Czechoslovak Mathematical Journal

František Nožička

Les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 290–321

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100568`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

LES FORMULES DE FRENET POUR LA GÉODÉSIQUE DANS LA MÉCANIQUE DE MINKOWSKI

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Reçu le 24 avril 1961)

Dans le présent article on déduit les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski. Les fonctions scalaires (désignées par les symboles P, Q, R) qui figurent dans ces formules représentent, au sens décrit dans le travail, le système complet d'invariants différentiels de la géodésique; c'est-à-dire invariants par rapport aux transformations générales de Lorentz. A l'aide des équations de Frenet déduites, on donne ensuite la classification fondamentale des géodésiques dans l'espace de Minkowski et de simples caractéristiques des classes correspondantes.

1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Soient $\{x, y, z, t\}$, $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^*t\}$ deux systèmes spatiotemporels à origine commune, et supposons que les systèmes spatiaux (inertiels) correspondants $\{x, y, z\}$ et $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z\}$ sont en mouvement, l'un par rapport à l'autre, avec une vitesse constante $\underset{0}{v}$ où $0 < \underset{0}{v} < c$ (c étant la vitesse de la lumière), dans la direction positive de l'axe des x dans $\{x, y, z\}$; l'axe des ${}^*x$ coïncide avec l'axe des x; les axes y et ${}^*y$ ainsi que z et ${}^*z$ étant parallèles. Alors les coordonnées spatio-temporelles d'un même „événement" dans les systèmes $\{x, y, z, t\}$ et $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^*t\}$ sont liées par les relations

$$(1,1)_a \qquad \begin{aligned} {}^*x &= R(x - \underset{0}{v}t)\,, & x &= R({}^*x + \underset{0}{v}{}^*t)\,,\\ {}^*y &= y\,, & y &= y^*\,,\\ {}^*z &= z\,, & z &= z^*\,,\\ {}^*t &= R(t - x\underset{0}{v}/c^2)\,, & t &= R({}^*t + {}^*x\underset{0}{v}/c^2) \end{aligned}$$

où

$$(1,1)_b \qquad R \equiv (1 - \underset{0}{v}^2/c^2)^{-1/2}\,.$$

Les relations (1,1) représentent la transformation spéciale de Lorentz bien connue.

Les transformations dites générales (ou encore spatiales) de Lorentz sont les transformations linéaires

$$(11)_c \qquad \begin{aligned} {}^*x &= \gamma_{11}\bar{x} + \gamma_{12}\bar{y} + \gamma_{13}\bar{z}\,, \\ {}^*y &= \gamma_{21}\bar{x} + \gamma_{22}\bar{y} + \gamma_{23}\bar{z}\,, \\ {}^*z &= \gamma_{31}\bar{x} + \gamma_{32}\bar{y} + \gamma_{33}\bar{z}\,, \\ {}^*t &= \bar{t} \end{aligned}$$

avec la matrice orthogonale

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{Vmatrix}$$

où

$$(1,1)_d \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x - R\underset{0}{v}_1 t + (R-1)\,(\underset{0}{v}_1/\underset{0}{v}^2)\,(\underset{0}{v}_1 x + \underset{0}{v}_2 y + \underset{0}{v}_3 z)\,, \\ \bar{y} &= y - R\underset{0}{v}_2 t + (R-1)\,(\underset{0}{v}_2/\underset{0}{v}^2)\,(\underset{0}{v}_1 x + \underset{0}{v}_2 y + \underset{0}{v}_3 z)\,, \\ \bar{z} &= z - R\underset{0}{v}_3 t + (R-1)\,(\underset{0}{v}_3/\underset{0}{v}^2)\,(\underset{0}{v}_1 x + \underset{0}{v}_2 y + \underset{0}{v}_3 z)\,, \\ \bar{t} &= R[t - (\underset{0}{v}_1 x + \underset{0}{v}_2 y + \underset{0}{v}_3 z)\, c^{-2}]\,, \end{aligned}$$

les systèmes $\{x, y, z, t\}$ et $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^*t\}$ ont une origine commune et le mouvement rectiligne uniforme du système $\{x, y, z, t\}$ par rapport au système $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^*t\}$ est déterminé par le vecteur de la vitesse constante $\underset{0}{\vec{v}}(\underset{0}{v}_1, \underset{0}{v}_2, \underset{0}{v}_3)$ de grandeur $|\underset{0}{v}|$ dans le système original $\{x, y, z\}$; le nombre R a le sens précisé en $(1,1)_b$. Le passage des coordonnées barrées aux coordonnées étoilées dans $(1,1)_c$ signifie une transformation orthogonale des axes spatiaux.

Soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ trois fonctions réelles définies pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, où t a la signification du temps dans le système $\{x, y, z, t\}$. Dans la suite, nous supposerons que ces fonctions soient au moins deux fois continûment dérivables dans l'intervalle considéré et que l'on ait pour tout $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$$(1,2) \qquad v^2 \equiv \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 < c^2\,.$$

Dans ces conditions, soient

$$(1,3) \qquad x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle\,,$$

les équations décrivant le mouvement d'une particule matérielle de masse de repos μ dans le système spatio-temporel original $\{x, y, z, t\}$. Les équations (1,3) sont donc les équations de la géodésique correspondant à la particule considérée dans le système $\{x, y, z, t\}$.

Définition 1. La grandeur $\tau(t)$ définie par

$$(1,4) \qquad \tau(t) = \int_{t_1}^{t} (1 - v^2/c^2)^{1/2} \, \mathrm{d}t \,, \quad (t \in \langle t_1, t_2 \rangle) \,,$$

s'appelle „*temps propre*" de la particule considérée.

On sait bien que $\tau(t)$ est invariant par rapport aux transformations générales de Lorentz $(1,1)_{c,\,d}$.[1])

Il est aisé de montrer que, sous les hypothèses précitées sur les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de (1,3), la géodésique décrite par (1,3) dans $\{x, y, z, t\}$ peut être rapportée au paramètre $\tau(t)$ de (1,4), c'est-à-dire que la géodésique (1,3) peut être décrite dans $\{x, y, z, t\}$ par les équations

$$(1,5) \qquad x = x(\tau) \,, \quad y = y(\tau) \,, \quad z = z(\tau) \,, \quad t = t(\tau) \,,$$

où nous prenons $\tau \in \langle 0, \tau_0 \rangle$, $\tau_0 = \tau(t_2)$. Du point de vue géométrique, les équations (1,5) peuvent évidemment être prises pour une description paramétrique d'une courbe régulière dans l'espace linéaire à quatre dimensions de coordonnées x, y, z, t; dans la suite nous dénoterons cet espace par $L(x, y, z, t)$.

Théorème 1. *Pour la géodésique décrite par* (1,5) *on a*

$$(1,6) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] = 1 \,.$$

Cela découle immédiatement de (1,4) et (1,2).

Définition 2. Soit $\mu > 0$ la masse de repos d'une particule matérielle dans $L(x, y, z, t)$, la géodésique correspondante dans $L(x, y, z, t)$ étant décrite par les équations (1,5). Le vecteur dans $L(x, y, z, t)$, de composantes

$$(1,7) \qquad X = \mu \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} \,, \quad Y = \mu \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} \,, \quad Z = \mu \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} \,, \quad T = \mu \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}$$

sera appelé *vecteur-force de Minkowski* agissant sur la particule matérielle à laquelle correspond la géodésique (1,5).

Nous allons signaler deux propriétés du vecteur-force de Minkowski dont nous nous servirons plus tard.

Théorème 2. *Lorsque nous passons du système* $\{x, y, z, t\}$ *au système* $\{{}^*x, {}^*y, {}^*z, {}^*t\}$, *les composantes* (1,7) *du vecteur-force de Minkowski défini le long de la géodésique* (1,5) *se transforment tout comme des coordonnées; c'est-à-dire que* ${}^*X, {}^*Y, {}^*Z, {}^*T$ *sont liées à* X, Y, Z, T *par des relations du type* $(1,1)_{c,\,d}$ *où* R *a la signification précisée dans* $(1,1)_b$.

[1]) Dit d'une façon plus précise: la grandeur $\tau(t)$ dans (1,4) et la grandeur

$${}^*\tau({}^*t) = \int_{{}^*t_1}^{{}^*t} (1 - {}^*v^2/c^2)^{1/2} \, \mathrm{d}{}^*t$$

pour la même géodésique dans $L(x, y, z, t)$ sont égales.

Théorème 3. *Aux points de la géodésique, le vecteur de Minkowski vérifie la relation*

$$X\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+Y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}+Z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}-c^2T\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=0\,. \tag{1,9}$$

Les théorèmes 2 et 3 étant bien connus, nous n'en donnons pas la démonstration ici.

Pour terminer ce paragraphe introductif, signalons encore que la grandeur

$$m\equiv\frac{\mu}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \quad ^{2)} \tag{1,10}$$

est appelée masse inertiale d'une particule matérielle dans $L(x, y, z, t)$ de masse de repos μ; la géodésique correspondant à cette particule sera décrite dans $L(x, y, z, t)$ par (1,3). Avec ces notations les trois premières des relations (1,7) deviennent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\bar{X}\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\bar{Y}\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=\bar{Z}\,, \tag{1,11$_a$}$$

où $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ sont les composantes du vecteur-force de Newton, liées aux composantes X, Y, Z par les relations

$$\bar{X}=\kappa X\,,\quad \bar{Y}=\kappa Y\,,\quad \bar{Z}=\kappa Z\,,\quad \left[\kappa\equiv\sqrt{(1-v^2/c^2)}\right]. \tag{1,11$_b$}$$

Les équations (1,11) sont les équations de mouvement bien connues d'une particule matérielle dans la mécanique de Minkowski.

2. CONVENTION DE NOTATION

Pour nos considérations, il sera avatageux de travailler avec la notation d'indices d'Einsteïn, bien connue du Calcul tensoriel (convention d'Einstein). Acceptons tout d'abord les conventions fondamentales suivantes:

1° Un point $[x, y, z, t]$ de l'espace linéaire (affin) $L(x, y, z, t)$ sera désigné par le symbole $x^\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$; c'est-à-dire que nous écrivons explicitement

$$x^1\equiv x\,,\quad x^2\equiv y\,,\quad x^3\equiv z\,,\quad x^4\equiv t\,. \tag{2,1$_a$}$$

2° Les indices grecs prennent toujours les valeurs 1, 2, 3, 4 (dans l'ordre de (2,1)).

3° Un point $[x, y, z]$ de l'espace euclidien à trois dimensions $E[x, y, z]$ de coordonnées cartésiennes (orthogonales) x, y, z sera désigné par le symbole $x^i(i = = 1, 2, 3)$, c'est-à-dire que nous posons

$$x^1\equiv x\,,\quad x^2\equiv y\,,\quad x^3\equiv z\,, \tag{2,1$_b$}$$

(en accord avec $(2,1)_a$).

4° Les indices latins prennent toujours les valeurs 1, 2, 3 (dans l'ordre donné par $(2,1)_b$.

[2]) Dans les définitions, nous emploierons conséquemment le symbole $\equiv$ au lieu de $=$.

5° Nous dénoterons par $E(x^i)$ l'espace euclidien $E(x, y, z)$ en coordonnées orthogonales primitives; pour l'espace à quatre dimensions correspondant nous emploierons la notation $L(x^\alpha)$. Le symbole $L(*x^\alpha)$ désigne alors l'espace $L(*x, *y, *z, *t)$ et le symbole $E(*x^i)$ désigne l'espace euclidien, associé d'une façon biunivoque à l'espace $L(*x^\alpha)$.

6° Nous écrirons brièvement $*x^\alpha \sim x^\alpha$ pour désigner la transformation de Lorentz $(1,1)_{\mathrm{c,d}}$.

7° Une transformation orthogonale de coordonnées dans $E(x^i)$ sera dénotée par $\bar{x}^i \sim x^i$.

Le symbole δ_{ik} exprime le delta de Kronecker, c'est-à-dire

$$(2,2) \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = k \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, 3), \end{cases}$$

donc le tenseur métrique de l'espace euclidien $E(x^i)$. Posons ensuite

$$(2,4) \qquad g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ -c^2 & \text{pour} \quad \alpha = \beta = 4, \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Le système des grandeurs $g_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ sera appelé „tenseur métrique" de l'espace $L(x^\alpha)$.

Rappelons encore quelques résultats importants et bien connus:

Théorème 4. *Pour une transformation orthogonale* $\bar{x}^i \sim x^i$ *on a*

$$\delta_{ik}\bar{x}^i\bar{x}^k = \delta_{ik}x^i x^k ,$$

c'est-à-dire

$$(2,5)_{\mathrm{a}} \qquad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Pour la transformation de Lorentz $*x^\alpha \sim x^\alpha$ *on a*

$$*g_{\alpha\beta} *x^\alpha *x^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta ,$$

c'est-à-dire

$$(2,5)_{\mathrm{b}} \qquad *g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} .$$

La notion de vecteur dans $L(x^\alpha)$ sera introduite de la façon suivante:

Définition 3. Soit $v^\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ un système de quatre grandeurs (nombres), qui se transforment par $*x^\alpha \sim x^\alpha$ tout comme les coordonnées en $L(x^\alpha)$;[3]) un tel système sera appelé *vecteur de l'espace* $L(x^\alpha)$.

Cette définition entraîne immédiatement le théorème suivant (dont la démonstration est trop facile pour être reproduite ici):

[3]) Voir (1,1)c,d.

Théorème 5. *Soient v^α, w^α deux vecteurs dans l'espace $L(x^\alpha)$. Alors la grandeur*

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta \tag{2,6}$$

est invariante par rapport à la transformation générale de Lorentz.

Définition 4. Nous appelons la grandeur (2,6) produit scalaire des vecteurs v^α, w^α dans $L(x^\alpha)$. L'espace linéaire $L(x^\alpha)$ dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs est défini par (2,6), sera appelé *espace de Minkowski* (notation: $L(x^\alpha)$).

Remarque 1. Si x_1^α, x_2^α sont deux points de l'espace $L(x^\alpha)$, alors le segment orienté u de composantes $u^\alpha = x_2^\alpha - x_1^\alpha$ est évidemment un vecteur dans $L(x^\alpha)$. Le produit scalaire de ce vecteur par lui-même au sens de (2,6) représente la forme quadratique $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$, qui – en vertu de (2,4) – est une forme quadratique indéfinie. En définissant dans l'espace $L(x^\alpha)$ le produit scalaire de deux vecteurs par (2,6), nous avons obtenu à partir de l'espace linéaire (affin) $L(x^\alpha)$ un espace métrique $L(x^\alpha)$ avec une métrique indéfinie, c'est-à-dire l'espace de Minkowski.

Pour terminer ce paragraphe, signalons encore que le système des grandeurs $\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$ (c'est-à-dire: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$) est un vecteur dans $L(x^\alpha)$ aux points de la géodésique donnée. De façon analogue, $\mathrm{d}^2x^\alpha/\mathrm{d}\tau^2$, X^α sont des vecteurs dans $L(x^\alpha)$ aux points de la géodésique donnée.[4]) Nous remarquons, sans démonstration, que même les grandeurs $\mathrm{d}^3x^\alpha/\mathrm{d}\tau^3$, $\mathrm{d}^4x^\alpha/\mathrm{d}\tau^4$, etc sont (à condition d'avoir un sens) des vecteurs dans $L(x^\alpha)$, définis le long d'une géodésique.

En utilisant les notations introduites, nous pouvons écrire la relation (1,6) de façon plus sommaire comme

$$g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = -c^2 , \tag{2,7$_\mathrm{a}$}$$

ou encore comme

$$\delta_{ik} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} - c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -c^2 . \tag{2,7$_\mathrm{b}$}$$

D'une manière analogue, nous pouvons écrire (1,9) sous forme de

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0 , \tag{2,8$_\mathrm{a}$}$$

ou bien

$$\delta_{ik} X^i \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} - c^2 T \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 0 . \tag{2,8$_\mathrm{b}$}$$

Nous voyons aisément, en vertu du théorème 5, que les premiers membres de $(2,7)_\mathrm{a}$, $(2,7)_\mathrm{b}$ sont invariants par rapport à la transformation $^*x^\alpha \sim x^\alpha$. Il s'en suit que les équations $(2,7)_\mathrm{a}$ et $(2,7)_\mathrm{b}$ sont également invariantes par rapport à cette transformation.

---

[4]) Ce qui découle immédiatement du théorème 2 et de la Définition 3.

3. LA FORCE DE MINKOWSKI

Dans ce paragraphe, nous envisagerons un vecteur spécial dans $L(x^\alpha)$, à savoir le vecteur-force de Minkowski, défini en (1,7). Pour le produit scalaire

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \quad {}^{5)} \tag{3,1}$$

de ce vecteur par lui-même, nous avons:

Théorème 6. *Aux points de la géodésique* (1,5) *donnée, le produit scalaire* (3,1) *est invariant par rapport à la transformation de Lorentz* $*x^\alpha \sim x^\alpha$, *et il est non-négatif en chacun de ses points.*

Démonstration. Pour faire voir que le produit scalaire (3,1) est invariant par rapport à la transformation $*x^\alpha \sim x^\alpha$, il suffit de rappeler le théorème 5 et de remarquer que X^α est un vecteur dans $L(x^\alpha)$, défini aux points de la géodésique donnée.

Pour démontrer le reste du théorème, il suffit de démontrer l'identité suivante:

$$(g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \equiv)\, X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2T^2 = \tag{3,2}$$

$$= (1 - v^2/c^2)\left[X^2 + Y^2 + Z^2 + c^{-2}\left\| \begin{matrix} X & Y & Z \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{matrix} \right\|^2\right],$$

où

$$\left\| \begin{matrix} X & Y & Z \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{matrix} \right\|^2 \equiv \begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X \\ \dfrac{dz}{d\tau} & \dfrac{dx}{d\tau} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} \end{vmatrix}^2 .$$

En vertu de $(2,8)_b$ nous avons

$$T = \frac{1}{c^2}\,\delta_{ik}X^i\,\frac{dx^k}{dt},$$

donc aussi

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = \delta_{ik}X^iX^k - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\left(\delta_{ik}X^i\,\frac{dx^k}{d\tau}\right)^2. \tag{3,3}$$

D'autre part, il est facile de vérifier la relation

$$\left\| \begin{matrix} X & Y & Z \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{matrix} \right\|^2 = (\delta_{ik}X^iX^k)\left(\delta_{jl}\,\frac{dx^j}{d\tau}\,\frac{dx^l}{d\tau}\right) - \left(\delta_{ik}X^i\,\frac{dx^k}{d\tau}\right)^2.$$

---

5) Ici $X^1 \equiv X$, $X^2 \equiv Y$, $X^3 \equiv Z$, $X^4 \equiv T$.

Si nous en tirons la grandeur $(\delta_{ik}X^i\, \mathrm{d}x^k/\mathrm{d}\tau)$ et que nous la portions en (3,3), nous obtenons après quelques modifications:

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = \delta_{ik}X^iX^k\left(1 - \frac{1}{c^2}\,\delta_{jl}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left\Vert \begin{matrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{matrix} \right\Vert^2,$$

donc aussi – en vertu de $(2{,}7)_\mathrm{b}$ –

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left[\delta_{ik}X^iX^k + \frac{1}{c^2}\left\Vert \begin{matrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{matrix} \right\Vert^2\right].$$

Si nous y substituons pour $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ de (1,4), nous obtenons précisement la relation (3,2) qui implique le reste du théorème à démontrer (cela découle de ce que le second membre de (3,2) est non-négatif).

Théorème 7. *A lieu l'équivalence*

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = Y = Z = T = 0$$

Démonstration. Si $g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0$, alors $X = Y = Z = 0$ découle de (3,2), car $1 - v^2/c^2 > 0$. De là et de (1,9), nous déduissons que $T = 0$ également. L'implication inverse est évidente.

Les propriétés établies par les théorèmes 6 et 7 nous permettent d'énoncer la définition suivante:

Définition 5. La grandeur scalaire

$$P \equiv \sqrt{(g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta)}\,, \tag{3,4}$$

définie aux points de la géodésique donnée d'une particule matérielle dans $L(x^\alpha)$, sera appelée *mesure de la force de Minkowski* (agissant sur la particule matérielle aux points de la géodésique donnée).

Théorème 8. *Le carré de la mesure de la force de Minkowski vérifie*

$$P^2 = \delta_{ik}\bar{X}^i\bar{X}^k + \frac{1}{c^2}\left\Vert \begin{matrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{matrix} \right\Vert^2 \tag{3,5}$$

où $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ sont les composantes de la force de Newton, définie en $(1{,}11)_\mathrm{b}$.

La démonstration découle immédiatement de (3,2) et $(1{,}11)_\mathrm{b}$.

Remarque 2. La formule (3,5) peut être écrite d'une façon plus simple. Dans ce but, introduisons la notation

$$\bar{P} \equiv \sqrt{(\delta_{ik}\bar{X}^i\bar{X}^k)}\,; \tag{3,6$_\mathrm{a}$}$$

$\bar{P}$ sera donc la grandeur du vecteur force de Newton dans $E(x^i)$. Aux points de la géodésique donnée, pour lesquels on a $v \neq 0$, $\bar{P} \neq 0$, les vecteurs

$$(3,6)_b \qquad j_1^l \equiv \frac{\dfrac{dx^l}{d\tau}}{\sqrt{\left(\delta_{ik}\dfrac{dx^i}{d\tau}\dfrac{dx^k}{d\tau}\right)}}, \quad l = 1, 2, 3,$$

et

$$(3,6)_c \qquad j_2^l \equiv \frac{\bar{X}^l}{\bar{P}}, \quad l = 1, 2, 3,$$

sont définis univoquement; ce sont, d'une façon évidente, des vecteurs unitaires dans $E(x^i)$, c'est-à-dire

$$\delta_{lk} j_1^l j_1^k = 1, \quad \delta_{lk} j_2^l j_2^k = 1.$$

A l'aide de ces vecteurs, il est posible d'écrire, suivant $(3,6)_{b,c}$ le deuxième terme de la somme figurant au second membre de (3,5) comme

$$(3,6)_d \qquad \frac{1}{c^2}\left\|\begin{matrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{matrix}\right\|^2 = \frac{1}{c^2}\bar{P}\left(\delta_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right)\left\|\begin{matrix} j_1^1 & j_1^2 & j_1^3 \\ j_2^1 & j_2^2 & j_2^3 \end{matrix}\right\|^2.$$

En désignant par α l'angle que font les vecteurs $\bar{X}^i$, $dx^i/d\tau$, donc l'angle que fait le vecteur-force de Newton avec le vecteur tangent au point considéré de la géodésique, nous avons[6])

$$\sin^2\alpha = \left\|\begin{matrix} j_1^1 & j_1^2 & j_1^3 \\ j_2^1 & j_2^2 & j_2^3 \end{matrix}\right\|^2.$$

Ensuite, il découle de (1,2), (1,4) que

$$\delta_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = \delta_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}.$$

En vertu des deux relations précédentes nous obtenons la suivante modification de la relation $(3,6)_b$:

$$\frac{1}{c^2}\left\|\begin{matrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} \\ \dfrac{dx}{d\tau} & \dfrac{dy}{d\tau} & \dfrac{dz}{d\tau} \end{matrix}\right\|^2 = \bar{P}^2\frac{\dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\sin^2\alpha,$$

ce qui nous permet avec $(3,6)_a$ de faire des substitutions en (3,5); après quelques modifications, nous obtenons

$$(3,7) \qquad P^2 = \bar{P}^2\frac{1 - (v^2/c^2)\cos^2\alpha}{1 - v^2/c^2},$$

[6]) C'est la formule bien connue pour le sinus de l'angle de deux vecteurs uniuaires dans E_3

ce qui est la relation cherchée – assez simple d'ailleurs – existant entre la mesure de Minkowski et le vecteur-force de Newton.

Remarque 3. Dans l'espace original $E(x^i)$, définissons le vecteur $\bar{\bar{X}}^i$ de la façon suivante:

$$\bar{\bar{X}}^i \equiv \frac{1}{c}\, \delta^{il} \eta_{ljk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau} X^k , \tag{3,8}$$

où δ^{il} est le delta de Kronecker,[7])

$$\eta_{ljk} = \begin{cases} 0, & \text{si au moins deux indices sont égaux,} \\ 1, & \text{si les indices sont tous différents et la permutation est paire,} \\ -1, & \text{si les indices sont tous différents et la permutation est impaire.} \end{cases}$$

Si nous écrivons $\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Z}}$ au lieu de $\bar{\bar{X}}^1, \bar{\bar{X}}^2, \bar{\bar{X}}^3$, les équations de définition (3,8) prennent la forme

$$\bar{\bar{X}} \equiv \frac{1}{c} \begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix}, \quad \bar{\bar{Y}} \equiv \frac{1}{c} \begin{vmatrix} Z & X \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix}, \quad \bar{\bar{Z}} \equiv \frac{1}{c} \begin{vmatrix} X & Y \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix}.$$

La longueur de ce vecteur est

$$\bar{\bar{P}} = \sqrt{(\delta_{ik} \bar{\bar{X}}^i \bar{\bar{X}}^k)} . \tag{3,9}$$

Il est évident qu'il est possible d'écrire alors (3,5) comme

$$P^2 = \bar{P}^2 + \bar{\bar{P}}^2 . \tag{3,10}$$

Il est facile de vérifier que les composantes $\bar{\bar{X}}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ ainsi que le scalaire $\bar{\bar{P}}$ ont la dimension d'une force. Du point de vue pour le moment purement formel nous pouvons associer à chaque point de la grandeur considéré, en dehors du vecteur-force de Newton, un autre vecteur-force de composantes $\bar{\bar{X}}^i$ dans $E(x^i)$.

Le vecteur $\bar{\bar{X}}^i$ est, évidemment, orthogonal dans $E(x^i)$ aux vecteurs X^i, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau$, c'est-à-dire

$$\delta_{ik} \bar{\bar{X}}^i X^k = 0 , \quad \delta_{ik} \bar{\bar{X}}^i \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} = 0 ;$$

cela découle immédiatement de (3,8).

Pour caractériser le vecteur $\bar{\bar{X}}^i$ dans $E(x^i)$ d'une façon plus précise, il faut nous rendre compte de ceci: Si le vecteur $\bar{\bar{X}}^i$ était nul, on aurait forcément $\bar{\bar{P}} = 0$, donc la matrice

$$\begin{Vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{Vmatrix}$$

[7]) c'est donc le tenseur contragredient au tenseur métrique δ_{ik} dans $E(x^i)$.

serait de rang inférieur à deux. Comme nous avons

$$\overline{X}^i = \kappa X^i = \kappa\mu \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \quad \text{et} \quad \kappa\mu \neq 0 \,,$$

la matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{Vmatrix}$$

serait également de rang inférieur à deux. Or, toute courbe dans $E(x^i)$ qui satisfait à cette condition en chacun de ses points est une droite dans $E(x^i)$. Donc, si $\overline{\overline{P}} = 0$ aux points de la trajectoire donnée de la particule matérielle dans $E(x^i)$, il s'agirait d'un mouvement qui, rapporté au système $E(x^i)$, apparaît comme un mouvement rectiligne. Si $\overline{\overline{P}}$ ne s'annule pas identiquement aux points de la trajectoire, alors cette trajectoire n'est pas une droite dans $E(x^i)$.

Rappelons encore que ni la mesure $\overline{P}$ du vecteur-force de Newton ni la mesure $\overline{\overline{P}}$ ne sont invariantes par rapport aux transformations de Lorentz, tandis que la mesure P du vecteur-force de Minkowski est invariante par rapport à cette transformation.

4. LES FORMULES DE FRENET POUR LA GÉODÉSIQUE

Considérons les équations (1,3) décrivant la trajectoire d'une particule matérielle de masse de repos μ dans le système spatio-temporel original $L(x, y, z, t) \equiv L(x^\alpha)$. Dans ce qui suit, nous supposerons que les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de (1,3) sont au moins cinq fois continûment dérivables dans l'intervalle considéré $\langle \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \rangle$ du paramètre t. Si nous rapportons cette géodésique au paramètre τ (temps propre introduit en (1,4)), alors cette géodésique sera décrite par (1,5), c'est-à-dire par

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau) \,, \quad \tau \in \langle 0, \underset{0}{\delta} \rangle \,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \,, \tag{4,1}$$

où les fonctions $x^\alpha(\tau)$ sont au moins cinq fois continûment dérivables dans l'intervalle $\langle 0, \underset{0}{\tau} \rangle$.

Théorème 9. *Soit $g_{\alpha\beta}$ le tenseur dans $L(x^\alpha)$ introduit en (2,4) et soit*

$$i^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \tag{4,2}$$

le vecteur tangent à la géodésique (4,1). Alors pour tout vecteur $a^\alpha = a^\alpha(\tau)$, défini aux points de la géodésique (4,1), vérifiant la condition

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\alpha} a^\beta = 0 \,, \tag{4,3$_\mathrm{a}$}$$

nous avons

$$(4,3)_b \qquad g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \geqq 0\,.$$

Nous ferons la démonstration d'une manière analogue à celle du théorème 6. Nous avons évidemment:

$$(4,4) \qquad g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = \delta_{jk} a^j a^k - c^2(a^4)^2 = \delta_{jk} a^j a^k - c^2 \left(\frac{1}{c^2}\, \delta_{jk} \underset{1}{i}^j a^k \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right) =$$
$$= \delta_{jk} a^j a^k - \frac{1}{c^2}\, (\delta_{jk} \underset{1}{i}^j a^k)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

où nous nous sommes servi de la condition $(4,3)_a$.[8]) De l'autre côté, nous avons l'identité

$$\left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 \end{matrix} \right\|^2 = (\delta_{jk} a^j a^k)(\delta_{lr} \underset{1}{i}^l \underset{1}{i}^r) - (\delta_{jk} a^j \underset{1}{i}^k)^2.$$

A partir de cette identité nous calculons $(\delta_{jk} a^j \underset{1}{i}^k)^2$ et nous le substituons en (4,4). Après quelques modifications, nous obtenons

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = \delta_{jk} a^j a^k \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 \delta_{lr} \underset{1}{i}^l \underset{1}{i}^r\right] + \frac{1}{c^2} \left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 \end{matrix} \right\|^2.$$

Il en résulte à l'aide de $(2,7)_b$

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 \delta_{jk} a^j a^k + \frac{1}{c^2} \left\| \begin{matrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 \end{matrix} \right\|^2,$$

ce qui implique déjà évidemment l'énoncé.

Théorèeme 10^a. *Aux points de la géodésique, pour lesquels $P \neq 0$, les relations*

$$(4,5) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{P}{\mu}\, \underset{2}{i}^\alpha$$

déterminent d'une façon univoque le vecteur $\underset{2}{i}^\alpha$, lequel vecteur satisfait aux conditions

$$(4,6)\mathrm{a} \qquad g_{\alpha\beta} \underset{2}{i}^\alpha \underset{1}{i}^\beta = 0\,,$$

$$(4,6)\mathrm{b} \qquad g_{\alpha\beta} \underset{2}{i}^\alpha \underset{2}{i}^\beta = 1\,.$$

Démonstration. Les relations (4,5) et (1,7) entraînent

$$\underset{2}{i}^\alpha = \frac{1}{P}\, X^\alpha\,,$$

de là et de $(2,8)_b$ et (3,4) les conditions $(4,6)_a$ et $(4,6)_b$ découlent alors immédiatement,

Remarque 4. Pour les points de la géodésique où $P = 0$ le vecteur $\underset{2}{i}^\alpha$ aux pro-

[8]) De la relation $(4,3)_a$ nous calculons a^4 et puis nous appliquons la relation de définition $\underset{1}{i}^4 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

priétés $(4,6)_{a,b}$ n'est pas défini d'une façon univoque. En ces points, il est évidemment possible de choisir le vecteur $\underset{2}{i}^{\alpha}$ arbitrairement pourvu qu'il jouisse des propriétés $(4,6)_{a,b}$, c'est-à-dire qu'il soit orthogonal au vecteur $\underset{1}{i}^{\alpha}$ et unitaire au sens de la métrique de Minkowski. La relation (4,5) sera alors valable même aux points de la géodésique pour lesquels $P = 0$.

Théorème 10[b]. *Pour un point de la géodésique où $P \neq 0$ nous avons la relation*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i}^{\alpha} = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i}^{\alpha} + \frac{Q}{\mu c}\underset{3}{i}^{\alpha} \tag{4,7}$$

où $\underset{3}{i}^{\alpha}$ est un vecteur lié au point considéré et jouissant des propriétés

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^{\alpha}\underset{3}{i}^{\beta} = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{i}^{\alpha}\underset{3}{i}^{\beta} = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\underset{3}{i}^{\beta} = 1\,; \tag{4,8}$$

la grandeur Q est un scalaire qui, pour une orientation convenable du vecteur, est défini ainsi:

$$Q \equiv \frac{\mu^3 c}{P^2}\left[\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \right.$$
$$\left. + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2\right]^{1/2}. \tag{4,9}$$

Démonstration. Le système des grandeurs $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,\underset{2}{i}^{\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ au point considéré de la géodésique (4,1) donnée dans $L(x^{\alpha})$ représente en ce point un vecteur dans $L(x^{\alpha})$, qui peut être décomposé en une composante dans la direction du vecteur $\underset{1}{i}^{\alpha}$, une autre composante dans la direction du vecteur $\underset{2}{i}^{\alpha}$, et enfin en une troisième composante w^{α} situé dans le plan orthogonal (au sens de la métrique de Minkowski) aux vecteurs $\underset{1}{i}^{\alpha}$, $\underset{2}{i}^{\alpha}$ au point considéré. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i}^{\alpha} = A\underset{1}{i}^{\alpha} + B\underset{2}{i}^{\alpha} + w^{\alpha}\,, \tag{4,10}$$

où

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^{\alpha}w^{\beta} = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{i}^{\alpha}w^{\beta} = 0\,. \tag{4,11}$$

Compte tenu de la condition

$$(4{,}12) \qquad g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\alpha} \underset{1}{i^\beta} = -c^2 \quad {}^{9})$$

et de $(4{,}6)_a$, (4,11), il résulte de (4,10) que

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i^\alpha} = -Ac^2 .$$

Or $(4{,}6)_a$ implique

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i^\alpha} = -g_{\alpha\beta} \underset{2}{i^\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{1}{i^\beta} = -g_{\alpha\beta} \underset{2}{i^\alpha} \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} ,$$

donc aussi d'après (4,5) et $(4{,}6)_b$

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i^\alpha} = -\frac{P}{\mu} g_{\alpha\beta} \underset{2}{i^\alpha} \underset{2}{i^\beta} = -\frac{P}{\mu} .$$

En vertu de cela et de ce qui précède, nous obtenons

$$(4{,}13) \qquad A = \frac{P}{\mu c^2} .$$

D'une façon analogue, nous calculons – à l'aide des relations (4,11) et $(4{,}6)_b$ – à partir de (4,10), que $B = 0$. Joint à (4,13), cela nous donne

$$(4{,}14) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu c^2} \underset{1}{i^\alpha} + w^\alpha$$

où le vecteur w^α satisfait aux conditions (4,11).

Définissons, au point considéré de la géodésique donnée, le vecteur q^α comme suit:

$$(4{,}15) \qquad q^1 \equiv c \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} , \quad q^2 \equiv c \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} ,$$

$$q^3 \equiv c \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} , \quad q^4 \equiv \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} .$$

---

[9]) voir $(2{,}7)_a$.

Nous allons montrer que le vecteur q^α vérifie toujours l'inégalité

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta \geqq 0\,. \tag{4,16}$$

Pour démontrer (4,16) il suffit de faire voir que l'on a

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha \underset{1}{i}^\beta = 0\,,$$

d'où (4,16) résultera en vertu du théorème 9. Or, il est facile de voir que nous avons

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha \underset{1}{i}^\beta = g_{\alpha\beta}q^\alpha \dot{x}^\beta = c \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \end{vmatrix} = 0\,.$$

On a donc (4,16) en tout point de la géodésique donnée. A partir des équations (4,15), nous calculons facilement aussi

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = c^2 \left[\begin{vmatrix} \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^3}{d\tau^2} & \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^3}{d\tau^3} & \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \right. \tag{4,17}$$

$$\left. + \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} \end{vmatrix}^2 \right].$$

Il découle de (4,17) et (4,16) que la grandeur Q définie par (4,9) est toujours un nombre réel (non-négatif).

Au point considéré de la géodésique donnée, définissons maintenant le vecteur $\underset{3}{i}^\alpha$ par les équations (cf. (4,8)):

$$w^\alpha = S\underset{3}{i}^\alpha\,, \tag{4,18$_a$}$$

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^\alpha \underset{3}{i}^\beta = 0\,,\quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{i}^\alpha \underset{3}{i}^\beta = 0\,,\quad g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^\alpha \underset{3}{i}^\beta = 1\,, \tag{4,18$_b$}$$

où le vecteur w^α est déterminé d'une façon univoque par les équations (4,14) et $S = S(\tau)$ est un scalaire (inconnu pour l'instant). Si w^α est le vecteur nul au point considéré de la géodésique, nous posons tout simplement $S = 0$ pour ce point et nous choisissons le vecteur $\underset{3}{i}^\alpha$ arbitrairement, pourvu qu'il satisfasse aux conditions (4,8).

On peut montrer maintenant[10]) que les vecteurs $\underset{1}{i}^\alpha$, $\underset{2}{i}^\alpha$, $\underset{3}{i}^\alpha$ vérifient les relations

$$(4,19)\qquad \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 & \underset{1}{i}^4 \\ \underset{2}{i}^2 & \underset{2}{i}^3 & \underset{2}{i}^4 \\ \underset{3}{i}^2 & \underset{3}{i}^3 & \underset{3}{i}^4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^3 & \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^4 \\ \underset{2}{i}^3 & \underset{2}{i}^1 & \underset{2}{i}^4 \\ \underset{3}{i}^3 & \underset{3}{i}^1 & \underset{3}{i}^4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^4 \\ \underset{2}{i}^1 & \underset{2}{i}^2 & \underset{2}{i}^4 \\ \underset{3}{i}^1 & \underset{3}{i}^2 & \underset{3}{i}^4 \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 \\ \underset{2}{i}^1 & \underset{2}{i}^2 & \underset{2}{i}^3 \\ \underset{3}{i}^1 & \underset{3}{i}^2 & \underset{3}{i}^3 \end{vmatrix}^2 = 1 \,.$$

En vertu de (4,5), $(4,18)_a$, il est possible de donner aux relations (4,14) la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mu}{P}\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}\right) = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i}^\alpha + S\underset{3}{i}^\alpha \,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^3} = \frac{P^2}{\mu^2c^2}\underset{1}{i}^\alpha + \frac{\dot{P}}{\mu}\underset{2}{i}^\alpha + \frac{PS}{\mu}\underset{3}{i}^\alpha \,.$$

Cela donne avec (4,5)

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} = \frac{P^2S}{\mu^2} \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^2 & \underset{1}{i}^3 & \underset{1}{i}^4 \\ \underset{2}{i}^2 & \underset{2}{i}^3 & \underset{2}{i}^4 \\ \underset{3}{i}^2 & \underset{3}{i}^3 & \underset{3}{i}^4 \end{vmatrix} .$$

D'une façon tout à fait analogue, nous trouvons

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} = \frac{P^2S}{\mu^2} \begin{vmatrix} \underset{1}{i}^3 & \underset{1}{i}^1 & \underset{1}{i}^4 \\ \underset{2}{i}^3 & \underset{2}{i}^1 & \underset{2}{i}^4 \\ \underset{3}{i}^3 & \underset{3}{i}^1 & \underset{3}{i}^4 \end{vmatrix} ,$$

[10]) La démonstration se fait machinalement par un calcul algébrique, en exploitant convenablement les conditions $(4,6)_{a,b}$, $(4,18)_b$.

$$\begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \end{vmatrix} = \frac{P^2S}{\mu^2} \begin{vmatrix} \underset{1}{i^1} & \underset{1}{i^2} & \underset{1}{i^4} \\ \underset{2}{i^1} & \underset{2}{i^2} & \underset{2}{i^4} \\ \underset{3}{i^1} & \underset{3}{i^2} & \underset{3}{i^4} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} \end{vmatrix} = \frac{P^2S}{\mu^2} \begin{vmatrix} \underset{1}{i^1} & \underset{1}{i^2} & \underset{1}{i^3} \\ \underset{2}{i^1} & \underset{2}{i^2} & \underset{2}{i^3} \\ \underset{3}{i^1} & \underset{3}{i^2} & \underset{3}{i^3} \end{vmatrix},$$

d'où et de (4,17) et (4,19) découle immédiatement

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = P^4 S^2 c^2 \mu^{-4}\,. \tag{4,20}$$

D'autre part, il est évident de (4,9) et (4,17), que l'on a

$$Q^2 = \frac{\mu^6}{P^4} g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta\,.$$

Cela donne avec (4,20) que $S^2 = Q^2/c^2\,\mu^2$, donc – en vertu de ce que $S \geqq 0$ dans $(4{,}18)_a$ – nous avons $S = Q/c\,\mu$. Si nous substituons pour S dans $(4{,}18)_a$ et que nous portions l'expressions correspondante du vecteur w^α aux relations (4,14), nous obtenons les relations (4,7) où Q a la signification déterminé par (4,9).

Théorème 10^c. *Au point de la géodésique (4,1), pour lequel on a $P \neq 0$, $Q \neq 0$, nous avons la relation*

$$\frac{d}{d\tau}\underset{3}{i^\alpha} = -\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i^\alpha} + \frac{R}{\mu c}\underset{4}{i^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{4,21}$$

où $\underset{4}{i^\alpha}$ est un vecteur au point considéré de la géodésique donée, tel que

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} = 0\,; \quad g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} = 1\,, \tag{4,22$_a$}$$

$R = R(\tau)$ étant un scalaire non-négatif défini par

$$R = \frac{\mu^6 c^3 \vartheta}{Q^2 P^3} \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \\ \frac{d^4x^1}{d\tau^4} & \frac{d^4x^2}{d\tau^4} & \frac{d^4x^3}{d\tau^4} & \frac{d^4x^4}{d\tau^4} \end{vmatrix}, \tag{4,22$_b$}$$

ϑ représente le signe du déterminant figurant au second membre de $(4{,}22)_b$.

Démonstration. Le système des grandeurs $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,\underset{3}{i}^{\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ au point en question de la géodésique (4,1) donnée dans $L(x^{\alpha})$ représente en ce point un vecteur dans $L(x^{\alpha})$ qui peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{1}{i}^{\alpha}$, $\underset{2}{i}^{\alpha}$, $\underset{3}{i}^{\alpha}$, $\underset{4}{i}^{\alpha}$ en ce point, le vecteur $\underset{4}{i}^{\alpha}$ vérifiant les équations (4,22)a.[11] Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha} = A_1 \underset{1}{i}^{\alpha} + A_2 \underset{2}{i}^{\alpha} + A_3 \underset{3}{i}^{\alpha} + A_4 \underset{4}{i}^{\alpha}\,, \tag{4,23}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont les coefficients de la combinaison linéaire en question. En vertu des conditions (4,12), $(4,6)_{\mathrm{a,b}}$, (4,8), $(4,22)_{\mathrm{a}}$, il découle de (4,23) avant tout

$$g_{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\right)\underset{1}{i}^{\beta} = -\,c^2 A_1\,, \quad g_{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\right)\underset{2}{i}^{\beta} = A_2\,, \quad g_{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\right)\underset{3}{i}^{\beta} = A_3\,.$$

Compte tenu de (4,8) et (4,5) on a

$$g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\underset{1}{i}^{\beta} = 0 \;\Rightarrow\; g_{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\right)\underset{1}{i}^{\beta} = -\,g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{1}{i}^{\beta} = -\,(P/\mu)\,g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\underset{2}{i}^{\beta} = 0\,,$$

donc $A_1 = 0$. D'une façon analogue, en tenant compte de (4,8) et (4,7), nous obtenons

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\underset{2}{i}^{\beta} = 0 \;\Rightarrow\; g_{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\right)\underset{2}{i}^{\beta} &= -\,g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{2}{i}^{\beta} = \\ &= -\,g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\big((P/\mu c^2)\,\underset{1}{i}^{\beta} + (Q/\mu c)\,\underset{3}{i}^{\beta}\big) = -\,Q/\mu c\,, \end{aligned}$$

donc $A_2 = -\,Q/\mu c$. La condition $g_{\alpha\beta}\underset{3}{i}^{\alpha}\underset{3}{i}^{\beta} = 0$ donne par un calcul facile $A_3 = 0$. L'équation (4,23) peut donc s'écrire comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{3}{i}^{\alpha} = -\,(Q/\mu c)\,\underset{2}{i}^{\alpha} + A_4 \underset{4}{i}^{\alpha}\,. \tag{4,24}$$

Désignons par $[\mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau,\ \mathrm{d}^2x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^2,\ \mathrm{d}^3x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^3,\ \mathrm{d}^4x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^4]$ le déterminant formé de composantes des vecteurs $\mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}^2x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^2$, $\mathrm{d}^3x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^3$, $\mathrm{d}^4x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^4$. Alors (4,5), (4,7) et (4,24) donnent avant tout

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{P}{\mu}\,\underset{2}{i}^{\alpha}\,, \\ \frac{\mathrm{d}^3x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{P}{\mu}\right)\underset{2}{i}^{\alpha} + \frac{P}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\underset{2}{i}^{\alpha} = \frac{P^2}{\mu^2c^2}\,\underset{1}{i}^{\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{P}{\mu}\right)\underset{2}{i}^{\alpha} + \frac{PQ}{\mu^2 c}\,\underset{3}{i}^{\alpha}\,, \end{aligned}$$

---

[11]) La signification des vecteurs $\underset{1}{i}^{\alpha}$, $\underset{2}{i}^{\alpha}$, $\underset{3}{i}^{\alpha}$ a été précisée au théorème 10^{b}.

$$\frac{d^4x^\alpha}{d\tau^4} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{P^2}{\mu^2c^2}\right)\underset{1}{i^\alpha} + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{P}{\mu}\right)\underset{2}{i^\alpha} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{PQ}{\mu^2c}\right)\underset{3}{i^\alpha} +$$
$$+ \frac{P^2}{\mu^2c^2}\frac{d}{d\tau}\underset{1}{i^\alpha} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{P}{\mu}\right)\frac{d}{d\tau}\underset{2}{i^\alpha} + \frac{PQ}{\mu^2c}\frac{d}{d\tau}\underset{3}{i^\alpha} =$$
$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{P^2}{\mu^2c^2}\right)\underset{1}{i^\alpha} + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{P}{\mu}\right)\underset{2}{i^\alpha} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{PQ}{\mu^2c}\right)\underset{3}{i^\alpha} + \frac{P^3}{\mu^3c^2}\underset{2}{i^\alpha} +$$
$$+ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{P}{\mu}\right)\left(\frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i^\alpha} + \frac{Q}{\mu c}\underset{3}{i^\alpha}\right) + \frac{PQ}{\mu^2c}\left(-\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i^\alpha} + A_4\underset{4}{i^\alpha}\right) =$$
$$= (\ldots)\underset{1}{i^\alpha} + (\ldots)\underset{2}{i^\alpha} + (\ldots)\underset{3}{i^\alpha} + \frac{PQ}{\mu^2c}A_4\underset{4}{i^\alpha},$$

les scalaires — coefficients des vecteurs $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}$ — facilement calculables de ce qui précède, ne sont pas indispensables à être écrits explitement. Les expressions précédentes donnent

$$\left[\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}\,\frac{d^3x^\alpha}{d\tau^3}\,\frac{d^4x^\alpha}{d\tau^4}\right] = \left[\underset{1}{i^\alpha}, \frac{P}{\mu}\underset{2}{i^\alpha}, \frac{PQ}{\mu^2c}\underset{3}{i^\alpha}, \frac{PQ}{\mu^2c}A_4\underset{4}{i^\alpha}\right] = \tag{4,25}$$
$$= \frac{P^3Q^2A_4}{\mu^5c^2}\left[\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}\right].$$

A l'aide du théorème sur la multiplication de déterminants, nous trouvons facilement (en tenant compte de $(4,6)_{a,b}$, (4,12), (4,8), $(4,22)_a$) que

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underset{1}{i^1} & \underset{1}{i^2} & \underset{1}{i^3} & \underset{1}{i^4} \\ \underset{2}{i^1} & \underset{2}{i^2} & \underset{2}{i^3} & \underset{2}{i^4} \\ \underset{3}{i^1} & \underset{3}{i^2} & \underset{3}{i^3} & \underset{3}{i^4} \\ \underset{4}{i^1} & \underset{4}{i^2} & \underset{4}{i^3} & \underset{4}{i^4} \end{vmatrix}^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{3}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} \\ g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{3}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} \\ g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{3}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} \\ g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{3}{i^\beta} & g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\alpha}\underset{4}{i^\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -c^2.$$

Comme le déterminant formé des composantes du tenseur $g_{\alpha\beta}$ est aussi égal à $-c^2$, il résulte de ce qui précède que

$$\left[\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}\right]^2 = 1,$$

c'est-à-dire

$$[\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}] = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)\,.$$

Cela donne alors avec (4,25)

$$A_4 = \frac{u^5 c^2 \varepsilon}{P^3 Q^2} \left[\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \; \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \; \frac{\mathrm{d}^3 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^3} \; \frac{\mathrm{d}^4 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^4} \right]. \tag{4,26}$$

Par les équations $(4,22)_a$, le vecteur $\underset{4}{i^\alpha}$ est déterminé à l'orientation près. En posant

$$\vartheta = \operatorname{sgn} \left[\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \; \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \; \frac{\mathrm{d}^3 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^3} \; \frac{\mathrm{d}^4 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^4} \right]$$

dans le cas où le déterminant correspondant est non-nul et en choissant $\varepsilon = \vartheta$, nous voyons que A_4, défini par (4,26) est, dans nos hypothèses, toujours positif. Dans le cas où $[\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau,\ \mathrm{d}^2x^\alpha/\mathrm{d}\tau^2,\ \mathrm{d}^3x^\alpha/\mathrm{d}\tau^3,\ \mathrm{d}^4x^\alpha/\mathrm{d}\tau^4] = 0$, prenons toujours $\varepsilon = 1$, pour écarter l'équivoque.

Si nous posons de plus $R \equiv \mu c A_4$, il découle de ce qui précède que l'on a $(4,22)_b$ pour R. La validité de la formule (4,21) est alors évidente. On a donc toujours $R \geqq 0$.

Théorème 10[d]. *Au point de la géodésique* (4,1) *où l'on a* $P \neq 0$, $Q \neq 0$, *la relation*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha} = -\frac{R}{\mu c} \underset{3}{i^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{4,27}$$

a lieu, les vecteurs $\underset{4}{i^\alpha}$, $\underset{3}{i^\alpha}$ *et le scalaire* R *ayant la même signification qu'au théorème précédent.*

Démonstration. Le système des grandeurs $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,\underset{4}{i^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ en un point de la géodésique (4,1) (donnée dans $L(x^\alpha)$) représente en ce point un vecteur de l'espace $L(x^\alpha)$, qu'il est possible d'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ en ce point, c'est-à-dire comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha} = B_1 \underset{1}{i^\alpha} + B_2 \underset{2}{i^\alpha} + B_3 \underset{3}{i^\alpha} + B_4 \underset{4}{i^\alpha}\,.$$

Cela donne avec (4,12), $(4,6)_{a,b}$, (4,8), $(4,22)_a$

$$B_1 = -\frac{1}{c^2} g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha}\,, \quad B_2 = g_{\alpha\beta} \underset{2}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha}\,,$$

$$B_3 = g_{\alpha\beta} \underset{3}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha}\,, \qquad B_4 = g_{\alpha\beta} \underset{4}{i^\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha}\,.$$

Un calcul analogue à celui des grandeurs A_1, A_2 (voir le début de la démonstration due théorème 10[c]) fait voir facilement que l'on a $B_1 = B_2 = B_4 = 0$, $B_3 = -R/\mu c$.

Définition 6. Les systèmes d'équations (4,5), (4,7), (4,21), (4,27), c'est-à-dire les équations

$$(4,28)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{1}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu}\underset{2}{i^\alpha}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i^\alpha} + \frac{Q}{\mu c}\underset{3}{i^\alpha}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{3}{i^\alpha} = -\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i^\alpha} + \frac{R}{\mu c}\underset{4}{i^\alpha}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{4}{i^\alpha} = -\frac{R}{\mu c}\underset{3}{i^\alpha}$$

s'appellent *formules de Frenet de la géodésique dans* $L(x^\alpha)$.

Remarque 5. Si $P = 0$ et si nous posons $Q = R = 0$, alors les équations (4,28) restent en vigueur. D'une façon analogue, si $P \neq 0$, $Q = 0$, nous posons $R = 0$ et les équations (4,28) sont de nouveau valables.

Théorème 11. *Les scalaires P, Q, R des formules de Frenet* (4,28) *jouissent des propriétés suivantes*:

a) *ils sont invariants par rapport aux transformations de Lorentz*;

b) *ils sont invariants par rapport aux transformations orthogonales des coordonnées x^i dans l'espace $E(x^i)$ correspondant*;

c) *ils ont la dimension d'une force.*

Démonstration. Soit ${}^*x^\alpha = A^{*\alpha}_\beta x^\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ la transformation de Lorentz générale. C'est donc une transformation linéaire de coordonnées dans $L(x^\alpha)$, vérifiant $(2,5)_\mathrm{b}$. Tout vecteur v^α dans $L(x^\alpha)$ se transforme donc suivant la formule ${}^*v^\alpha = A^{*\alpha}_\beta v^\beta$. Comme $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ sont aussi des vecteurs dans $L(x^\alpha)$, (définis aux points de la géodésique donnée), ils subissent la même loi de transformation:

$$\underset{s}{{}^*i^\alpha} = A^{*\alpha}_\beta \underset{s}{i^\beta} \quad (s = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Vu que τ est un paramètre invariant, c'est-à-dire un scalaire indépendant des transformations de Lorentz, nous avons aussi

$${}^*\!\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{s}{i^\alpha}\right) = A^{*\alpha}_\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{s}{i^\beta} \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

c'est-à-dire que les grandeurs $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,\underset{s}{i^\alpha}$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ sont des vecteurs dans $L(x^\alpha)$ définies aux points de la géodésique donnée. Les produits scalaires

$$g_{\alpha\beta}\underset{2}{i^\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{1}{i^\alpha}\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{3}{i^\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i^\alpha}\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{4}{i^\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{3}{i^\alpha}\,,$$

sont donc — d'après le théorème 5, alinéa 3 — invariants par rapport aux transformations de Lorentz. Or, les formules (4,28) et les conditions $(4,6)_{a,b}$, (4,12), (4,8), $(4,22)_a$ entraînent

$$P = \mu g_{\alpha\beta} \underset{2}{i}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{1}{i}^{\alpha}, \quad Q = \mu c g_{\alpha\beta} \underset{3}{i}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i}^{\alpha}, \quad R = \mu c g_{\alpha\beta} \underset{4}{i}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{3}{i}^{\alpha}.$$

A partir de ceci et de ce qui précède, il est très facile à voir que P, Q, R sont trois scalaires définis le long de la géodésique donnée, et qui sont invariants par rapport aux transformations de Lorentz.

b) Les transformations orthogonales $\bar{x}^k = a^k_l x^k$ $(k = 1, 2, 3)$ dans $E(x^i)$ représentent (avec l'identité $\bar{t} = t$) un certaine sous-groupe de transformations de Lorentz générales.[12] L'énoncé b) est maintenant évident.

c) Le fait que tous les trois scalaires P, Q, R ont la dimension de force découle facilement des équations de définition (3,4), (4,9), $(4,22)_b$.

Remarque 6. Le système d'équations de Frenet (4,28) est un système de seize équations différentielles du premier ordre pour les fonctions inconnues $\underset{1}{i}^{\alpha}(\tau)$, $\underset{2}{i}^{\alpha}(\tau)$, $\underset{3}{i}^{\alpha}(\tau)$, $\underset{4}{i}^{\alpha}(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, les fonctions $P(\tau)$, $Q(\tau)$, $R(\tau)$ étant données.[13] Si P, Q, R sont des fonctions continues dans un certain intervalle du paramètre τ, alors l'existence (dans l'intervalle en question) des solutions

$$\underset{1}{i}^{\alpha}(\tau), \quad \underset{2}{i}^{\alpha}(\tau), \quad \underset{3}{i}^{\alpha}(\tau), \quad \underset{4}{i}^{\alpha}(\tau)$$

du système (4,28) est garantie, en dépendance des conditions initiales. Comme pour le moment temporel initial nous avons $\tau = 0$, les conditions à l'origine sont représentées par le système de nombres

$$(\underset{1}{i}^{\alpha})_0 = (\underset{1}{i}^{\alpha})_{\tau=0}, \quad (\underset{2}{i}^{\alpha})_0 = (\underset{2}{i}^{\alpha})_{\tau=0}, \quad (\underset{3}{i}^{\alpha})_0 = (\underset{3}{i}^{\alpha})_{\tau=0}, \quad (\underset{4}{i}^{\alpha})_0 = (\underset{4}{i}^{\alpha})_{\tau=0}.$$

Or, les nombres $(\underset{s}{i}^{\alpha})$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ sont liés par dix conditions $(4,6)_{a,b}$, (4,8), (4,12), $(4,22)_a$ de sorte que le nombre de conditions à choisir se réduit à six conditions indépendantes. Sous ces conditions, la solution $\underset{s}{i}^{\alpha}(\tau)$ $(\alpha, s = 1, 2, 3, 4)$ est univoquement déterminé, les fonctions $P(\tau)$, $Q(\tau)$, $R(\tau)$ étant données. En connaissant les fonctions $\underset{1}{i}^{\alpha}(\tau) \equiv \mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau$, nous obtenons par intégration les fonctions $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau)$, dépendant de nouvelles conditions initiales $x^{\alpha} = (x^{\alpha})_{\tau=0}$.

Nous pouvons donc dire que le système d'invariants P, Q, R détermine, pour des conditions initiales convenables, la géodésique correspondante. Les grandeurs P, Q, R représentent donc en ce sens le système complet d'invariants locaux de la géodésique.

---

[12]) Voir $(1,1)_{c,d}$.

[13]) La masse de repos de la particule matérielle donnée étant fixée.

5. CLASSIFICATION FONDAMENTALE DE GÉODÉSIQUES DANS LA MÉCANIQUE DE MINKOWSKI

A l'aide des formules de Frenet (4,28), il est possible de procéder à une classification très simple de géodésiques qui sont réparties en quatre catégories que voici:

I$^{\text{ère}}$ catégorie: géodésiques pour lesquelles $P = 0$ en chacun de leurs points;

II$^{\text{e}}$ catégorie: géodésiques pour lesquelles $Q = 0$ en chacun de leurs points, mais qui ne sont pas de la I$^{\text{ère}}$ catégorie;

III$^{\text{e}}$ catégorie: géodésiques pour lesquelles $R = 0$ en chacun de leurs points, mais qui ne sont ni de la I$^{\text{ère}}$ ni de la II$^{\text{e}}$ catégorie;

IV$^{\text{e}}$ catégorie: toutes les autres géodésiques.

De l'énoncé a) du théorème 11, paragraphe 4, il résulte immédiatement que la propriété d'appartenir à une des quatre catégories citées est invariante par rapport aux transformations de Lorentz.

Dans ce qui suit, il s'agit surtout de donner des caractéristiques plus précises des quatre catégories en question.

Théorème 12. *La condition nécessaire et suffisante pour que la géodésique d'une particule matérielle soit de la* I$^{\text{ère}}$ *catégorie est qu'il existe un système inertial tel que, en ce système, la particule matérielle se trouve en repos.*

D é m o n s t r a t i o n. Si la géodésique considérée est une géodésique de la I$^{\text{ère}}$ catégorie dans le système de Lorentz $\{x^\alpha\} \equiv \{x, y, z, t\}$ donné, alors $P = 0$ aux points de cette géodésique, donc aussi $Q = R = 0$ en tous ces points; cela découle de la remarque 5 du paragraphe 4. Les formules de Frenet se réduisent, dans ce cas-là, aux équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{1}{i}^\alpha = 0\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,.$$

Il en résulte

$$x^i = a^i\tau + b^i \quad (i = 1, 2, 3)\,, \quad t = a\tau + b\,.$$

Supposons qu'au moment initial $\underset{0}{t}$ nous ayons $(x^i)_{t=t_0} = \underset{0}{x}^i$. Comme pour $t = \underset{0}{t}$ nous avons $\tau = 0$, nous pouvons écrire les équations précédentes (en respectant les conditions initiales préscrites) sous la forme suivante

$$x^i = a^i\tau + \underset{0}{x}^i \quad (i = 1, 2, 3)\,, \quad t = a\tau + \underset{0}{t}\,,$$

donc

$$x^i = \underset{0}{x}^i + (t - \underset{0}{t})\, a^i/a \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

car $a = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \neq 0$. Les constantes a^i, a sont liées par la condition (4,12), c'est-à-dire par

$$\delta_{ik} a^i a^k - c^2 a^2 = - c^2 .$$

Nous allons distinguer deux cas:

1) Si $a^1 = a^2 = a^3 = 0$, alors la particule matérielle est en repos par rapport au système $\{x^i\}$ qui correspond d'une façon univoque, au système original de Lorentz $\{x^\alpha\}$.

2) Si $|a^1| + |a^2| + |a^3| > 0$, alors il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme dans $E(x^i)$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité de nos raisonnements que la droite correspondante ait la direction de l'axe des x (on peut toujours l'obtenir moyennant une transformation orthogonale des coordonnées x^i). La géodésique correspondante sera alors décrite (dans $E(x^i)$) par

$$x = \underset{0}{x} + (t - \underset{0}{t})\, a^1/a\,, \quad y = y_0\,, \quad z = z_0\,,$$

c'est-à-dire

(5,1) $$x = \underset{0}{x} + \underset{0}{v}(t - t_0)\,, \quad y = y_0\,, \quad z = z_0 \text{ }^{14)}$$

$\underset{0}{v}$ étant la vitesse constante de la particule. Dans le nouveau système de Lorentz $L(x^\alpha)$

$$'x = 1/\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)}\,[(x - \underset{0}{x}) - \underset{0}{v}(t - \underset{0}{t})]\,,$$

$$'y = y\,, \qquad 'z = z\,,$$

$$'t = 1/\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)}\,\left[(t - t_0) - \frac{v_0}{c^2}(x - \underset{0}{x})\right]$$

la géodésique (5,1) sera décrite par

$$'x = 0\,, \quad 'y = \underset{0}{y}\,, \quad 'z = \underset{0}{z}$$

c'est-à-dire que la particule matérielle se trouve en repos par rapport au système $E('x^i)$ qui correspond d'une façon biunivoque au système de Lorentz $\{'x^\alpha\}$.

Il est évident que la condition du théorème 12 est suffisante.

Théorème 13. *La condition nécessaire et suffisante pour que la géodésique d'une particule matérielle soit de la* II^e *catégorie est qu'il existe un système inertial par rapport auquel la particule matérielle suit un mouvement rectiligne non-uniforme.*

Démonstration. Si la géodésique est une géodésique de la II^e catégorie dans le système spatio-temporel donné $\{x^\alpha\}$, alors $Q = 0$ et donc aussi $R = 0$ aux points de cette géodésique, mais P ne s'annule pas identiquement le long de la géodésique.

14) Comme il s'agit du mouvement d'une particule matérielle, nous avons forcément $|\underset{0}{v}| < c$.

Les formules de Frenet (4,28) se réduisent donc à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{1}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu}\underset{2}{i^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i^\alpha},$$

d'où il résulte, après quelques modifications,

$$\frac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^3} = \frac{\dot{P}}{P}\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{P^2}{\mu^2c^2}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{5,2}$$

ceci pour les points où $P \neq 0$. Or, (5,2) implique

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui entraîne, à son tour, que la seconde courbure métrique de la géodésique $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(t)$ est nulle dans le système $\{x, y, z\}$ donné. Donc, la géodésique est une courbe plane dans $E(x^i)$. Par un choix convenable du système de coordonnées nous pouvons obtenir que le plan de cette courbe soit parallèle au plan $z = 0$. Alors, les équations (5,2) se réduisent à trois relations

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} &= \frac{P^2}{\mu^2c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\dot{P}}{P}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}, \\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}\tau^3} &= \frac{P^2}{\mu^2c^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\dot{P}}{P}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}, \\ \frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}\tau^3} &= \frac{P^2}{\mu^2c^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\dot{P}}{P}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}, \end{aligned} \tag{5,3}$$

(où $\dot{P} \equiv \mathrm{d}P/\mathrm{d}\tau$); il s'en ensuit p. ex.

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix} = \frac{\dot{P}}{P}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix}$$

d'où, par intégration,

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} = \alpha_0 P \quad (\alpha_0 = \mathrm{const}). \tag{5,4$_\mathrm{a}$}$$

D'une façon analogue, nous obtenons

$$(5,4)_{\mathrm{b}} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} = \alpha_1 P\,, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} = \alpha_2 P\,,$$

où α_1, α_2 sont deux constantes. Or, les relations $(5,4)_{\mathrm{a,b}}$ subsistent même pour les points de la géodésique considérée, pour lesquels $P = 0$; cela découle immédiatement de $(5,4)_{\mathrm{a,b}}$ et de (4,5). Ensuite, il résulte de $(5,4)_{\mathrm{a,b}}$:

$$\alpha_1 P \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_2 P \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_0 P \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = P\left(\alpha_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_0 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} - \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(5,5)_{\mathrm{a}} \qquad P\left(\alpha_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - \alpha_0 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0\,.$$

Un calcul direct fait voir que l'on a

$$P^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - c^{-2}\alpha_0^2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} - c^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 - c^2\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right],$$

donc

$$P^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - c^{-2}\alpha_0^2) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\left(g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 - \left(g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)\right].$$

En vertu des équations (4,2), (4,5), nous en tirons

$$P^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - c^{-2}\alpha_0^2) = (P^2/\mu^2 c^2)\left[(\underset{1\,2}{g_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta})^2 - (\underset{2\,2}{g_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta})(\underset{1\,1}{g_{\mu\nu} i^\alpha i^\beta})\right],$$

ce qui donne, compte tenu de $(4,6)_a$, $(4,6)_b$, (4,12), la relation

$$P^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - c^{-2}\alpha_0^2) = P^2/\mu^2 .$$

En introduisant la notation

$$\beta_1 = \mu\alpha_1 , \quad \beta_2 = \mu\alpha_2 , \quad \beta_0 = \mu\alpha_0 ,$$

nous pouvons écrire la relation précédente sous forme de

$(5,5)_b$ $$P^2(\beta_1^2 + \beta_2^2 - c^{-2}\beta_0^2 - 1) = 0 ,$$

et la relation $(5,5)_a$ sous la forme suivante

$(5,5)_c$ $$P\left(\beta_1 \frac{dy}{d\tau} - \beta_2 \frac{dx}{d\tau} - \beta_0 \frac{dt}{d\tau}\right) = 0 .$$

La géodésique considérée étant une géodésique de la deuxième catégorie, P ne s'y annule pas identiquement. Cela donne avec $(5,5)_{b,c}$

$$\beta_1 \frac{dy}{d\tau} - \beta_2 \frac{dx}{d\tau} - \beta_0 \frac{dt}{d\tau} = 0$$

où

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 + c^{-2}\beta_0^2 \neq 0 .$$

Par intégration, nous en obtenons la relation

(5,6) $$\beta_1 y - \beta_2 x = \beta_0 t + k , \quad (k = \text{const}) ,$$

vérifié pour tous les points de la géodésique censidérée. Choisissons dans le plan (x, y) un nouveau système orthogonal (ξ, η), déterminé par les relations de transformation

$$\xi = (\beta_1 y - \beta_2 x)/\sqrt{(1 + \beta_0^2/c^2)} , \quad \eta = (\beta_2 y + \beta_1 x)/\sqrt{(1 + \beta_0^2/c^2)} .$$

Dans les nouvelles coordonnées ξ, η, la „restreinte“ (5,6) est décrite par

$$\xi = \frac{\beta_0}{\sqrt{(1 + \beta_0^2/c^2)}}\, t + \frac{k}{\sqrt{(1 + \beta_0^2/c^2)}} = \bar{v}t + \bar{k} ,$$

la signification des nombres $\bar{v}, \bar{k}$ étant manifeste. Dans le système $(\xi, \eta, \zeta = z, t)$, la géodésique sera décrite par

$$\xi = \underset{0}{\bar{v}}t + \bar{k} , \quad \eta = \eta(\tau) , \quad \zeta = z_0 , \quad t = t(\tau) .$$

Si nous passons maintenant à un autre système de Lorentz $\{'\xi, '\eta, '\zeta, 't\}$ où

$$\begin{aligned} '\xi &= (\xi - \bar{v}t)/\sqrt{(1 - \underset{0}{\bar{v}}^2/c^2)} , \\ '\eta &= \eta , \\ '\zeta &= \zeta , \\ 't &= (t - \xi\underset{0}{\bar{v}}/c^2)/\sqrt{(1 - \underset{0}{\bar{v}}^2/c^2)} , \end{aligned}$$

alors il sera évident que notre géodésique sera décrite par les équations

$$'\xi = \bar{k}/\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)}\,, \quad '\eta = \eta(\tau)\,, \quad '\zeta = z_0\,, \quad 't = 't(\tau)\,.$$

Il en résulte que, dans le système $('\xi, '\eta, '\zeta, 't)$, le mouvement correspondant est un mouvement rectiligne, mais non-uniforme, car P ne s'annule pas le long de la géodésique tout entière.

Pour démontrer que la condition est aussi suffisante, supposons le mouvement de la particule tel, qu'il existe un système spatio-temporel dans lequel ce mouvement soit un mouvement rectiligne non-uniforme. Nous prenons un tel système $\{x^\alpha\}$, en supposant de plus — ce qui ne restreint pas la généralité — que la particule se déplace dans la direction de l'axe des x de ce système. Dans ce système, la géodésique correspondante sera décrite par

$$x = x(\tau)\,, \quad y = z = 0\,, \quad t = t(\tau)\,, \tag{5,7}$$

où le vecteur $\mathrm{d}^2x^\alpha/\mathrm{d}\tau^2$ n'est pas nul en tous les points de la géodésique. En tout point où ce vecteur est non-nul, on a $P \neq 0$; cela découle de la première des équations (4,28). La géodésique n'est donc pas de la I$^{\text{ère}}$ catégorie. Or, pour la géodésique considérée, décrite par (5,7), tous les déterminants figurant au second membre de (4,9) sont égaux à zéro, donc $Q = 0$, comme on peut le voir de la relation de définition (4,9).

Théorème 14. *La condition nécessaire et suffisante pour que la géodésique d'une particule matérielle soit de la* III$^{\text{e}}$ *catégorie est celle-ci: il existe un système inertial dans lequel le mouvement de la particule matérielle est plan, mais il n'existe pas de système inertial, dans lequel elle soit en repos ou dans lequel le mouvement soit rectiligne non-uniforme.*

Démonstration. Si la géodésique considérée est de la III$^{\text{e}}$ catégorie, on a $R = 0$ identiquement le long de la géodésique, mais Q ne s'y annule pas identiquement. Il découle des formules de Frenet qui, dans ce cas-ci, se réduisent à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{1}{i}^\alpha = \frac{P}{\mu}\underset{2}{i}^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{2}{i}^\alpha = \frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i}^\alpha + \frac{Q}{\mu c}\underset{3}{i}^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{3}{i}^\alpha = -\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i}^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underset{4}{i}^\alpha = 0\,,$$

que le vecteur $\underset{4}{i}^\alpha$ est constant le long de la géodésique. Les conditions d'orthogonalité

$$g_{\alpha\beta}\underset{4}{i}^\alpha\underset{1}{i}^\beta = g_{\alpha\beta}\underset{4}{i}^\alpha\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

entraînent alors

$$g_{\alpha\beta}\underset{4}{i}^\alpha x^\beta = \gamma\,, \quad (\gamma = \text{const})\,,$$

donc, en notation „classique"

$$\underset{4}{i}^1 x + \underset{4}{i}^2 y + \underset{4}{i}^3 z - c^2\underset{4}{i}^4 t = \gamma\,, \tag{5,7}$$

le vecteur constant $\underset{4}{i}^\alpha$ remplissant la condition de normalisation

$$g_{\alpha\beta}\underset{4}{i}^\alpha \underset{4}{i}^\beta = (\underset{4}{i}^1)^2 + (\underset{4}{i}^2)^2 + (\underset{4}{i}^3)^2 - c^2(\underset{4}{i}^4)^2 = 1\,.$$

Le vecteur a^k $(k = 1, 2, 3)$ dans $E(x^i)$ de composantes

$$a^k = \sqrt{[1 + c^2(\underset{4}{i}^4)^2]}\,.\,\underset{4}{i}^k$$

est évidement un vecteur unitaire dans $E(x^i)$.

Si nous introduisons dans $E(x^i)$ les nouvelles coordonnées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ par les transformations orthogonales

$$\bar{x} = a^1x + a^2y + a^3z\,, \quad \bar{y} = b^1x + b^2y + b^3z\,, \quad \bar{z} = c^1x + c^2y + c^3z\,,$$

où b^k, c^k $(k = 1, 2, 3)$ sont des vecteurs unitaires dans $E(x^i)$, orthogonaux l'un à l'autre et orthogonaux à a^k, alors dans le système spatio-temporel $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}\}$ la „restreinte" (5,7) sera décrite par la relation

$$\bar{x} = \frac{c^2\underset{4}{i}^4}{\sqrt{[1 + c^2(\underset{4}{i}^4)^2]}}\,t + \frac{\gamma}{\sqrt{[1 + c^2(\underset{4}{i}^4)^2]}}\,,$$

ou encore, plus court,

(5,8) $$\bar{x} = \underset{0}{v}t + \alpha\,,$$

la signification des constantes $\underset{0}{v}, \alpha$ étant évidente. Dans le nouveau système de Lorentz

$$^*x = \frac{1}{\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)}}(\bar{x} - \underset{0}{v}t)\,,$$

$$^*y = \bar{y}\,, \qquad ^*z = \bar{z}\,,$$

$$^*t = \frac{1}{\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)}}(t - \bar{x}\underset{0}{v}/c^2)$$

la „restreinte" (5,8) aura la description

(5,9) $$^*x = \alpha/\sqrt{(1 - \underset{0}{v}^2/c^2)} = \text{const}\,.$$

Dans ce nouveau système, la géodésique apparaît comme une courbe plane (dans le plan fixe (5,9)). Etant donné que Q – et donc P non plus – ne s'annule pas identiquement le long de la géodésique, le résultat précité entraîne – compte tenu des théorèmes 12 et 13 – que la condition du théorème 14 est bien nécessaire.

Pour démontrer qu'elle est aussi suffisante, supposons qu'il existe un système inertial dans lequel le mouvement de la particule matérielle en question se fait dans un plan fixe, mais qu'il n'existe pas de système inertial dans lequel la particule soit en repos ou dans lequel le mouvement soit rectiligne et non-uniforme. D'après les théorèmes 12 et 13, la géodésique n'est ni de la I$^{\text{ère}}$ ni de la II$^{\text{e}}$ catégorie. Faisons subir le système où le mouvement apparaît plan, à une transformation orthogonale de coordonnées de l'espace E_3 correspondant de façon à obtenir que la géodésique soit décrite par $x = \underset{0}{x} = \text{const}$. Alors, dans le système $\{x^\alpha\}$ correspondant, la géodésique sera décrite par les équations

$$x = \underset{0}{x}\,, \quad y = y(\tau)\,, \quad z = z(\tau)\,, \quad t = t(\tau)\,.$$

Cela entraîne avec $(4{,}22)_b$ que $R = 0$ en tous les points de la géodésique. C'est donc bien une géodésique de la III$^{\text{e}}$ catégorie au sens de notre définition.

Резюме

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ ДЛЯ МИРОВОЙ ЛИНИИ В МЕХАНИКЕ МИНКОВСКОГО

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага

Главным результатом работы является вывод некоторых уравнений для мировой линии в четырехмерном пространстве Минковского, которые, в некоторой степени, аналогичны известным формулам Френе для кривой в четырехмерном пространстве Римана.

Пусть

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle$$

— уравнения движения материальной частицы с массой покоя μ в данной системе Лоренца $\{x, y, z, t\}$, и пусть

$$x = x(\tau)\,, \quad y = y(\tau)\,, \quad z = z(\tau)\,, \quad t = t(\tau)\,,$$

или короче

(1) $$x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

— описание соответственной мировой линии в четырехмерном пространстве Минковского с неопределенным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, где

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,, \quad g_{44} = -c^2\,, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta\,.$$

Параметр τ является так называемым „собственным временем“ материальной частицы

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \mathrm{d}t \qquad \left(v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right).$$

Тогда, в предположении достаточной гладкости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в рассматриваемом интервале, в точках мировой линии (1) справедливы соотношения

$$\text{(2)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{i}^{\alpha} = \frac{P}{\mu} \underset{2}{i}^{\alpha}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{2}{i}^{\alpha} = \frac{P}{\mu c^2} \underset{1}{i}^{\alpha} + \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}^{\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{3}{i}^{\alpha} = -\frac{Q}{\mu c} \underset{2}{i}^{\alpha} + \frac{R}{\mu c} \underset{4}{i}^{\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{4}{i}^{\alpha} = -\frac{R}{\mu c} \underset{3}{i}^{\alpha},$$

где $\underset{1}{i}^{\alpha}, \underset{2}{i}^{\alpha}, \underset{3}{i}^{\alpha}, \underset{4}{i}^{\alpha}$ — векторы в точках мировой линии (1), удовлетворяющие условиям

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{1}{i}^{\beta} = -c^2, \quad g_{\alpha\beta} \underset{2}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} = g_{\alpha\beta} \underset{3}{i}^{\alpha} \underset{3}{i}^{\beta} = g_{\alpha\beta} \underset{4}{i}^{\alpha} \underset{4}{i}^{\beta} = 1,$$

$$g_{\alpha\beta} \underset{s}{i}^{\alpha} \underset{k}{i}^{\beta} = 0 \quad \text{для} \quad s \neq k \quad (s, k = 1, 2, 3, 4).$$

Притом $\underset{1}{i}^{\alpha} \equiv \mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau$, и вектор $\underset{2}{i}^{\alpha}$ имеет направление и ориентацию вектора $X^{\alpha} = \mu(\mathrm{d}^2 x^{\alpha}/\mathrm{d}\tau^2)$, т. е. вектора силы Минковского. Величины P, Q, R в уравнениях (2) суть скаляры, определенные в точках мировой линии, для которых

$$P = \mu \left(g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^2} \frac{\mathrm{d}^2 x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^{1/2};$$

$$Q = \frac{\mu^3 c}{P^2} \left[\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2} & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3} & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 \right]^{1/2} \quad \text{для } P \neq 0 \text{ и } Q = 0 \text{ для } P = 0;$$

$$R = \frac{\mu^6 c^2 \vartheta}{Q^2 P^3} \begin{vmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} & \frac{dx^2}{d\tau} & \frac{dx^3}{d\tau} & \frac{dx^4}{d\tau} \\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2} & \frac{d^2x^2}{d\tau^2} & \frac{d^2x^3}{d\tau^2} & \frac{d^2x^4}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x^1}{d\tau^3} & \frac{d^3x^2}{d\tau^3} & \frac{d^3x^3}{d\tau^3} & \frac{d^3x^4}{d\tau^3} \\ \frac{d^4x^1}{d\tau^4} & \frac{d^4x^2}{d\tau^4} & \frac{d^4x^3}{d\tau^4} & \frac{d^4x^4}{d\tau^4} \end{vmatrix} \quad \text{для} \quad Q > 0\,,$$

где ϑ — сигнум определителя в правой части, а $R = 0$ для $Q = 0$.

Скаляры P, Q, R инвариантны относительно преобразований Лоренца общего вида и имеют физическую размерность силы.

На основании „формул Френе“ (2) нетрудно прийти к следующим результатам:

а) *Если* $P \equiv 0$ *вдоль данной мировой линии, то существует такая инерциальная система координат, в которой материаьлная частица находится в состоянии покоя;*

в) *Если* $Q \equiv 0$ *вдоль данной мировой линии, но* P *не равняется тождественно нулю, то существует такая инерциальная система, в которой материальная частица движется равномерно и прямолинейно;*

с) *Если* $R \equiv 0$ *вдоль данной мировой линии, но* Q *не равняется тождественно нулю, то существует такая инерциальная система, в которой материальная частица движется по плоской кривой* (*но не по прямой*).

Таким образом эти результаты, сформулированные в работе более остро как необходимые и достаточные условия для соответственного типа движения, дают некоторую основу для классификации мировых линий в механике Минковского.