,, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2 \,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = -\, K_1 e_1 + K_2 e_3 \,, \quad \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t} = -\, K_2 e_2 + K_3 e_4 \,, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_4}{\mathrm{d}t} = -\, K_3 e_3 \,.$$

Posons

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \,. \tag{3}$$

Désignons ensuite par E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, les arêtes du tétraèdre de Frenet au point X, déterminées par les vecteurs e_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Soient F_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i < j$, les plans passant par le point X et déterminés par les vecteurs e_i, e_j; soient enfin G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, les hyperplans passant par X et orthogonaux aux arêtes E_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Pour les classes différentielles des éléments E_i, F_{ij}, G_i nous obtenons en vertu de la définition 1 les relations

$$\mathrm{cl}\, E_i = \min\left(\mathrm{cl}\, [X e_i],\ \mathrm{cl}\, e_i\right), \tag{4}$$

$$\mathrm{cl}\, F_{ij} = \min\left(\mathrm{cl}\, [X e_i e_j],\ \mathrm{cl}\, [e_i e_j]\right), \tag{5}$$

$$\mathrm{cl}\, G_i = \min\left(\mathrm{cl}\, e_i,\ \mathrm{cl}\, x_i\right). \tag{6}$$

Supposons maintenant qu'on s'est donné les valeurs

$$\mathrm{cl}\, K_i = r_i \,, \quad i = 0, 1, 2, 3 \,. \tag{7}$$

Nous aurons alors à déterminer à l'aide de (7) les valuers de $\mathrm{cl}\, X$, $\mathrm{cl}\, E_i$, $\mathrm{cl}\, F_{ij}$, $\mathrm{cl}\, G_i$, l'exception faite du cas banal de $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = \infty$.

Cependant, revenons encore à la définition 1. Il serait possible d'accepter la convention de ne considérer que des fonctions ayant partout la même classe différentielle. Alors $\mathrm{cl}\, f = 0$ signiferait que la fonction $f(t)$ est une fonction continue du paramètre t mais qu'elle n'admet en aucun point une dérivée continue. Or, dans le présent travail, *le problème sera envisagé d'un point de vuè plus général.* Ainsi, en écrivant $\mathrm{cl}\, f = 0$, nous entendrons par cela que la fonction $f(t)$ est continue dans tout le domaine où elle est définie, sans éliminer le cas où elle admette en certains points des dérivées (voire d'ordres supérieurs); toutefois il doit y avoir au moins un point où la dérivée n'existe pas ou bien n'est pas continue. Le cas de $\mathrm{cl}\, f = r$, $r > 0$, doit être interprété d'une façon analogue. En ce qui concerne les extrémités du domaine de définition de la fonction en question, la continuité et les dérivées devront être entendues comme continuité à gauche, ou à droite, etc.

Revenons maintenant au but principal de notre travail, et qui est de trouver la classe différentielle de certaines grandeurs, étant donné les valeurs (7). Si nous interprétons en (7) $\mathrm{cl}\, K_i$ de la façon plus générale dont nous venons de parler, il faudra aussi interpréter de la même façon les résultats que nous aurons obtenus.

Remarque 1. Si nous bornons nos considérations à un seul point, arbitraire mais fixe, alors $\mathrm{cl}\, f(t) = r$ signifie la même chose dans les deux interprétations possibles, à savoir: il existe au point donné une dérivée $r^{\text{ème}}$ continue, mais la dérivée d'ordre $r + 1$ n'existe pas ou bien n'est pas continue. (Cela signifie, bien entendu, que la fonction $f(t)$ doit être définie dans un certain voisinage du point t_0 donné; mais ce n'est que pour $t = t_0$ que nous examinons la valuer de $\mathrm{cl}\, f(t)$.) Comme le domaine de définition tout entier n'est que l'ensemble de ces points particuliers, nous voyons que les résultats auxquels nous aboutirons en acceptant l'interprétation plus générale de la notion de $\mathrm{cl}\, f(t)$, pourront être interprétés aussi bien au sens de la définition plus étroite: Si pour toutes les valeurs de i $\mathrm{cl}\, K_i$ a exactement la même valeur dans tous les points de l'intervalle où nous prenons les valeurs du paramètre t, alors toutes les grandeurs considérées auront aussi la même classe différentielle dans tous les points en question.

Tout le procédé de calcul est basé d'une part sur quelques formules, analogues aux formules (1), (2) et (3), d'autre part sur quelques raisonnements élémentaires concernant la classe différentielle d'une somme, d'un produit, etc, que nous allons donner dans ce qui suit.

Il nous faudra avant tout étendre le tableau (5.3) de l'article [1]. Dans ce but, les formules suivantes nous seront utiles:

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{d}[e_1e_2]}{\mathrm{d}t} = K_2[e_1e_3]\,, \quad \frac{\mathrm{d}[e_1e_3]}{\mathrm{d}t} = K_1[e_2e_3] - K_2[e_1e_2] + K_3[e_1e_4]\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}[e_1e_4]}{\mathrm{d}t} = K_1[e_2e_4] - K_3[e_1e_3]\,, \quad \frac{\mathrm{d}[e_2e_3]}{\mathrm{d}t} = -K_1[e_1e_3] + K_3[e_2e_4]\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}[e_2e_4]}{\mathrm{d}t} = -K_1[e_1e_4] + K_2[e_3e_4] - K_3[e_2e_3]\,, \quad \frac{\mathrm{d}[e_3e_4]}{\mathrm{d}t} = -K_2[e_2e_4]\,.$$

Les formules (1), (2) et (3) entraînent

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = K_0 + K_1x_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -K_1x_1 + K_2x_3\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -K_2x_2 + K_3x_4\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} = -K_3x_3\,.$$

Ensuite

$$(10)\qquad \begin{aligned} [Xe_1] &= -x_2[e_1e_2] - x_3[e_1e_3] - x_4[e_1e_4]\,, \\ [Xe_2] &= x_1[e_1e_2] - x_3[e_2e_3] - x_4[e_2e_4]\,, \\ [Xe_3] &= x_1[e_1e_3] + x_2[e_2e_3] - x_4[e_3e_4]\,, \\ [Xe_4] &= x_1[e_1e_4] + x_2[e_2e_4] + x_3[e_3e_4]\,, \end{aligned}$$

$$(11)\quad \frac{d[Xe_1]}{dt} = K_1[Xe_2]\,, \quad \frac{d[Xe_2]}{dt} = K_0[e_1e_2] - K_1[Xe_1] + K_2[Xe_3]\,,$$

$$\frac{d[Xe_3]}{dt} = K_0[e_1e_3] - K_2[Xe_2] + K_3[Xe_4]\,, \quad \frac{d[Xe_4]}{dt} = K_0[e_1e_4] - K_3[Xe_3]\,.$$

Enfin, nous nous servirons aussi des formules

$$(12)\quad \begin{aligned} [Xe_1e_2] &= \quad x_3e_4 - x_4e_3\,, & [Xe_1e_3] &= -x_2e_4 + x_4e_2\,, \\ [Xe_1e_4] &= \quad x_2e_3 - x_3e_2\,, & [Xe_2e_3] &= \quad x_1e_4 - x_4e_1\,, \\ [Xe_2e_4] &= -x_1e_3 + x_3e_1\,, & [Xe_3e_4] &= \quad x_1e_2 - x_2e_1\,, \end{aligned}$$

$$(13)\quad \frac{d[Xe_1e_2]}{dt} = K_2[Xe_1e_3]\,, \quad \frac{d[Xe_1e_3]}{dt} = K_1[Xe_2e_3] - K_2[Xe_1e_2] + K_3[Xe_1e_4]\,,$$

$$\frac{d[Xe_1e_4]}{dt} = K_1[Xe_2e_4] - K_3[Xe_1e_3]\,,$$

$$\frac{d[Xe_2e_3]}{dt} = K_0[e_1e_2e_3] - K_1[Xe_1e_3] + K_3[Xe_2e_4]\,,$$

$$\frac{d[Xe_2e_4]}{dt} = K_0[e_1e_2e_4] - K_1[Xe_1e_4] + K_2[Xe_3e_4] - K_3[Xe_2e_3]\,,$$

$$\frac{d[Xe_3e_4]}{dt} = K_0[e_1e_3e_4] - K_2[Xe_2e_4]\,.$$

En dehors des formules que nous venons d'écrire, notre travail se concentrera surtout sur quelques raisonnements élémentaires concernant la classe différentielle d'une somme, ou d'un produit, etc, qui vont être donnés sous forme de théorèmes:

Théorème 1. *Pour toute paire de fonctions scalaires (de fonctions vectorielles, de produits extérieurs ou généralement pour toute paire de tenseurs), les relations suivantes ont lieu:*

$$(14)\quad \mathrm{cl}\,(u \pm v) \geqq \min\,(\mathrm{cl}\,u,\ \mathrm{cl}\,v)\,,$$

$$(15)\quad \mathrm{cl}\,(u \pm v) = \min\,(\mathrm{cl}\,u,\ \mathrm{cl}\,v)\ \textit{si}\ \mathrm{cl}\,u \neq \mathrm{cl}\,v\,.$$

Démonstration. La formule (14) est évidente. Pour démontrer (15) posons $w = u \pm v$. Soit $\mathrm{cl}\,u < \mathrm{cl}\,v$, ce qu'on peut supposer sans restreindre la généralité. Si l'on avait maintenant $\mathrm{cl}\,w > \mathrm{cl}\,u = \mathrm{cl}\,(w \mp v)$, on aurait en vertu de (14) la relation $\mathrm{cl}\,u \geqq \min\,(\mathrm{cl}\,w,\ \mathrm{cl}\,v) > \mathrm{cl}\,u$, ce qui est contradictoire.

L'énoncé peut facilement être généralisé au cas de plusieurs fonctions.

Théorème 2. *Pour toute paire de fonctions scalaires $u(t)$, $v(t)$, on a la relation*

$$(16a)\quad \mathrm{cl}\,(u\,.\,v) \geqq \min\,(\mathrm{cl}\,u,\ \mathrm{cl}\,v)\,,$$

et si $v \neq 0$ dans l'intervalle où nous examinons la classe différentielle, alors

$$\text{(16b)} \qquad \operatorname{cl}(u/v) \geqq \min(\operatorname{cl} u, \operatorname{cl} v) .$$

La démonstration est évidente.

On peut renforcer l'énoncé du théorème 2 et obtenir le

Théorème 3. *Si* $\operatorname{cl} u < \operatorname{cl} v$, $v(t) \neq 0$, *pour* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *alors on a*

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{cl}[u(t) \,.\, v(t)] = \operatorname{cl} u .$$

Démonstration. Rappelons-nous tout d'abord qu'aux extrémités de l'intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$ il s'agit toujours de continuité à gauche, ou à droite, de dérivée à droite, etc, et qu'il serait également possible de considérer tout simplement un intervalle ouvert.

Posons $w = u \,.\, v$ et supposons que $\operatorname{cl} w > \operatorname{cl} u$. Alors en vertu de ce que $v(t) \neq 0$, nous avons $u = w/v$ pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ et d'après (16b) nous obtenons $\operatorname{cl} u \geqq \min .$ $. (\operatorname{cl} w, \operatorname{cl} v) > \operatorname{cl} u$, ce qui est contradictoire.

En tant que cas particulier nous obtenons

$$\operatorname{cl} k \,.\, u(t) = \operatorname{cl} u(t) , \quad k = \text{const} \neq 0 .$$

Il est évident que les formules (16a), (17) subsistent même pour un nombre plus grand de fonctions et qu'une formule analogue à (17) peut être établie pour le cas d'un quotient de deux fonctions.

Remarque 2. Nous jugeons bon de remarquer en ce lieu que l'hypothèse de $v(t) \neq 0$ pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ est en effet essentielle. Considérons p.ex. les fonctions

$$\begin{aligned} u(t) &= t^3 \sin(1/t) + 2 , & t \in \langle -1, 1 \rangle , \quad u(0) = 2 ; \\ v(t) &= t^5 \sin(1/t) , & t \in \langle -1, 1 \rangle , \quad v(0) = 0 , \end{aligned}$$

et examinons $\operatorname{cl} u(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned} u'(t) &= 3t^2 \sin(1/t) - t \cos(1/t) \text{ pour } t \neq 0 , \quad u'(0) = 0 , \\ u''(t) &= 6t \sin(1/t) - 4 \cos(1/t) - t^{-1} \sin(1/t) \text{ pour } t \neq 0 , \end{aligned}$$

tandis que $u''(0)$ n'existe pas. Donc $\operatorname{cl} u(t) = 1$. D'une manière analogue on trouve que $\operatorname{cl} v(t) = 2$. De même nous trouvons

$$\begin{aligned} \operatorname{cl}[u(t) \,.\, v(t)] &= \operatorname{cl}[(t^3 \sin(1/t) + 2) \,.\, t^5 \sin(1/t)] = \\ &= \operatorname{cl}(t^8 \sin^2(1/t) + 2t^5 \sin(1/t)) = 2 , \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{cl}[u(t) \,.\, v(t)] > \operatorname{cl} u$, bien que $\operatorname{cl} u(t) < \operatorname{cl} v(t)$.

En étudiant la classe différentielle des éléments particuliers du tétraèdre de Frenet nous pourrions éluder les difficultés dues aux valeurs nulles de certaines grandeurs en introduisant chaque fois un système de coordonnées tel que les grandeurs en question ne s'annulent ni en ce point ni au voisinage de ce point donné. D'après le théorème bien connu de Borel, il serait alors possible de diviser l'intervalle fermé donné en un nombre fini de parties telles qu'un choix convenable du système de coordonnées (éventuellement différent pour chaque partie) permetterait d'éliminer les difficultés en question. Si nous ne le faisons pas, il pourra arriver qu'en estimant la classe différentielle d'un produit nous ayons à écrire au cours de certains calculs auxiliaires des inégalités au lieu d'égalités. Mais comme le présent travail fait voir, cela regarde vraiment des calculs auxiliaires seulement, sans intervenir dans les résultats finals. Nous n'allons donc pas éliminer ces valeurs nulles.

Remarque 3. Dans les articles [1] et [2] on ne tient parfois pas suffisamment compte de l'hypothèse mentionnée du théorème 3, bien que, en d'autres lieux, le signe d'inégalité fait voir que l'auteur n'éliminait pas non plus les valeurs nulles. Toutefois, il y a une certaine inexactitude dans [1], p. 610^{11}, où au lieu de $\operatorname{cl} x_4 = r_0 + 3$ il faut lire $\operatorname{cl} x_4 \geqq r_0 + 3$, car on l'a déduit de la relation $\mathrm{d}x_4/\mathrm{d}t = - K_3 x_3$ avec $\operatorname{cl} K_3 = r = r_0 + 2$, $\operatorname{cl} x_3 \geqq r_0 + 3$, mais où x_3 peut bien s'annuler pour certaines valeurs de t. De même, p. 611_{18}, il doit y avoir $\operatorname{cl} x_4 \geqq r_0 + 2$ au lieu de $\operatorname{cl} x_4 = r_0 + 2$, la même situation se réproduit encore à plusieurs reprises. Néanmoins, ces inexactitudes n'ont aucune influence sur le résultat final que l'on obtient même à partir des relations exactes.

Théorème 4. *Si le vecteur donné $\boldsymbol{a}(t) \neq \boldsymbol{0}$ pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, alors dans le même intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$ on a*

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} = \min(\operatorname{cl} |\boldsymbol{a}|, \operatorname{cl} \boldsymbol{a}_0), \tag{18}$$

$\boldsymbol{a}_0$ étant le vecteur unité correspondant au vecteur $\boldsymbol{a}$.

Démonstration. Nous avons

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)}, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{a}|}{\mathrm{d}t} = (a_1 a_1' + \ldots + a_n a_n')(1/|\boldsymbol{a}|).$$

A partir de la relation (19) et compte tenu de la façon de calculer les dérivées d'ordres supérieurs de la fonction $\boldsymbol{a}$, nous obtenons

$$\operatorname{cl} |\boldsymbol{a}| \geqq \operatorname{cl} \boldsymbol{a}. \tag{20}$$

On a ensuite $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}(1/|\boldsymbol{a}|)$, d'où

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a}_0 \geqq \min\left(\operatorname{cl} \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}, \operatorname{cl} \boldsymbol{a}\right) = \operatorname{cl} \boldsymbol{a}. \tag{21}$$

De (20) et (21) nous obtenons

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} \leqq \min(\operatorname{cl} \boldsymbol{a}_0, \operatorname{cl} |\boldsymbol{a}|). \tag{22}$$

D'autre part, la relation $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{a}_0$ entraîne d'une façon évidente

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} \geqq \min(\operatorname{cl} |\boldsymbol{a}|, \operatorname{cl} \boldsymbol{a}_0). \tag{23}$$

En combinant (22) et (23) nous obtenons (18).

Théorème 4'. *Le théorème 4 reste vrai si l'on y remplace le vecteur par le produit d'une fonction scalaire non-nulle et d'un produit extérieur unité.*

Théorème 5. *Soit $\mathbf{b}(t)$ un vecteur de la forme*

$$\mathbf{b}(t) = f(t) \, . \, \mathbf{a}_0(t) \, ,$$

où $f(t)$ est une fonction scalaire, pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, qui peut s'anuler (même plusieurs fois) dans cet intervalle, et où $\mathbf{a}_0(t)$ est un vecteur unité, avec

$$\text{cl}\, f(t) < \text{cl}\, \mathbf{a}_0(t) \, . \tag{24}$$

Alors nous avons

$$\text{cl}\, \mathbf{b}(t) = \text{cl}\, f(t) \, . \tag{25}$$

Démonstration. On a évidemment

$$\text{cl}\, \mathbf{b}(t) \geqq \text{cl}\, f(t) \, . \tag{26}$$

Supposons maintenant que nous ayons

$$\text{cl}\, \mathbf{b}(t) > \text{cl}\, f(t) \, . \tag{27}$$

Alors partout où $\text{cl}\, f(t)$ prend sa valeur minimum, il faut que l'on ait

$$\text{cl}\, \mathbf{b}(t) = \text{cl}\, [f(t) \, . \, \mathbf{a}_0(t)] > \text{cl}\, f(t) \, .$$

Soit t_0 un tel point. Nous avons donc d'après (27)

$$\text{cl}\, [f(t_0) \, . \, \mathbf{a}_0(t_0)] > \text{cl}\, f(t_0) \, . \; ^1)$$

Or, $\mathbf{a}_0(t)$ est un vecteur unité. En chaque point t au moins une des composantes de $\mathbf{a}_0(t)$ est non-nulle. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer $a_{01}(t_0) \neq 0$. D'après (24) nous avons alors $\text{cl}\, f(t) < \text{cl}\, \mathbf{a}_0(t)$, donc aussi $\text{cl}\, f(t) < \text{cl}\, a_{01}(t)$. En raison du choix du point t_0 nous avons également $\text{cl}\, f(t_0) < \text{cl}\, a_{01}(t_0)$. Mais en posant $t = t_0$ dans (17) nous trouvons

$$\text{cl}\, b_1(t_0) = \text{cl}\, [f(t_0) \, . \, a_{01}(t_0)] = \min\, [\text{cl}\, f(t_0), \; \text{cl}\, a_{01}(t_0)] = \text{cl}\, f(t_0) \, ,$$

donc

$$\text{cl}\, \mathbf{b}(t_0) = \min_{1 \leqq i \leqq n} \text{cl}\, b_i(t_0) \leqq \text{cl}\, b_1(t_0) = \text{cl}\, f(t_0) \, .$$

Or, compte tenu du choix du point t_0, ceci est en contradiction avec (27). En vertu de (26) nous avons donc $\text{cl}\, \mathbf{b}(t) = \text{cl}\, f(t)$, c'est-à-dire (25), c.q.f.d.

Théorème 5'. *Un théorème analogue au théorème 5 est également valable pour les produits extérieurs.*

---

[1]) Par $\text{cl}\, f(t_0)$ on signale le fait qu'on examine la valeur de $\text{cl}\, f(t)$ en $t = t_0$. Le symbole $\text{cl}\, \mathbf{a}_0(t_0)$ a une signification analogue.

Théorème 6. *Pour un vecteur* $\boldsymbol{c}$ *de la forme*

$$\boldsymbol{c} = f(t) \, . \, \boldsymbol{a}(t)$$

où l'on peut avoir $\boldsymbol{a}(t_0) = \boldsymbol{0}$ *pour* $t_0 \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *et où* $\mathrm{cl}\, f(t) < \mathrm{cl}\, \boldsymbol{a}(t)$, *on a*

$$\mathrm{cl}\, \boldsymbol{c} \geqq \min \left[\mathrm{cl}\, f(t),\ \mathrm{cl}\, \boldsymbol{a}(t)\right] = \mathrm{cl}\, f(t) \, . \tag{28}$$

La démonstration est évidente.

Dans certains cas on peut avoir vraiment $\mathrm{cl}\, \boldsymbol{c} > \mathrm{cl}\, f(t)$. Cela se voit aisément en appliquant la remarque 2 aux composantes du vecteur $\boldsymbol{c}$.

Théorème 6'. *Le théorème* 6 *subsiste même pour les produits extérieurs.*

Remarque 4. Le fait que (28) est une inégalité (et non pas une égalité) n'est pas toujours respecté en [1]. Nous y trouvons p. ex. p. 611[4] la relation $\mathrm{cl}\, [Xe_1e_2] = r_0 + 2$ où $r = r_0 + 1$ (d'après (5.11_2)). Mais nous avons

$$\frac{\mathrm{d}[Xe_1e_2]}{\mathrm{d}t} = K_2[Xe_1e_3] \, , \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r_2 = r = r_0 + 1 \, , \quad \mathrm{cl}\, [Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$$

(voir p. 611[1]). Il en découle d'après notre théorème 6' $\mathrm{cl}\, [Xe_1e_2] \geqq r_0 + 2$ seulement. Cependant, ceci et d'autres inexatitudes semblables n'ont aucune influence sur les résultats finals de Čech.

Théorème 7. *Pour un vecteur* $\boldsymbol{d}$ *de la forme*

$$\boldsymbol{d} = f(t) \, . \, \boldsymbol{a}(t)$$

où $f(t) \neq 0$ *pour* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *et* $\mathrm{cl}\, f(t) > \mathrm{cl}\, \boldsymbol{a}(t)$, *nous avons*

$$\mathrm{cl}\, \boldsymbol{d}(t) = \mathrm{cl}\, \boldsymbol{a}(t) \, . \tag{29}$$

On n'élimine pas le cas où $\boldsymbol{a}(t) = 0$ *même pour plusieurs valeurs de* t *prises dans* $\langle t_1, t_2 \rangle$.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème 3.

Théorème 7'. *Le théorème analogue au théorème* 7 *est valable pour les produits extérieurs.*

Théorème 8. *Pour toute paire de vecteurs* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *on a*

$$\mathrm{cl}\, (\boldsymbol{a} \, . \, \boldsymbol{b}) \geqq \min\, (\mathrm{cl}\, \boldsymbol{a},\ \mathrm{cl}\, \boldsymbol{b}) \tag{30}$$

$$\mathrm{cl}\, [\boldsymbol{ab}] \geqq \min\, (\mathrm{cl}\, \boldsymbol{a},\ \mathrm{cl}\, \boldsymbol{b}) \, . \tag{31}$$

La démonstration est évidente.

Il est aisé de voir que le signe d'inégalité ne peut pas être écarté de (30) ou de (31), quelle que soit la relation existant entre $\mathrm{cl}\, \boldsymbol{a}$ et $\mathrm{cl}\, \boldsymbol{b}$.

Il est clair que la formule (31) peut être généralisée à un nombre plus élevé de facteurs.

Théorème 9. *Soit* $\boldsymbol{a}$ *un vecteur* $\in E_n$, $n \geqq 2$, *soit*

$$\boldsymbol{a} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \tag{32}$$

où $a_i = a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *sont des fonctions scalaires du paramètre* t *pour* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *et les vecteurs* $e_j = e_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *forment pour tout* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *un système orthogonal. Soit ensuite*

$$\min_{1 \leqq i \leqq n} \operatorname{cl} a_i < \min_{1 \leqq j \leqq n} \operatorname{cl} e_j .$$

On a alors

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} = \min_{1 \leqq i \leqq u} \operatorname{cl} a_i . \text{ [2]} \tag{33}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que

$$\operatorname{cl} a_1 \leqq \operatorname{cl} a_i , \quad i = 2, 3, \ldots, n , \tag{34}$$

$$\operatorname{cl} a_1 < \operatorname{cl} e_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{35}$$

Alors évidemment

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} \geqq \operatorname{cl} a_1 . \tag{36}$$

Supposons maintenant que nous ayons l'inégalité

$$\operatorname{cl} \boldsymbol{a} > \operatorname{cl} a_1 . \tag{37}$$

Or, la relation (32) entraîne

$$[\boldsymbol{a} e_2 \ldots e_n] = a_1 [e_1 e_2 \ldots e_n] . \tag{38}$$

D'après les formules (35), (37) et (31) généralisées au cas de plusieurs facteurs, nous avons

$$\operatorname{cl} [\boldsymbol{a} e_2 \ldots e_n] > \operatorname{cl} a_1 . \tag{39}$$

D'autre part, la formule (31), également généralisée, l'orthonormalité du système des vecteurs e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, la formule (35) et le théorème 5' impliquent la validité de

$$\operatorname{cl} a_1 [e_1 e_2 \ldots e_n] = \operatorname{cl} a_1 . \tag{40}$$

Or, les relations (38), (39) et (40) prises ensemble sont contradictoires, donc la relation (37) ne peut pas être vraie. Compte tenu de (36) et (34), nous en obtenons enfin (33), c.q.f.d.

Remarque 5. Il ne changerait pas beaucoup à la démonstration si nous généralisions un peu les hypothèses du théorème 9 de façon à pouvoir admettre

---

[2]) Nous supposons ici qu'il peut y avoir plusieurs fonctions scalaires a_i qui ont la classe différentielle minimum. Autrement le théorème 9 serait une conséquence banale du théorème 5 et de la formule (15).

pour $a_1(t) \neq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, $\text{cl}\, a_1 = \text{cl}\, e_1$ (les indices étant choisis comme dans la démonstration, c'est-à-dire $\text{cl}\, a_1 \leqq \text{cl}\, a_i$, $i = 2, \ldots, n$). Pour $a_2 = \ldots = a_n = 0$, l'énoncé donné est alors renfermé dans l'énoncé du theorème 4.

Théorème 9'. *Le théorème 9 reste valable même pour les combinaisons linéaires de produits extérieurs.*

La remarque 5 s'applique également au théorème 9'.

Dans les articles [1] et [2], les théorèmes 1–8 sont appliqués tacitement, les théorèmes 9 et 9' de notre travail sont nouveaux. Dans ce qui suit, nous appliquerons sans cesse ces théorèmes, sans les citer explicitement.

Revenons maintenant à notre problème principal. Il faudra tout d'abord étendre le tableau (5.3) du travail [1]. Nous allons établir de nouveau aussi la dernière colonne de ce tableau sans nous servir des relations $\text{cl}\,[e_1e_2] \leqq \text{cl}\,[e_1e_2e_3] + 1$, $\text{cl}\,[e_1e_2] \leqq \text{cl}\, e_1 + 1$, qui ne sont pas évidentes à priori.

Compte tenu des colonnes $4^e - 7^e$ du tableau (5.3) de [1] la formule (31) donne des grandeurs $\text{cl}\,[e_ie_j]$ une estimation assez peu précise

$$\text{cl}\,[e_ie_j] \geqq r + 1\,, \quad i, j = 1, \ldots, 4,\ i < j\,. \tag{41}$$

A présent, nous allons examiner de plus près les neuf cas du tableau cité.

Soit d'abord $\text{cl}\, K_1 = \text{cl}\, K_2 = \text{cl}\, K_3 = r$. Les formules (41) et (8) avec le théorème 9' donnent alors

$$\text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 1\,.$$

Pour $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$ (voir (7)), il résulte des formules $(8_2)-(8_5)$ que

$$\text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = r + 1\,,$$

et ensuite les formules (8_1) et (8_6) impliquent d'après le théorème 4' que l'on a

$$\text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 2$$

Pour $r_1 = r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$, les relations (8), (41) et le théorème 9' entraînent

$$\text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 1\,.$$

D'une manière analogue, nous trouvons pour $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r_3 = r$

$$\text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 1\,.$$

Si $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r + 1$, les formules $(8_2)-(8_5)$ donnent

$$\text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = r + 1\,,$$

d'où en vertu de (8_1), (8_6) et du théorème 4' nous obtenons

$$\text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 2\,.$$

Soit $r_1 = r + 1$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$. Comme auparavant, nous voyons que

$$\operatorname{cl}[e_1e_3] = \operatorname{cl}[e_1e_4] = \operatorname{cl}[e_2e_3] = \operatorname{cl}[e_2e_4] = r + 1\,,$$
$$\operatorname{cl}[e_1e_2] = \operatorname{cl}[e_3e_4] = r + 2\,.$$

Considérons ensuite le cas où $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 \geqq r + 2$. Il découle alors des formules $(8_2)-(8_5)$ que l'on a

$$\operatorname{cl}[e_1e_3] = \operatorname{cl}[e_1e_4] = \operatorname{cl}[e_2e_3] = \operatorname{cl}[e_2e_4] = r + 1\,,$$

d'où d'après (8_1) et (8_6)

$$\operatorname{cl}[e_1e_2] = \operatorname{cl}[e_3e_4] = r + 2\,.$$

Dans le cas où $r_1 \geqq r + 2$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$, nous obtenons de façon analogue

$$\operatorname{cl}[e_1e_3] = \operatorname{cl}[e_1e_4] = \operatorname{cl}[e_2e_3] = \operatorname{cl}[e_2e_4] = r + 1\,,$$
$$\operatorname{cl}[e_1e_2] = \operatorname{cl}[e_3e_4] = r + 2\,.$$

Considérons maintenant le dernier cas, savoir celui où $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$. Les formules (8_1), (8_2), (8_5) et (8_6) donnent dans ce cas-là

$$\operatorname{cl}[e_1e_2] = \operatorname{cl}[e_1e_3] = \operatorname{cl}[e_2e_4] = \operatorname{cl}[e_3e_4] = r + 1\,.$$

Il nous reste à déterminer $\operatorname{cl}[e_1e_4]$ et $\operatorname{cl}[e_2e_3]$. Or

$$\frac{\mathrm{d}^2[e_1e_4]}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}[e_2e_4] + K_1(-K_1[e_1e_4] + K_2[e_3e_4] - K_3[e_2e_3]) -$$
$$- \frac{\mathrm{d}K_3}{\mathrm{d}t}[e_1e_3] - K_3(K_1[e_2e_3] - K_2[e_1e_2] + K_3[e_1e_4]) =$$
$$= L_1[e_1e_2] + L_2[e_1e_3] + L_3[e_1e_4] + L_4[e_2e_3] + L_5[e_2e_4] + L_6[e_3e_4]\,,$$

où nous avons posé $L_1 = K_2K_3$, $L_2 = -\,\mathrm{d}K_3/\mathrm{d}t$, $L_3 = -\,K_1^2 - K_3^2$, $L_4 = -2K_1K_3$, $L_5 = \mathrm{d}K_1/\mathrm{d}t$, $L_6 = K_1K_2$. On a alors $\operatorname{cl} L_1 = r$ (d'après le théorème 3, car $\operatorname{cl} K_2 = r$, $\operatorname{cl} K_3 \geqq r + 1$, $K_3 \neq 0$), $\operatorname{cl} L_2 \geqq r$, $\operatorname{cl} L_3 \geqq r + 1$, $\operatorname{cl} L_4 \geqq r + 1$, $\operatorname{cl} L_5 \geqq r$, $\operatorname{cl} L_6 = r$. Nous avons donc d'après le théorème 9′ $\operatorname{cl}(\mathrm{d}^2[e_1e_4]/\mathrm{d}t^2) = r$, donc $\operatorname{cl}[e_1e_4] = r + 2$.

De façon analogue

$$\frac{\mathrm{d}^2[e_2e_3]}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}[e_1e_3] - K_1(K_1[e_2e_3] - K_2[e_1e_2] + K_3[e_1e_4]) +$$
$$+ \frac{\mathrm{d}K_3}{\mathrm{d}t}[e_2e_4] + K_3(-K_1[e_1e_4] + K_2[e_3e_4] - K_3[e_2e_3])\,,$$

d'où $\operatorname{cl}(\mathrm{d}^2[e_2e_3]/\mathrm{d}t^2) = r$, donc $\operatorname{cl}[e_2e_3] = r + 2$.

En résumant les résultats précédents nous obtenons le tableau (42).

(42)

cl K_1	K_2	K_3	e_1	e_2	e_3	e_4	$[e_1e_2]$	$[e_1e_3]$	$[e_1e_4]$	$[e_2e_3]$	$[e_2e_4]$	$[e_3e_4]$
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$

En nous servant de ce tableau et des formules données ci-dessus, nous examinerons maintenant, dans les neuf cas en question, la classe différentielle des éléments particuliers du tétraèdre de Frenet. Nous le ferons même pour les éléments dont s'occupe le travail [1], mais sans utiliser l'énoncé donné dans [1], p. 600, ligne 15–17, où l'on dit que la différence de deux termes consécutifs de la suite (cl X, cl $T_1, \ldots$, cl T_{n-1}) ne peut être égale qu'à 0,1 ou -1. Cet énoncé constituera seulement un résultat de nos calculs.

Cas I. $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

Le tableau (42) nous montre que cl $e_i = r + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, cl $[e_ie_j] = r + 1$, $i, j = 1, \ldots, 4$, $i < j$. En vertu du théorème 4 il découle de la formule (1) que cl $X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$ ($r_0 =$ cl K_0), cl $X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r$, les classes différentielles des expressions $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = Xe_i$ sont au moins égales à celles des éléments e_i et $[e_ie_j]$. Il en résulte d'après (4), (5) et (6) que la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet est égale à $r + 1$. Pour $r_0 < r$ nous obtenons d'abord l'estimation grossière cl $x_i =$ cl $(X \,.\, e_i) \geqq r_0 + 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Les formules (9) donnent alors

$$\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, x_i \geqq r_0 + 2\,, \quad i = 2, 3, 4\,. \tag{43}$$

En vertu de (4)–(6) nous trouvons alors à partir de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6)

$$\text{cl}\, E_2 = \text{cl}\, E_3 = \text{cl}\, E_4 = \text{cl}\, F_{23} = \text{cl}\, F_{24} = \text{cl}\, F_{34} = \text{cl}\, G_1 = r_0 + 1\,.$$

Pour $r_0 = r - 1$ les formules (43) et (6) donnent cl $G_2 =$ cl $G_3 =$ cl $G_4 = r_0 + 2$. De même (12_1)–(12_3) donnent cl $[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 2$, cl $[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$, cl $[Xe_1e_4] \geqq r_0 + 2$, donc d'après (5), et toujours pour $r_0 = r - 1$, on a cl $F_{12} =$ cl $F_{13} =$ cl $F_{14} = r_0 + 2$. La formule (10_1) implique également cl $[Xe_1] \geqq r_0 + 2$, mais cl $e_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 = r - 1$, donc d'après (4) on a cl $E_1 = r_0 + 2$. Pour $r_0 \leqq r - 2$ les formules (43) et (9) montrent que

$$\text{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,. \tag{44}$$ [3])

[3]) Pour simplifier, nous écrivons cl $x_{3,4} \geqq r_0 + 3$ au lieu de deux inégalités cl $x_3 \geqq r_0 + 3$, cl $x_4 \geqq r_0 + 3$; la même convention sera adoptée dans la suite, partout où elle ne peut conduire à des malentendus.

La formule (10_1) implique alors $\mathrm{cl}\,[Xe_1] = r_0 + 2$, mais puisque $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 1 \geqq \geqq r_0 + 3$, nous avons $\mathrm{cl}\, E_1 = r_0 + 2$. De même (12_2) et (12_3) impliquent $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_3] = = \mathrm{cl}\,[Xe_1e_4] = r_0 + 2$, donc $\mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = r_0 + 2$. Enfin, il résulte de (44) et (6) que $\mathrm{cl}\, G_2 = r_0 + 2$. Pour $r_0 = r - 2$, il découle ensuite de (44) et (6) que $\mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 3$, et en vertu de (12_1) on trouve $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 3$.

Comme $\mathrm{cl}\,[e_1e_2] = r + 1 = r_0 + 3$ si $r_0 = r - 2$, nous avons dans ce cas-là $\mathrm{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$. Pour $r_0 \leqq r - 3$ (9) et (44) donnent $\mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ (avec $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 4$ pour $r_0 \leqq r - 4$); (6) implique alors $\mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, G_4 = = r_0 + 4$. Ensuite (12_1) donne pour $r_0 \leqq r - 3$: $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] = \mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 3$, donc $\mathrm{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$. Le cas de $r_1 = r_2 = r_3 = r$ est donc complètement examiné. Les résultats sont résumés au tableau I.

Cas II. $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$.

D'après le tableau (42) nous avons ici $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}\, e_4 = \mathrm{cl}\,[e_1e_3] = = \mathrm{cl}\,[e_1e_4] = \mathrm{cl}\,[e_2e_3] = \mathrm{cl}\,[e_2e_4] = r + 1$, $\mathrm{cl}\,[e_1e_2] = \mathrm{cl}\,[e_3e_4] = r + 2$. La formule (1) donne alors $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$ et $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Si $r_0 \geqq r + 1$, les classes différentielles des expressions $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = X \,.\, e_i$ sont au moins égales aux classes différentielles des expressions e_i, $[e_ie_j]$ correspondantes, donc d'après (4)–(6) nous avons $\mathrm{cl}\, E_i = \mathrm{cl}\, G_j = r + 1$, $i, j = = 1, \ldots, 4$, et aussi $\mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, F_{24} = r + 1$, $\mathrm{cl}\, F_{12} = \mathrm{cl}\, F_{34} = = r + 2$. Les éléments qui ont la classe différentielle $r + 1$ dans le cas où $r_0 \geqq r + 1$, ont la même classe $r + 1$ si $r_0 = r$. De plus, il résulte de (13_1) que $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] \geqq r + 2$, et comme $\mathrm{cl}\,[e_1e_2] = r + 2$, on a $\mathrm{cl}\, F_{12} = r + 2$ même dans le cas de $r_0 = r$. Ensuite, la formule (13_6) entraîne pour $r_0 = r$ l'égalité $\mathrm{cl}\,[Xe_3e_4] = r + 1$, donc d'après (5) $\mathrm{cl}\, F_{34} = r + 1$. Pour $r_0 < r$ nous obtenons d'abord l'estimation $\mathrm{cl}\, x_i = = \mathrm{cl}\,(X \,.\, e_i) \geqq r_0 + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, et puis d'après (9)

$$\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{2;3,4} \geqq r_0 + 2\,, \quad r_0 \leqq r - 1\,. \tag{45}$$

En vertu de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6), (45), (4), (5) et (6) nous avons pour $r_0 < r$: $\mathrm{cl}\, E_2 = \mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, F_{24} = \mathrm{cl}\, F_{34} = \mathrm{cl}\, G_1 = r_0 + 1$. Si $r_0 = r - 1$, la classe différentielle des éléments $[Xe_1]$, $[Xe_1e_3]$, $[Xe_1e_4]$, x_2, x_3, x_4 sera d'après (10_1), (12_2), (12_3) et (45) au moins égale à $r_0 + 2$, avec $\mathrm{cl}\, e_i (i = 1, \ldots, 4) = \mathrm{cl}\,[e_1e_3] = = \mathrm{cl}\,[e_1e_4] = r + 1 = r_0 + 2$, donc $\mathrm{cl}\, E_1 = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, G_2 = \mathrm{cl}\, G_3 = = \mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 2$. Dans le cas de $r_0 = r - 1$, il ne reste qu'à déterminer $\mathrm{cl}\, F_{12}$. La formule (13_1) entraîne l'inégalité $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, K_2 \geqq r + 1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$. Or $\mathrm{cl}\,[e_1e_2] = r + 2 = r_0 + 3$, donc d'après (5) on a $\mathrm{cl}\, F_{12} = = r_0 + 3$. Pour $r_0 \leqq r - 2$ (45) et (9) donnent

$$\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,. \tag{46}$$

Les formules (10_1), (12_2) (12_3) et (46) entraînent alors en raison de (4), (5) et (6): $\mathrm{cl}\, E_1 = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, G_2 = r_0 + 2$. De plus, pour $r_0 = r - 2$ nous obtenons $\mathrm{cl}\, G_{3,4} = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, e_{3,4} = r + 1 = r_0 + 3$. Il découle alors de la formule (13_1) que pour $r_0 \leqq r - 2$ on a $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, K_2 \geqq r + 1 \geqq r_0 + 3$, cl $[Xe_1e_3] = r_0 + 2$, et puisque cl $[e_1e_2] = r + 2 \geqq r_0 + 4$, on a cl $F_{12} = r_0 + 3$. Pour $r_0 \leqq r - 3$ (46) et (9) donnent cl $x_3 = r_0 + 3$, cl $x_4 \geqq r_0 + 4$ (avec cl $x_4 = r_0 + 4$ si $r_0 \leqq r - 4$); d'après (6) on a alors cl $G_3 = r_0 + 3$, cl $G_4 = r_0 + 4$. Le résumé des résultats valables dans le cas où $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$, est donné dans le tableau II.

Cas III. $r_1 = r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$.

Le tableau (42) donne dans ce cas: cl $e_{1,2,3} = r + 1$, cl $e_4 = r + 2$, cl $[e_ie_j] = r + 1$ pour $i, j = 1, \ldots, 4$, $i < j$. La formule (1) implique alors cl $X = r + 2$ si $r_0 \geqq r + 1$, et cl $X = r_0 + 1$ si $r_0 \leqq r$. Dans le cas où $r_0 \geqq r + 1$, la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = X \,.\, e_i$ est, en vertu de (30) et (31), au moins égale à celle des éléments e_i et $[e_ie_j]$ correspondants; la classe différentielle de ces derniers détermine donc d'après (4)–(6) la classe différentielle des tous les éléments du tétraèdre de Frenet. Il en est de même dans le cas où $r_0 = r$, à l'exception des grandeurs cl E_4 et cl G_4 qu'il faut déterminer autrement. Dans le cas où $r_0 = r$, il résulte de l'équation (11_4) que l'on a cl $[Xe_4] = r + 1$ (car on a cl $K_0 = r_0$ au second membre de l'équation (11_4), la classe différentielle des autres éléments qui y figurent étant supérieure à r_0), donc d'après (4) nous avons cl $E_4 = r + 1$. L'équation (9_4) entraîne cl $x_4 \geqq r + 2$ et d'après (6) on a cl $G_4 = r + 2$. Si $r_0 < r$, on a d'abord cl $x_i = $ cl $(X \,.\, e_i) \geqq r + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, et puis d'après (9)

$$\text{(47)} \qquad \text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2\,, \quad r_0 < r\,.$$

Il en résulte en vertu de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6), (4), (5) et (6) que l'on a cl $E_2 = $ cl $E_3 = $ cl $E_4 = $ cl $F_{23} = $ cl $F_{24} = $ cl $F_{34} = $ cl $G_1 = r_0 + 1$ pour $r_0 < r$. De l'autre côté, les relations (47), (10_1), (12_1)–(12_3) montrent que la classe différentielle des éléments $[Xe_1]$, $[Xe_1e_2]$, $[Xe_1e_3]$, $[Xe_1e_4]$, x_2, x_3, est au moins égale à $r_0 + 2$, or cl $e_1 = $ cl $[e_1e_2] = $ cl $[e_1e_3] = $ cl $[e_1e_4] = $ cl $e_2 = $ cl $e_3 = r + 1 = r_0 + 2$ pour $r_0 = r - 1$, donc cl $E_1 = $ cl $F_{12} = $ cl $F_{13} = $ cl $F_{14} = $ cl $G_2 = $ cl $G_3 = r_0 + 2$. Dans le cas où $r_0 = r - 1$ il ne reste qu'à déterminer cl G_4. Or (47) et (9_4) impliquent cl $x_4 \geqq r_0 + 3$, d'où d'après (6) on tire cl $G_4 = r_0 + 3$, car cl $e_4 = r + 2 = r_0 + 3$ si $r_0 = r - 1$. Si $r_0 \leqq r - 2$, (47) et (9) donnent

$$\text{(48)} \qquad \text{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,.$$

En vertu de (10_1), (12_2), (12_3), (48), (4), (5) et (6) on a alors cl $E_1 = $ cl $F_{13} = $ cl $F_{14} = $ cl $G_2 = r_0 + 2$ pour $r_0 \leqq r - 2$ et, de plus, (48), (12_1), (5) et (6) entraînent cl $F_{12} = $ cl $G_3 = r_0 + 3$ pour $r_0 = r - 2$. Il résulte alors de (9_4) et (48) que pour $r_0 = r - 2$ on a cl $x_4 \geqq r_0 + 4$, et comme cl $e_4 = r + 2 = r_0 + 4$ si $r_0 = r - 2$, nous avons cl $G_4 = r_0 + 4$. Si $r_0 \leqq r - 3$, (48) et (9) impliquent cl $x_3 = r_0 + 3$, cl $x_4 = r_0 + 4$, et d'après (12_1), (5) et (6) nous voyons que cl $F_{12} = $ cl $G_3 = r_0 + 3$, cl $G_4 = r_0 + 4$. Les résultats concernant ce cas-là sont résumés dans le tableau III.

Cas IV. $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r_3 = r$.

Le tableau (42) donne pour ce cas: cl $e_1 = r + 2$, cl $e_{2,3,4} = r + 1$, cl $[e_ie_j] =$

$= r + 1$ pour $i, j = 1, \ldots, 4$, $i < j$. La formule (1) entraîne $\mathrm{cl}\, X = r + 3$ si $r_0 \geqq$ $\geqq r + 2$, et $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ si $r_0 \leqq r + 1$. Dans le cas où $r_0 \geqq r + 1$, la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = X \,.\, e_i$ est au moins égale à celle des éléments e_i et $[e_ie_j]$ correspondants; il en résulte que la classe différentielle des éléments e_i et $[e_ie_j]$ détermine d'après (4)–(6) la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet. Il en est de même dans le cas de $r_0 = r$, à l'exception de $\mathrm{cl}\, E_1$ et de $\mathrm{cl}\, G_1$. Comme dans ce cas-là on a $\mathrm{cl}\, [Xe_2] \geqq r + 1$, il découle de (11_1) que l'on a $\mathrm{cl}\, Xe_1 \geqq r + 2$, donc $\mathrm{cl}\, E_1 = r + 2$. Similaire, $\mathrm{cl}\, x_2 = \mathrm{cl}\, (X \,.\, e_2) \geqq r + 1$, donre d'après (9_1) $\mathrm{cl}\, x_1 = r + 1$. Alors, il découle de (6) $\mathrm{cl}\, G_1 = r + 1$. Si $r_0 < r$, nous obtenons d'abord $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\, (X \,.\, e_i) \geqq r_0 + 1$, et puis d'après (9)

$$\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2\,, \quad r_0 < r\,. \tag{49}$$

En vertu de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6), (49), (4), (5) et (6) nous avons alors $\mathrm{cl}\, E_2 =$ $= \mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, F_{24} = \mathrm{cl}\, F_{34} = \mathrm{cl}\, G_1 = r_0 + 1$ pour $r_0 < r$. Comme dans ce cas-là $\mathrm{cl}\, [Xe_2] = r_0 + 1$, il découle de (11_1) que $\mathrm{cl}\, [Xe_1] = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$, donc d'après (4) $\mathrm{cl}\, E_1 = r_0 + 2$. De l'autre côté, il découle de (12_1)–(12_3) et de (49) que la classe différentielle des éléments $[Xe_1e_2]$, $[Xe_1e_3]$ et $[Xe_1e_4]$ de même que celle de $x_{2,3,4}$ sont au moins égales à $r_0 + 2$, donc d'après (5) et (6) on a $\mathrm{cl}\, F_{12} =$ $= \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, G_2 = \mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 2$ pour $r_0 = r - 1$. Si $r_0 \leqq$ $\leqq r - 2$, il résulte de (49) et (9) que l'on a

$$\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,. \tag{50}$$

En vertu de (12_2), (12_3), (50), (5) et (6) nous obtenons alors $\mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} =$ $= \mathrm{cl}\, G_2 = r_0 + 2$ pour $r_0 \leqq r - 2$. De plus, si $r_0 = r - 2$ nous avons $\mathrm{cl}\, [Xe_1e_2] \geqq$ $\geqq r_0 + 3$ d'après (50) et (12_1), d'où en vertu de (50), (5) et (6) nous obtenons $\mathrm{cl}\, F_{12} =$ $= \mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 3$. Si $r_0 \leqq r - 3$, nous avons d'après (50) et (9) $\mathrm{cl}\, x_3 =$ $= r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ (avec $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 4$ si $r_0 \leqq r - 4$), donc d'après (12_1) $\mathrm{cl}\, [Xe_1e_2] = r_0 + 3$ et ensuite d'après (5) et (6) $\mathrm{cl}\, F_{12} = \mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, G_4 =$ $= r_0 + 4$. Le tableau IV résume ces résultats.

Cas V.: $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r + 1$.

Le tableau (42) donne dans ce cas: $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, [e_1e_3] = \mathrm{cl}\, [e_1e_4] =$ $= \mathrm{cl}\, [e_2e_3] = \mathrm{cl}\, [e_2e_4] = r + 1$, $\mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}\, e_4 = \mathrm{cl}\, [e_1e_2] = \mathrm{cl}\, [e_3e_4] = r + 2$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ on a en vertu de (1) $\mathrm{cl}\, X = r + 2$, pour $r_0 \leqq r$ on a $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$. Si $r_0 \geqq r + 1$, les relations (30) et (31) font voir que la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = (X \,.\, e_i)$ est au moins égale à celle des éléments e_i, $[e_ie_j]$ correspondants. D'après (4)–(6), la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet est donc déterminée par celle des éléments e_i et $[e_ie_j]$. Il en est de même des éléments E_1, E_2, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, G_1 et G_2, dans le cas où $r_0 = r$. Ensuite on a pour $r_0 = r$: $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\, (X \,.\, e_i) \geqq r + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, et les formules (9) donnent alors l'estimation plus précise

$$\mathrm{cl}\, x_1 \geqq r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_2 \geqq r + 1, \quad \mathrm{cl}\, x_3 \geqq r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_4 \geqq r + 2\,, \quad (r_0 = r). \tag{51}$$

Il découle ensuite de (51_3) et (51_4) d'après (6): $\mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r + 2$. De plus on a évidemment — toujours pour $r_0 = r$ — $\mathrm{cl}\,[Xe_i] \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\,[Xe_ie_j] \geqq r + 1$, donc en vertu de (11_3), (11_4) et (13_6) on a $\mathrm{cl}\,[Xe_3] = \mathrm{cl}\,[Xe_4] = \mathrm{cl}\,[Xe_3e_4] = r + 1$, et d'après (13_1) $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] \geqq r + 2$. D'après (4) et (5) on a ensuite $\mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{34} = r + 1$, $\mathrm{cl}\, F_{12} = r + 2$. Pour $r_0 < r$ nous obtenons d'abord $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\,(X \,.\, e_i) \geqq r_0 + 1$; puis, il résulte des formules (9) que l'on a $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2$, donc ensuite $\mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3$, c'est-à-dire

$$(52) \qquad \mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 < r\,.$$

Il s'ensuit alors des formules $(10_2)-(10_4)$, (12_4), $(12_4)-(12_6)$, (4), (5) et (6), par application itérée des formules (52) que nous avons $\mathrm{cl}\, E_2 = \mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, F_{24} = \mathrm{cl}\, F_{34} = \mathrm{cl}\, G_1 = r_0 + 1$ pour $r_0 < r$. Les formules (10_1), $(12_1)-(12_3)$ entraînent $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_4] \geqq r_0 + 2$, ce qui donne dans le cas de $r_0 = r - 1$: $\mathrm{cl}\, E_1 = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\,[e_1e_3] = \mathrm{cl}\,[e_1e_4] = r + 1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,[e_1e_2] = r + 2 = r_0 + 3$. Il résulte ensuite de (52) et de (6) pour $r_0 = r - 1$: $\mathrm{cl}\, G_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 3$. Si $r_0 \leqq r - 2$, il découle de (9) et (52)

$$(53) \qquad \mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,.$$

Alors nous avons d'après (10_1) et $(12_1)-(12_3)$: $\mathrm{cl}\,[Xe_1] = \mathrm{cl}\,[Xe_1e_3] = \mathrm{cl}\,[Xe_1e_4] = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\,[Xe_1e_2] = r_0 + 3$, donc d'après (4) et (5): $\mathrm{cl}\, E_1 = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$. De plus, on a d'après (53) et (6) pour $r_0 \leqq r - 2$: $\mathrm{cl}\, G_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, et si nous tenons compte de ce que $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 4$ pour $r_0 \leqq r - 3$, nous obtenons en vertu de (53) et (6) encore $\mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 4$ pour $r_0 \leqq r - 2$. Les résultats sont résumés dans le tableau V.

Cas: VI.: $r_1 = r + 1$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$.

Le tableau (42) donne dans ce cas: $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\,[e_1e_2] = \mathrm{cl}\,[e_3e_4] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}\, e_4 = \mathrm{cl}\,[e_1e_3] = \mathrm{cl}\,[e_1e_4] = \mathrm{cl}\,[e_2e_3] = \mathrm{cl}\,[e_2e_4] = r + 1$. L'équation (1) entraîne $\mathrm{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Si $r_0 \geqq r + 1$, la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet est déterminée, tout comme dans les cas précédents, par la classe différentielle des éléments e_i, $[e_ie_j]$ correspondants, on a donc $\mathrm{cl}\, E_1 = \mathrm{cl}\, E_2 = \mathrm{cl}\, F_{12} = \mathrm{cl}\, F_{34} = \mathrm{cl}\, G_1 = \mathrm{cl}\, G_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, F_{24} = \mathrm{cl}\, G_3 = \mathrm{cl}\, G_4 = r + 1$. En tenant compte des formules (30), (31), (4), (5) et (6), nous trouvons facilement que le second groupe d'éléments (c'est-à-dire E_3, E_4, etc) a la classe différentielle $r + 1$ même dans le cas de $r_0 = r$, où l'on a $\mathrm{cl}\, X = r + 1$. Quant à la classe différentielle des éléments du premier groupe (E_1, E_2, etc), elle est encore à déterminer, pour le cas de $r_0 = r$. Tout d'abord, il est clair que pour tout i, j nous avons $\mathrm{cl}\,[Xe_i] \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\,[Xe_ie_j] \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\,(X \,.\, e_i) \geqq r + 1$. Il en résulte en vertu de (11_1), (13_1) et (9_2) que la classe différentielle des éléments $[Xe_1]$, $[Xe_1e_2]$ et x_1 est au moins égale à $r + 2$, tandis qu'à partir de (11_2), (13_6) et (9_1) nous trouvons que cl $[Xe_2]$ = cl $[Xe_3e_4]$ = cl $x_1 = r + 1$. Si $r_0 = r$, nous obtenons donc d'après (4)–(6) les égalités cl E_1 = cl F_{12} = cl $G_2 = r + 2$, cl E_2 = cl F_{34} = = cl $G_1 = r + 1$. Soit ensuite $r_0 < r$. Alors nous avons d'abord cl x_i = cl $(X \,.\, e_i) \geqq$ $\geqq r_0 + 1$, d'où en vertu de (9) il découle cl $x_1 = r_0 + 1$, cl $x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2$, et si nous reprenons la relation (9_2), nous obtenons enfin

(54) $$\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 2\,, \quad r_0 < r\,.$$

Alors, il s'ensuit de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6), (54), (4)–(6) que l'on a cl E_2 = = cl E_3 = cl E_4 = cl F_{23} = cl F_{24} = cl F_{34} = cl $G_1 = r_0 + 1$, cl $G_2 = r_0 + 2$ (pour $r_0 < r$). Ensuite on obtient d'après (11_1): cl $[Xe_1] = r_0 + 2$, car (10_2) entraîne cl $[Xe_2] = r_0 + 1$ et donc cl $E_1 = r_0 + 2$. Si $r_0 = r - 1$, il découle de (54), (12_2), (12_3), (5) et (6) que cl F_{13} = cl F_{14} = cl G_3 = cl $G_4 = r_0 + 2$, car cl $[e_1e_3]$ = cl $[e_1e_4]$ = cl e_3 = cl $e_4 = r + 1 = r_0 + 2$ pour $r_0 = r - 1$. Comme cl $[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$ (en vertu de (54) et (12_2), comme nous l'avons déjà vu ci-dessus), nous avons d'après (13_1): cl $[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$, et donc cl $F_{12} = r_0 + 3$ pour $r_0 = r - 1$, car cl $[e_1e_2] = r + 2 = r_0 + 3$. Si $r_0 \leqq r - 2$, il résulte de (54) et (9)

(55) $$\mathrm{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,.$$

Il découle ensuite de (54_2), (55), (12_2) et (12_3): cl $[Xe_1e_3]$ = cl $[Xe_1e_4] = r_0 + 2$, et donc cl F_{13} = cl $F_{14} = r_0 + 2$ pour $r_0 \leqq r - 2$. De (12_2) et (13_1) il s'ensuit alors cl $[Xe_1e_2] = r_0 + 3$, d'où cl $F_{12} = r_0 + 3$ (pour $r_0 \leqq r - 2$). Si $r_0 = r - 2$, il découle de (55): cl G_3 = cl $G_4 = r_0 + 3$, car cl e_3 = cl $e_4 = r + 1 = r_0 + 3$ pour $r_0 = r - 2$. Enfin, si $r_0 \leqq r - 3$, il résulte de (54_2), (55), (9_3) et (9_4): cl $x_3 = r_0 + 3$, cl $x_4 \geqq r_0 + 4$ (avec cl $x_4 = r_0 + 4$ pour $r_0 \leqq r - 4$) et donc cl $G_3 = r_0 + 3$, cl $G_4 = r_0 + 4$. Le résumé des résultats est donné dans le tableau VI.

Cas VII. $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 \geqq r + 2$.

Dans ce cas-ci, nous avons (cf. le tableau (42)!): cl e_1 = cl e_2 = cl $[e_1e_3]$ = = cl $[e_1e_4]$ = cl $[e_2e_3]$ = cl $[e_2e_4] = r + 1$, cl e_3 = cl $[e_1e_2]$ = cl $[e_3e_4] = r + 2$, cl $e_4 = r + 3$. D'après (1), nous avons cl $X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r - 1$ et cl X = = $r_0 + 1$ si $r_0 \leqq r$. Si $r_0 \geqq r + 1$, la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, i = = 1, 2, 3 et $[Xe_ie_j]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i < j$, et $x_i = X \,.\, e_i$, $i = 1, 2, 3$, est, en vertu de (30) et (31), au moins égale à la classe différentielle des éléments e_i et $[e_ie_j]$, donc d'après (4)–(6) nous avons cl E_1 = cl E_2 = cl F_{13} = cl F_{14} = cl F_{23} = = cl F_{24} = cl G_1 = cl $G_2 = r + 1$, cl E_3 = cl F_{12} = cl F_{34} = cl $G_3 = r + 2$. Les éléments qui ont pour $r_0 \geqq r + 1$ la classe différentielle égale à $r + 1$, ont d'après (30), (31) et (4)–(6) la même classe pour le cas de $r_0 = r$ où cl $X = r + 1$. Revenons encore au cas de $r_0 \geqq r + 1$ où il faut déterminer encore la classe différentielle des éléments E_4 et G_4. Comme cl $[Xe_3] \geqq$ min (cl X, cl e_3) $= r + 2$, nous avons d'après (11_4) cl $[Xe_4] = r + 2$, donc d'après (4) cl $E_4 = r + 2$. Ensuite, on a cl x_3 = = cl $(X \,.\, e_3) \geqq r + 2$ en vertu de (30), donc d'après (9_4) nous avons cl $x_4 \geqq r + 3$.

Or cl $e_4 = r + 2$ de sorte que (6) entraîne cl $G_4 = r + 3$. Si $r_0 = r$, on a évidemment cl $[Xe_i] \geqq r + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, cl $[Xe_ie_j] \geqq r + 1$, $i, j = 1, \ldots, 4$, $i < j$, d'où en vertu de (11_3), (11_4) et (13_6) on trouve cl $[Xe_3] =$ cl $[Xe_4] =$ cl $[Xe_3e_4] = r + 1$ et d'après (13_1) cl $[Xe_1e_2] \geqq r + 2$. En vertu de (4) et (5) nous avons donc cl $E_3 =$ cl $E_4 =$ cl $F_{34} = r + 1$, cl $F_{12} = r + 2$. Ensuite, cl $x_i =$ cl $(X \,.\, e_i) \geqq r + 1$ pour $i = 1, \ldots, 4$, et donc cl $x_3 \geqq r + 2$ d'après (9_3) et cl $x_4 \geqq r + 3$ d'après (9_4). Nous avons donc d'après (6) cl $G_3 = r + 2$, cl $G_4 = r + 3$. Si $r_0 < r$, nous avons d'abord cl $x_i =$ cl $(X \,.\, e_i) \geqq r_0 + 1$, et puis d'après (9) cl $x_1 = r_0 + 1$, cl $x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2$, ce qui entraîne cl $x_{3,4} \geqq r_0 + 3$ et enfin cl $x_4 \geqq r_0 + 4$. En somme, nous avons

$$(56) \quad \text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \ \text{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2\,, \ \text{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3\,, \ \text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4\,, \ r_0 < r\,.$$

En vertu de (56), $(10_2)-(10_4)$, $(12_4)-(12_6)$ et (4)–(6) nous avons cl $E_2 =$ cl $E_3 =$ cl $E_4 =$ cl $F_{23} =$ cl $F_{24} =$ cl $F_{34} =$ cl $G_1 = r_0 + 1$. De l'autre côté, il découle des équations (10_1), (12_2) et (12_3) que la classe différentielle des éléments $[Xe_1]$, $[Xe_1e_3]$ et $[Xe_1e_4]$ est au moins égale à $r_0 + 2$, et (12_1) et (56) entraînent cl $[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ pour $r_0 < r$. Si $r_0 = r - 1$, on a cl $e_1 =$ cl $[e_1e_3] =$ cl $[e_1e_4] = r_0 + 2$, cl $[e_1e_2] = r_0 + 3$, cl $e_2 = r_0 + 2$, cl $e_3 = r_0 + 3$, cl $e_4 = r_0 + 4$, donc – compte tenu de (56) – on a d'après (4)–(6): cl $E_1 =$ cl $F_{13} =$ cl $F_{14} =$ cl $G_2 = r_0 + 2$, cl $F_{12} =$ cl $G_3 = r_0 + 3$, cl $G_4 = r_0 + 4$. Si $r_0 \leqq r - 2$ (9) et (56) donnent

$$(57) \quad \text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \ \text{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \ \text{cl}\, x_3 = r_0 + 3\,, \ \text{cl}\, x_4 = r_0 + 4\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,.$$

Alors, en vertu de (10_1), (12_2) et (12_3), nous avons cl $[Xe_1] =$ cl $[Xe_1e_3] =$ cl $[Xe_1e_4] = r_0 + 2$, et d'après (12_1) cl $[Xe_1e_2] = r_0 + 3$. Ceci avec (4)–(6) entraîne dans le cas où $r_0 \leqq r - 2$: cl $E_1 =$ cl $F_{13} =$ cl $F_{14} =$ cl $G_2 = r_0 + 2$, cl $F_{12} =$ cl $G_3 = r_0 + 3$, cl $G_4 = r_0 + 4$. Les résultats qui viennent d'être établis sont résumés dans le tableau VII.

Cas VIII.: $r_1 \geqq r + 2$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$.

Le tableau (42) donne dans notre cas: cl $e_3 =$ cl $e_4 =$ cl $[e_1e_3] =$ cl $[e_1e_4] =$ cl $[e_2e_3] =$ cl $[e_2e_4] = r + 1$, cl $e_2 =$ cl $[e_1e_2] =$ cl $[e_3e_4] = r + 2$, cl $e_1 = r + 3$. Il résulte de la formule (1) que cl $X = r + 4$ si $r_0 \geqq r + 3$, et cl $X = r_0 + 1$ si $r_0 \leqq r + 2$. Si $r_0 \geqq r + 2$, la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = X \,.\, e_i$ est d'après (30) et (31) au moins égale à la classe différentielle des éléments e_i et $[e_ie_j]$ correspondants; il s'en ensuit en vertu de (4), (5) et (6) que pour $r_0 \geqq r + 2$ la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet est déterminée par celle des éléments e_i et $[e_ie_j]$. Il en est de même si $r_0 = r + 1$, à l'exception des éléments E_1 et G_1, leur classe différentielle devant être déterminée autrement. D'après (31) nous avons cl $[Xe_2] \geqq r + 2$, d'où d'après (11_1) cl $[Xe_1] \geqq r + 3$, et d'après (4) cl $E_1 = r + 3$. Ensuite, si $r_0 = r + 1$, on a cl $x_2 =$ cl $(X \,.\, e_2) \geqq r + 2$, donc d'après (9_1) cl $x_1 = r + 2$, d'où en vertu de (6) cl $G_1 =$

$= r + 2$. Si $r_0 = r$, nous voyons à l'aide des formules (30) et (31) que la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$ pour $i = 1, \dots, 4$, $[Xe_ie_j]$ pour $i, j = 1, \dots, 4$, $i < j$, et $x_i = X \, . \, e_i$ pour $i = 1, \dots, 4$ est au moins égale à $r + 1$, donc d'après (4)–(6) nous avons $\text{cl}\, E_3 = \text{cl}\, E_4 = \text{cl}\, F_{13} = \text{cl}\, F_{14} = \text{cl}\, F_{23} = \text{cl}\, F_{24} = \text{cl}\, G_3 = \text{cl}\, G_4 = r + 1$. Ensuite, il découle de la formule (11_2) pour $r_0 = r$ que l'on a $\text{cl}\,[Xe_2] = r + 1$, et puis il découle de (11_1) que $\text{cl}\,[Xe_1] = r + 2$. Donc d'après (4) nous avons $\text{cl}\, E_1 = r + 2$, $\text{cl}\, E_2 = r + 1$. En raison de l'estimation de $\text{cl}\,[Xe_i]$ et $\text{cl}\,[Xe_ie_j]$ que nous avons obtenue ci-dessus, nous trouvons d'après (13_1) et (13_6): $\text{cl}\,[Xe_1e_2] \geqq r + 2$, $\text{cl}\,[Xe_3e_4] = r + 1$, donc d'après (5) nous avons $\text{cl}\, F_{12} = r + 2$, $\text{cl}\, F_{34} = r + 1$. Enfin (9) donne $\text{cl}\, x_1 = r + 1$, $\text{cl}\, x_2 \geqq r + 2$, et en vertu de (6) nous obtenons $\text{cl}\, G_1 = r + 1$, $\text{cl}\, G_2 = r + 2$. Si $r_0 \leqq r - 1$, nous avons d'abord $\text{cl}\, x_i = \text{cl}\,(X \, . \, e_i) \geqq r_0 + 1$, pour $i = 1, \dots, 4$, d'où d'après (9) $\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_{2,3,4} \geqq r_0 + 2$, et en vertu de (9_2) $\text{cl}\, x_2 = r_0 + 2$. Nous avons donc en somme

$$\text{(58)} \qquad \text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 2\,, \quad r_0 < r\,.$$

En vertu de (10_2)–(10_4) et de (12_4)–(12_6) nous avons alors $\text{cl}\,[Xe_2] = \text{cl}\,[Xe_3] = \text{cl}\,[Xe_4] = \text{cl}\,[Xe_2e_3] = \text{cl}\,[Xe_2e_4] = \text{cl}\,[Xe_3e_4] = r_0 + 1$, et d'après (4)–(6) nous obtenons $\text{cl}\, E_2 = \text{cl}\, E_3 = \text{cl}\, E_4 = \text{cl}\, F_{23} = \text{cl}\, F_{24} = \text{cl}\, F_{34} = \text{cl}\, G_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, G_2 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$. Puis en vertu de (11_1) on a $\text{cl}\,[Xe_1] = r_0 + 2$, donc $\text{cl}\, F_1 = r_0 + 2$. En vertu de (12_2) et (12_3) nous avons $\text{cl}\,[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$, $\text{cl}\,[Xe_1e_4] \geqq r_0 + 2$, et en raison de (13_1) aussi $\text{cl}\,[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$. En tenant compte des inégalités ainsi déduites et des relations (58) et (6), nous obtenons pour $r_0 = r - 1$: $\text{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$, $\text{cl}\, F_{13} = \text{cl}\, F_{14} = \text{cl}\, G_3 = \text{cl}\, G_4 = r_0 + 2$. Pour $r_0 \leqq r - 2$ il découle de (58) et de (9_3), (9_4)

$$\text{(59)} \qquad \text{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, x_{3,4} \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,.$$

On a donc d'après (12_2) et (12_3) $\text{cl}\,[Xe_1e_3] = \text{cl}\,[Xe_1e_4] = r_0 + 2$, et puis d'après (13_1) $\text{cl}\,[Xe_1e_2] = r_0 + 3$. En vertu de (5) nous avons alors $\text{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$, $\text{cl}\, F_{13} = \text{cl}\, F_{14} = r_0 + 2$. Si $r_0 = r - 2$, nous avons ensuite d'après (59) et (6): $\text{cl}\, G_3 = \text{cl}\, G_4 = r_0 + 3$. Si $r_0 \leqq r - 3$, nous obtenons à partir de (59) et (9): $\text{cl}\, x_3 = r_0 + 3$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ (avec $\text{cl}\, x_4 = r_0 + 4$, pour $r_0 \leqq r - 4$), donc d'après (6): $\text{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, $\text{cl}\, G_4 = r_0 + 4$. Le tableau VIII résume ces résultats.

Cas IX.: $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$.

Dans ce dernier cas le tableau (42) nous donne les égalités: $\text{cl}\, e_2 = \text{cl}\, e_3 = \text{cl}\,[e_1e_2] = \text{cl}\,[e_1e_3] = \text{cl}\,[e_2e_4] = \text{cl}\,[e_3e_4] = r + 1$, $\text{cl}\, e_1 = \text{cl}\, e_4 = \text{cl}\,[e_1e_4] = \text{cl}\,[e_2e_3] = r + 2$. L'équation (1) implique alors d'une manière analogue aux cas précédents que l'on a $\text{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\text{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Si $r_0 \geqq r + 1$, la classe différentielle des éléments $[Xe_i]$, $[Xe_ie_j]$ et $x_i = X \, . \, e_i$, une fois de plus, est au moins égale à la classe différentielle des éléments e_i et $[e_ie_j]$ correspondants, donc d'après (4)–(6) la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet sera déterminée par la classe différentielle de l'élément e_i ou $[e_i e_j]$ correspondant. Pour la même raison, les éléments qui ont la classe différentielle $r + 1$ si $r_0 \geqq r + 1$ ont la même classe si $r_0 = r$. Comme pour $r_0 = r$ on a $\mathrm{cl}[Xe_i] \geqq r + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, $\mathrm{cl}[Xe_i e_j] \geqq r + 1$, $i, j = 1, \ldots, 4$, $i < j$, il résulte des formules (11_1), (13_3), (11_4) et (13_4) que nous avons $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1 e_4] \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_4] = \mathrm{cl}[Xe_2 e_3] = r + 1$. De même $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}(X \,.\, e_i) \geqq \geqq r + 1$ pour $i = 1, \ldots, 4$, donc d'après (9) on a $\mathrm{cl}\, x_1 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r + 2$. En vertu de (4)–(6) nous obtenons alors $\mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{23} = \mathrm{cl}\, G_1 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, E_1 = = \mathrm{cl}\, F_{14} = \mathrm{cl}\, G_4 = r + 2$. Si $r_0 \leqq r - 1$, nous avons d'abord $\mathrm{cl}\, x_i = \mathrm{cl}\, X \,.\, e_i \geqq \geqq r_0 + 1$, $i = 1, \ldots, 4$, et puis il s'ensuit de (9)

$$\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_{2,3} \geqq r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3\,, \quad r_0 < r\,. \tag{60}$$

En vertu de (10_2)–(10_4), (12_4)–(12_6) nous obtenons alors $\mathrm{cl}[Xe_2] = \mathrm{cl}[Xe_3] = = \mathrm{cl}[Xe_4] = \mathrm{cl}[Xe_2 e_3] = \mathrm{cl}[Xe_2 e_4] = \mathrm{cl}[Xe_3 e_4] = r_0 + 1$, et de (11_1) il découle $\mathrm{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$. Donc, d'après (4) et (5) on a $\mathrm{cl}\, E_2 = \mathrm{cl}\, E_3 = \mathrm{cl}\, E_4 = \mathrm{cl}\, F_{23} = = \mathrm{cl}\, F_{24} = \mathrm{cl}\, F_{34} = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, E_1 = r_0 + 2$. En vertu de (12_1), (12_2) et (60) nous trouvons

$$\mathrm{cl}[Xe_1 e_2] \geqq r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}[Xe_1 e_3] \geqq r_0 + 2\,, \tag{61}$$

et puis en vertu de (13_3), (61) et de la relation $\mathrm{cl}[Xe_2 e_4] = r_0 + 1$ déduite ci-dessus, nous avons

$$\mathrm{cl}[Xe_1 e_4] = r_0 + 2\,, \quad r_0 < r\,. \tag{62}$$

Donc d'après (5) on a $\mathrm{cl}\, F_{14} = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$. De plus (60) et (6) donnent $\mathrm{cl}\, G_1 = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r - 1$. Si $r_0 = r - 1$, nous obtenons d'après (60), (61), (5) et (6) les égalités $\mathrm{cl}\, F_{12} = \mathrm{cl}\, F_{13} = \mathrm{cl}\, G_2 = \mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 3$. Si $r_0 \leqq r - 2$, nous avons d'après (60) et (9)

$$\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4\,, \quad r_0 \leqq r - 2\,. \tag{63}$$

Donc, d'après (12_2) on a $\mathrm{cl}[Xe_1 e_3] = r_0 + 2$ et d'après (13_1) on a $\mathrm{cl}[Xe_1 e_2] \geqq \geqq r_0 + 3$. Alors (5) nous donne $\mathrm{cl}\, F_{13} = r_0 + 2$ pour $r_0 \leqq r - 2$ et $\mathrm{cl}\, F_{12} = = r_0 + 3$ pour $r_0 = r - 2$. En vertu de (63) et (6) nous avons ensuite $\mathrm{cl}\, G_2 = = r_0 + 2$ si $r_0 \leqq r - 2$, et $\mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 4$ si $r_0 = r - 2$. En vertu de (63) et (9) nous avons ensuite

$$\mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 4\,, \quad r_0 \leqq r - 3\,. \tag{64}$$

Alors il résulte de (12_1) $\mathrm{cl}[Xe_1 e_2] = r_0 + 3$ et d'après (5) $\mathrm{cl}\, F_{12} = r_0 + 3$. En vertu de (64) et (6) nous obtenons enfin $\mathrm{cl}\, G_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, G_4 = r_0 + 4$. L'étude du dernier cas IX est donc achevée. Les résultats sont résumés dans le tableau IX.

Tous les résultats en général sont résumés dans le tableau X, où l'on a cependant changé un peu la signification de la lettre r. (Il est aisé de voir que nous y avons posé

$r = \min \mathrm{cl}\, K_i$, $i = 0, \ldots, 3$.) Le tableau X contient le tableau (5.12) du travail [1] où T_1 est l'élément que nous avons désigné ici par E_1, T_2 par F_{12}, et enfin T_3 correspond à notre élément G_4. De même, le tableau (13) du travail [2] correspond à un cas spécial de notre tableau X si nous y considérons seulement les éléments X, E_1, E_2, E_3, F_{12} (dénoté par F_3 dans [2]), $F_{13}(F_2)$, $F_{23}(F_1)$ et les lignes, où $\mathrm{cl}\, K_3$ peut prendre des valeurs arbitrarement grandes: (nous obtenons ce cas spécial si nous supposons $K_3 = 0$ – malgré notre hypothèse fondamentale que les grandeurs K_i différent de zéro partout dans l'intervalle où elles sont définies). Il résulte du tableau X que même dans le cas de $n = 4$, la suite ($\mathrm{cl}\, X$, $\mathrm{cl}\, T_1$, $\mathrm{cl}\, T_2$, $\mathrm{cl}\, T_3$) – la notation étant celle du travail [1] – détermine la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet, ou autrement dit: Notre tableau X qui donne la classe différentielle de tous les éléments du tétraèdre de Frenet contient, tout comme l'ensemble des tableaux (5.12), (5.12′) et (5.12″) de [1] au total seulement $27 = 3^{n-1}$ cas différents.

A la fin, nous pourrions construire, comme c'est le cas de l'article [2], des tableaux correspondant à des paramètres spéciaux $s, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Le procédé que nous aurions alors à appliquer est aisé à trouver à partir des deux travaux de Čech, mais son application n'apporterait plus aucun résultat essentiellement nouveau.

Littérature

[1] *E. Čech:* Détermination du type différentielle d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions. Czechosl. Math. Journal, *7* (1957), 599–631.

[2] *E. Čech:* Sulla differenziabilità del triedro di Frenet. Annali di Mat. Pura ed Appl. (IV), *49* (1960), 91–96.

Резюме

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ 4-ЭДРА ФРЕНЕ В ПРОСТРАНСТВЕ E_4

АЛЕНА БИЛКОВА (Alena Bílková), Прага

Из статей Э. Чеха [1] и [2] взято – если не считать некоторого обобщения – определение дифференциального класса функции $f(t)$, равно как и определение регулярной кривой C.

Относительно функции $f = f(t)$ мы скажем, что ее *дифференциальный класс* больше или равен r ($\geqq 0$) и запишем $\mathrm{cl} f \geqq r$, если существует непрерывная производная $f^{(r)}(t)$. *Дифференциальный класс вектора* или дифференциальный класс внешнего произведения мы определяем как минимум дифференциальных классов отдельных составляющих. Обобщая далее мы определим дифференциальный класс геометрического объекта G как $\min\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, где G_λ, $\lambda \in \Lambda$ – неодно-

родные координаты данного объекта G. Обобщение, о котором мы упоминали выше, состоит в том, что в качестве дифференциального класса функции $f(t)$ мы берем минимальное значение, которое $\operatorname{cl} f(t)$ принимает, если t пробегает данную область определения, так что дифференциальный класс не должен быть во всех точках области определения одним и тем же.

Кривая C погруженная в евклидово пространство E_n и рассматриваемая как множество точек $X = X(t)$, называется *регулярной* (тогда и параметр t будет также регулярным), если справедливы формулы Френе, которые при специализации $n = 4$ даны формулами (1) и (2), где K_i, $0 \leqq i \leqq 3$, – непрерывные функции параметра t отличные от нуля во всех точках.

В предлагаемой статье исследуются дифференциальные классы отдельных элементов 4-эдра Френе для регулярной кривой C в пространстве E_4 (определение этого дифференциального класса дается согласно предыдущему формулами (3)–(6)), если даны дифференциальные классы коэффициентов в формулах Френе. Вспомогательным аппаратом для конкретных вычислений являются как формулы (8)–(13), так теоремы 1–9', в которых речь идеть о дифференциальном классе суммы, произведения и т.п. Таблица (42) содержит дифференциальный класс величин e_i, $i = 1, \ldots, 4$ и $[e_i e_j]$, $i, j = 1, \ldots 4$, $i < j$, если даны значения $\operatorname{cl} K_i$, $i = 1, \ldots, 3$. Тогда собственная проблема исследуется последовательно во всех 9 возможных случаях, следующих из таблицы (42). Результаты для отдельных случаев сведены в таблицы I–IX ($r_i = \operatorname{cl} K_i$, $i = 0, \ldots 3$, в отдельных столбцах приводится дифференциальный класс величины стоящей в заглавии столбца). Собственный результат работы представлен таблицей X, являющейся сводкой тавлиц I–IX; в таблице X буква r используется по сравнению с предыдущими таблицами в несколько ином смысле (а именно $r = \min \operatorname{cl} K_i$, $i = 0, \ldots, 3$).

Tableau I: $r_1 = r_2 = r_3 = r$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2
$r_0 = r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-3$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau II: $r_1 = r_3 = r,\ r_2 \geqq r+1$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2
$r_0 = r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-3$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau III: $r_1 = r_2 = r,\ r_3 \geqq r+1$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+3
$r_0 \leqq r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau IV: $r_1 \geqq r+1,\ r_2 = r_3 = r$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2
$r_0 = r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-3$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau V: $r_1 = r,\ r_2 \geqq r+1,\ r_3 = r+1$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau VI: $r_1 = r+1,\ r_2 \geqq r+1,\ r_3 = r$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2
$r_0 = r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-3$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau VII: $r_1 = r,\ r_2 \geqq r+1,\ r_3 \geqq r+2$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$r_0 \leqq r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau VIII: $r_1 \geqq r+2,\ r_2 \geqq r+1,\ r_3 = r$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+3$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r+2$	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2
$r_0 = r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+3
$r_0 \leqq r-3$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau IX: $r_1 \geqq r+1,\ r_2 = r,\ r_3 \geqq r+1$

	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	G_4
$r_0 \geqq r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r_0 = r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r_0 = r$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r_0 = r-1$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+2	r_0+3
$r_0 \leqq r-2$	r_0+1	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+3	r_0+2	r_0+2	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+1	r_0+2	r_0+3	r_0+4

Tableau X

K_0	K_1	K_2	K_3	X	E_1	E_2	E_3	E_4	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$	$F_{3,4}$	G_1	G_2	G_3	$:G_4$
r	r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+2$	$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r+2$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+3$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
r	r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$r\geqq +2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$\geqq r+3$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$