Czechoslovak Mathematical Journal

Jan Mařík; Miloš Ráb

Nichtoszillatorische lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 209–225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100563

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

NICHTOSZILLATORISCHE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

JAN MAŘÍK, Praha und MILOŠ RÁB, Brno

(Eingelangt am 2. März 1961)

Es werden asymptotische Eigenschaften von Lösungen einer nichtoszillatorischen Gleichung $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ im Zusammenhang mit Lösungen einer Riccatischen Gleichung $\delta(x)\,z' + z^2 + P(x)\,z + Q(x) = 0$ studiert. Dieser Zusammenhang ermöglicht die logarithmische Ableitung von Lösungen der ersten Gleichung eingehend zu untersuchen und eine Reihe von asymptotischen Formeln insbesondere für Lösungen der Gleichung $y'' = A(x)\,y$ abzuleiten.

1. Bezeichnungen und Verabredungen. Es sei E_1 die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen. In der ganzen Arbeit ist $a \in E_1$ und $J = \langle a, \infty)$. Es sei ferner C_k das System aller (endlichen) reellen in J k-mal stetig differenzierbaren Funktionen ($k = 0, 1, \ldots$). Die Zeichen $\to$, lim, lim sup usw. beziehen sich immer auf den Fall, dass die unabhängige Veränderliche gegen ∞ strebt. Anstatt $\int_b^c f(x)\,dx$ werden wir oft $\int_b^c f$ schreiben. Wenn kein Missverständnis zu befürchten ist, werden wir in Beziehungen wie z.B. „$f'(x) = g(x)$, $f(x) > h(x)$ $(b_1 \leqq x \leqq b_2)$“ das x auslassen und einfach „$f' = g$, $f > h$ in $\langle b_1, b_2\rangle$“ oder nur „$f' = g$, $f > h$“ schreiben. Das Symbol $f \sim g$ wird bedeuten, dass die Funktionen f, g in einem Intervall $\langle b, \infty)$ definiert sind und dass es eine Funktion φ mit den Eigenschaften $f = \varphi g$, $\varphi \to 1$ gibt.

Wenn jede nichttriviale Lösung der Gleichung

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q \in C_0) \tag{1}$$

nur endlichviele Nullstellen in J hat, so heisst die Gleichung (1) nichtoszillatorisch.

2. Definitionen. Wir sagen, dass die Gleichung

$$\delta z' + z^2 + Pz + Q = 0 \quad (\delta, P, Q \in C_0,\ \delta > 0) \tag{2}$$

regulär ist, wenn sie eine Lösung in einem Intervall $\langle b, \infty)$ hat.

Wenn f in einem Intervall $\langle b, c)$ $(a \leqq b < c \leqq \infty)$ stetig ist, so setzen wir

$$I(f, b, x) = \int_b^x \delta^{-1}(t) \exp\left\{-\int_b^t \delta^{-1} \cdot (2f + P)\right\} \mathrm{d}t \quad (b \leqq x \leqq c).$$

Es sei ferner z eine Lösung von (2) im Intervall $\langle b, \infty)$ und es gelte $I(z, b, \infty) = \infty$. Dann sagen wir, dass z eine Hauptlösung ist.[1])

3. Lemma. *Es sei z_1 eine Lösung von (2) im Intervall $J_0 = \langle b, c) \subset J$; es sei $\beta \in E_1$ und $I(z_1, b, x) \neq \beta$ für $x \in J_0$. Dann ist die Funktion*

$$z_2(x) = z_1(x) + \frac{\exp\{-\int_b^x \delta^{-1} \cdot (2z_1 + P)\}}{I(z_1, b, x) - \beta} \tag{3}$$

auch eine Lösung von (2) in J_0 und es gibt Zahlen κ_1, κ_2 $(\kappa_1 > 0)$ mit

$$I(z_2, b, x) = \frac{\kappa_1}{\beta - I(z_1, b, x)} + \kappa_2 \quad (x \in J_0). \tag{4}$$

Ist $c = \infty$, so ist die Bedingung $I(z_1, b, \infty) = \beta$ notwendig und hinreichend, dass z_2 eine Hauptlösung ist; in diesem Fall ist $z_2 < z_1$.

Beweis. Wir setzen $g_j(x) = \exp\{-\int_b^x \delta^{-1} \cdot (2z_j + P)\}$ $(j = 1, 2)$, $f_1(x) = I(z_1, b, x) - \beta$, $f_2(x) = I(z_2, b, x)$ $(x \in J_0)$. Es gilt offenbar $\delta f_j' = g_j$, $\delta g_j' + g_j \cdot (2z_j + P) = 0$; daraus folgt nach kurzer Rechnung, dass $z_2 = z_1 + g_1 f_1^{-1}$ eine Lösung von (2) ist. Aus der Gleichheit $2z_2 + P = 2z_1 + P + 2g_1 f_1^{-1}$ folgen die Beziehungen $(\log g_2)' = -(2z_2 + P)\,\delta^{-1} = -(2z_1 + P)\,\delta^{-1} - 2g_1\delta^{-1}f_1^{-1} = (\log g_1)' - 2f_1' f_1^{-1} = (\log g_1 f_1^{-2})'$, $g_2 = \kappa_1 g_1 f_1^{-2}$, $f_2' = g_2\delta^{-1} = \kappa_1 g_1 \delta^{-1} f_1^{-2} = \kappa_1 f_1' f_1^{-2} = (-\kappa_1 f_1^{-1})'$, $f_2 = -\kappa_1 f_1^{-1} + \kappa_2$, womit (4) bewiesen ist; der Rest ist jetzt klar.

4. Satz. *Es seien z_1, z_2 zwei verschiedene Lösungen von (2) im Intervall $J_0 = \langle b, c) \subset J$; wir setzen $\beta = (z_1(b) - z_2(b))^{-1}$, $f(x) = I(z_1, b, x)$ $(x \in J_0)$. Dann ist*

$$z_2 = z_1 + \frac{\delta f'}{f - \beta}. \tag{5}$$

Beweis. Wegen $\delta(x) f'(x) = \exp\{-\int_b^x \delta^{-1} \cdot (2z_1 + P)\}$ ist (5) mit (3) identisch. Wenn wir also $z^* = z_1 + \delta f' \cdot (f - \beta)^{-1}$ setzen, so ist nach Lemma 3 die Funktion z^* in ihrem Definitionsbereich eine Lösung von (2). Es gilt aber $z^*(b) = z_1(b) - \beta^{-1} = z_2(b)$; daraus folgt leicht, dass $f \neq \beta$ und $z^* = z_2$ in J_0 ist.

5. Satz. *Wenn die Gleichung (2) eine Lösung in $\langle b, \infty)$ hat, so hat sie in diesem Intervall genau eine Hauptlösung z_0. Ist z_1 eine Lösung in $J_1 = \langle c, \infty)$ $(c \geqq b)$, so ist $z_1 \geqq z_0$ in J_1.*

(Folgt unmittelbar aus Satz 4 und Lemma 3.)

---

[1]) Den Begriff einer Hauptlösung der Gleichung $u' = A(x) - u^2$ hat И. М. Соболь in [3] eingeführt.

6. Satz. *Es seien* z_0, z_1, z_2 *Lösungen von* (2) *im Intervall* $\langle b, \infty)$; *wir nehmen an, dass* z_0 *eine Hauptlösung und* $z_1 \neq z_0 \neq z_2$ *ist. Dann gilt* $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_0) \to 0$. *Ist* $\int_a^\infty \delta^{-1} = \infty$, *so haben wir* $\liminf |z_2 - z_1| = 0$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $z_1 \neq z_2$ und schreiben $\gamma = (z_1(b) - z_0(b))^{-1}$. Wenn wir die Bezeichnungen aus Satz 4 behalten, so haben wir $z_2 = z_1 + \delta f' . (f - \beta)^{-1}$, $z_0 = z_1 + \delta f' . (f - \gamma)^{-1}$; nach Lemma 3 ist $f \to \gamma \neq \beta$ und somit

$$\frac{z_2 - z_1}{z_0 - z_1} = \frac{f - \gamma}{f - \beta} \to 0 .$$

Aus $(z_2 - z_1) . \delta^{-1} = f' . (f - \beta)^{-1}$ folgt leicht die Beziehung $\int_b^\infty |z_2 - z_1| . \delta^{-1} < \infty$; wenn also das Integral $\int_a^\infty \delta^{-1}$ divergiert, muss die Gleichheit $\liminf |z_2 - z_1| = 0$ bestehen.

7. Lemma. *Es gelte* $\beta \in E_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in C_0$, $\alpha_1 \geqq \alpha_2$, $\delta > 0$, $J_0 = \langle b, c) \subset J$; z *sei eine Lösung der Gleichung*

$$\delta z' + (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) = 0 \tag{6}$$

in J_0, ψ_1 *sei eine nichtfallende und* ψ *eine nichtwachsende Funktion in* J_0. *Dann gelten (für das Intervall* J_0*) die folgenden Implikationen:*

I. $$z(b) \leqq \psi_1(b)\,, \quad \alpha_1 \leqq \psi_1 \Rightarrow z \leqq \psi_1 ;$$

II. $$z(b) > \psi(b)\,, \quad \alpha_2 \leqq \psi < \alpha_1 \Rightarrow z > \psi ;$$

III. $$z(b) < \beta \leqq \alpha_2 \Rightarrow z < \beta .$$

Beweis. Es sei z. B. $z(b) > \psi(b)$, $\alpha_2 \leqq \psi < \alpha_1$ in J_0. Gesetzt, es gäbe ein $x \in J_0$ mit $z(x) \leqq \psi(x)$; es sei x_0 das Infimum der Menge aller x mit dieser Eigenschaft. Man sieht leicht, dass $z(x_0) = \psi(x_0)$ ist. Wegen $z(x_0) < \alpha_1(x_0)$ gibt es ein solches $x_1 \in (b, x_0)$, dass im Intervall $L = (x_1, x_0)$ die Ungleichung $z < \alpha_1$ besteht; in L gilt aber auch $z > \psi \geqq \alpha_2$. Daraus folgt nach (6) $z' > 0$ in L, was der Beziehung $z(x_1) > \psi(x_1) \geqq \psi(x_0) = z(x_0)$ widerspricht. Dadurch ist II. bewiesen. Ähnlich kann man I. und III. beweisen.

8. Satz. *Es sei* $b \geqq a$, $\beta \in E_1$. *Wenn in* $\langle b, \infty)$ *keine Lösung* z *von* (2) *mit* $z(b) = \beta$ *existiert, so gibt es ein* $c > b$ *und eine Lösung* z^* *von* (2) *in* $\langle b, c)$ *mit den Eigenschaften* $z^*(b) = \beta$ *und* $\lim_{x \to c-} z^*(x) = -\infty$.

(Der Beweis kann dem Leser überlassen werden.)

9. Satz. *Es gelte* $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in C_0$, $\delta > 0$, $b \geqq a$. *Es sei* ψ *eine solche nichtwachsende Funktion, dass* $\alpha_2 \leqq \psi < \alpha_1$ *in* $\langle b, \infty)$ *ist. Dann hat* (6) *eine Lösung in* $\langle b, \infty)$ *und für die Hauptlösung* z_0 *von* (6) *gilt* $z_0 \leqq \psi$.

Beweis. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ und ein $x_0 \geqq b$. Aus Satz 8 und Lemma 7 (Implikation II.) folgt leicht, dass es eine Lösung z von (6) in $\langle x_0, \infty)$ mit $z(x_0) = \psi(x_0) + \varepsilon$ gibt. Da nach Satz 5 $z_0(x_0) \leqq z(x_0)$ ist, haben wir $z_0(x_0) \leqq \psi(x_0)$ und somit $z_0 \leqq \psi$.

10. Satz. *Es gelte* $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in C_0$, $\alpha_1 \geqq \alpha_2$, $\delta > 0$, $\int_a^\infty \delta^{-1} = \infty$; *wir setzen* $\sigma_i = \limsup \alpha_i$, $\iota_i = \liminf \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ *und nehmen an, dass die Relation* $\sigma_2 < \iota_1$ *besteht. Dann ist die Gleichung* (6) *regulär; ihre Hauptlösung* z_0 *erfüllt die Bedingungen*

$$\iota_2 \leqq \liminf z_0\,, \quad \limsup z_0 \leqq \sigma_2 \tag{7}$$

und für jede Funktion z, *welche in einem Intervall* $\langle b, \infty)$ *eine Lösung von* (6), *jedoch keine Hauptlösung ist, hat man*

$$\iota_1 \leqq \liminf z\,, \quad \limsup z \leqq \sigma_1\,. \tag{8}$$

Wenn ψ *eine nichtfallende Funktion mit* $\psi \leqq \alpha_2$ *in* J *ist, so gilt* (*im Definitionsbereich von* z_0) *die Ungleichung*

$$z_0 \geqq \psi\,. \tag{9}$$

Beweis. Wir wählen ein $\beta \in E_1$ mit $\sigma_2 < \beta < \iota_1$. Es gibt ein $b_1 > a$ derart, dass $\alpha_2 < \beta < \alpha_1$ in $\langle b_1, \infty)$ ist. Nach Satz 9 hat (6) in $\langle b_1, \infty)$ eine Lösung und die Hauptlösung z_0 von (6) erfüllt dort die Bedingung $z_0 \leqq \beta$; daraus folgt

$$\limsup z_0 \leqq \sigma_2\,. \tag{10}$$

Es sei nun ψ eine in J nichtfallende Funktion mit $\psi \leqq \alpha_2$ (der Fall $\psi = -\infty$ wird nicht ausgeschlossen). Gesetzt, es wäre $z_0(x_0) < \psi(x_0)$ für irgendein x_0. In $\langle x_0, \infty)$ haben wir dann $\kappa \leqq \psi \leqq \alpha_2$ mit $\kappa = \psi(x_0)$, also (nach III. aus Lemma 7) $z_0 < \kappa$, $-z_0' = \delta^{-1} . (\alpha_1 - z_0)(\alpha_2 - z_0) \geqq \delta^{-1} . (\kappa - z_0)^2$; für $x > x_0$ ist demnach $-(z_0(x_0) - \kappa)^{-1} > (z_0(x) - \kappa)^{-1} - (z_0(x_0) - \kappa)^{-1} = \int_{x_0}^x -z_0' . (z_0 - \kappa)^{-2} \geqq \int_{x_0}^x \delta^{-1} \to \infty$. Durch diesen Widerspruch ist (9) bewiesen. Wählen wir $\psi(x) = \inf_{t \geqq x} \alpha_2(t)$, so sehen wir, dass $\liminf z_0 \geqq \lim \psi = \iota_2$ ist, was mit (10) die Beziehung (7) ergibt.

Es sei nun z eine Lösung von (6) in $\langle b, \infty)$, die keine Hauptlösung ist. Wir wählen Zahlen γ, ε mit $\sigma_2 < \gamma < \gamma + \varepsilon < \iota_1$. Es gibt ein b_2 derart, dass in $\langle b_2, \infty)$ die Ungleichungen $\alpha_2 < \gamma$, $\gamma + \varepsilon < \alpha_1 < \sigma_1 + \varepsilon$ bestehen. Laut Satz 8 und Lemma 7 (Implikationen I. und II.) existiert eine Lösung z^* von (6) mit $z^*(b_2) = \alpha_1(b_2)$ und $\gamma + \varepsilon < z^* \leqq \sigma_1 + \varepsilon$ in $\langle b_2, \infty)$. Aus (7) folgt $z^* \neq z_0$ und nach Satz 6 ist $\liminf |z - z^*| = 0$. Daraus ergibt sich die Existenz einer Zahl $b_3 > b_2$ mit $|z(b_3) - z^*(b_3)| < \varepsilon$; es gilt offenbar $\gamma < z(b_3) < \sigma_1 + 2\varepsilon$. Nach Lemma 7 haben wir $\gamma < z < \sigma_1 + 2\varepsilon$ in $\langle b_3, \infty)$, womit auch (8) bewiesen ist.

11. Satz. *Es gelte* $p, q \in C_0$, $\gamma, \delta \in C_1$, $\delta > 0$; *wir setzen*

$$P = p\delta - \delta' + 2\gamma\,, \tag{11}$$

$$Q = q\delta^2 + \gamma^2 + p\gamma\delta + \gamma'\delta - \gamma\delta' \tag{12}$$

und behaupten:

I. *Wenn y eine Lösung von (1) im Intervall $J_0 \subset J$ und wenn $y \neq 0$ in J_0 ist, dann ist die Funktion*

$$z = \delta y' y^{-1} - \gamma \tag{13}$$

eine Lösung von (2) in J_0.

II. *Wenn z eine Lösung von (2) im Intervall $J_0 \subset J$ und wenn $b \in J_0$ ist, dann ist die Funktion*

$$y(x) = \exp\left\{\int_b^x (z + \gamma)\,\delta^{-1}\right\} \quad (x \in J_0) \tag{14}$$

eine Lösung von (1) in J_0.

III. *Die Gleichung (1) ist dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn (2) regulär ist.*

Beweis. Es sei zunächst y eine beliebige in J_0 zweimal differenzierbare Funktion, welche dort keine Nullstelle hat. Wir setzen

$$y'' + py' + qy = f \tag{15}$$

und definieren eine Funktion z durch (13). Dann ist $z' = (\delta' y y' + \delta y\,.\,(f - py' - qy) - \delta y'^2)\,.\,y^{-2} - \gamma' = y'y^{-1}\,.\,(\delta' - \delta p) - (y'y^{-1})^2\,.\,\delta - q\delta - \gamma' + \delta f y^{-1}$. Wenn wir da $(z + \gamma)\,\delta^{-1}$ statt $y'y^{-1}$ schreiben, so bekommen wir

$$z' = -\,\delta^{-1}\,.\,(z^2 + Pz + Q) + \delta f y^{-1}\,, \tag{16}$$

wie man leicht nachrechnet. Wenn nun y eine Lösung von (1) ist, so haben wir $f = 0$ und z ist eine Lösung von (2). Wenn umgekehrt z eine Lösung von (2) ist und wenn wir y, f durch (14) und (15) bestimmen, so gilt offensichtlich auch (13) und (16), was $f = 0$ ergibt. Damit ist I. und II. bewiesen; daraus folgt sofort III.

12. Definition. Wir nehmen an, dass die Gleichung (1) nichtoszillatorisch ist, und setzen $W(x) = \exp\{-\int_a^x p\}$. Es sei y eine Lösung von (1). Wir sagen, dass y eine Hauptlösung ist, wenn eine solche Zahl b existiert, dass die Beziehungen $y \neq 0$ in $\langle b, \infty)$ und $\int_b^\infty W y^{-2}$ bestehen.

13. Satz. *Es sei (1) eine nichtoszillatorische Gleichung.*

I. *Es existiert eine Hauptlösung von (1) und je zwei Hauptlösungen sind linear abhängig.*

II. *Es gelte $\gamma, \delta \in C_1$, $\delta > 0$; wir definieren P, Q durch (11) und (12). Unter diesen Bedingungen ist eine Lösung y von (1) genau dann eine Hauptlösung, wenn es eine solche Zahl b gibt, dass die Funktion (13) eine Hauptlösung von (2) in $\langle b, \infty)$ ist.*

Beweis. Es sei y eine beliebige nichttriviale Lösung von (1) und es sei $y(x) \neq 0$ für $x \geqq b$. Wir definieren in $\langle b, \infty)$ eine Funktion z durch (13). Da $2z + P = 2\delta y' y^{-1} + p\delta - \delta'$ ist, haben wir $\int_b^x \delta^{-1}\,.\,(2z + P) = \int_b^x (2y'y^{-1} - \delta'\delta^{-1} + p)$,

$\exp\{-\int_b^x \delta^{-1} . (2z + P)\} = \kappa . \delta(x) . y^{-2}(x) . W(x)$ $(\kappa > 0)$ und folglich $I(z, b, \infty) = = \kappa \int_b^\infty Wy^{-2}$, was mit Satz 11 die Behauptung II. ergibt. Laut Satz 6 existiert aber in $\langle b, \infty)$ genau eine Hauptlösung z von (2) und durch (13) ist y bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.

14. Satz. *Es gelte* $p, q \in C_0$, $\gamma, \delta \in C_1$, $\delta > 0$, $\int_a^\infty \delta^{-1} = \infty$; *es sei weiter* $\Delta = = (\delta' - p\delta)^2 - 4\delta . (\gamma' + q\delta) \geqq 0$. *Wir setzen* $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$,

$$H(x) = \int_a^x \delta^{-1}\,, \quad K(x) = \int_a^x \gamma\delta^{-1}\,, \tag{17}$$

$$\alpha_i = -\gamma + \tfrac{1}{2}(\delta' - p\delta + \varepsilon_i \Delta^{1/2})\,, \tag{18}$$

$$\iota_i = \liminf \alpha_i\,, \quad \sigma_i = \limsup \alpha_i \qquad (i = 1, 2) \tag{19}$$

und nehmen an, dass $\sigma_2 < \iota_1$ *ist. Dann ist die Gleichung* (1) *nichtoszillatorisch und für jedes Fundamentalsystem* y_1, y_2 *von* (1), *wo* y_2 *eine Hauptlösung ist, gilt*

$$\iota_i \leqq \liminf\,(\delta y_i' y_i^{-1} - \gamma)\,, \quad \limsup\,(\delta y_i' y_i^{-1} - \gamma) \leqq \sigma_i\,, \tag{20}$$

$$\iota_i \leqq \liminf\,((\log|y_i| - K) . H^{-1})\,, \quad \limsup\,((\log|y_i| - K) . H^{-1}) \leqq \sigma_i\,. \tag{21}$$

Weiter setzen wir voraus, dass die Beziehung

$$-\infty < \iota_2 = \sigma_2 < \iota_1 = \sigma_1 < \infty \tag{22}$$

besteht und dass eine von den folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1) $\int_a^\infty |\mathrm{d}\alpha_1| < \infty$;
2) $\int_a^\infty |\mathrm{d}\alpha_2| < \infty$;
3) *es gibt eine nichtnegative nichtwachsende Funktion* φ *mit* $\int_a^\infty \varphi\delta^{-1} < \infty$ *und* $|\alpha_2 - \sigma_2| \leqq \varphi$.

Dann gibt es Zahlen c_1, c_2 *mit*

$$y_i(x) \sim c_i \exp\{\int_a^x(\alpha_i + \gamma)\delta^{-1}\} = c_i \exp\{K(x)\} \exp\{\int_a^x \alpha_i\delta^{-1}\} \quad (i = 1, 2)\,. \tag{23}$$

Beweis. Wenn wir P, Q durch (11) und (12) definieren, so gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \delta' - p\delta - 2\gamma = -P\,, \quad \alpha_1\alpha_2 = Q\,, \tag{24}$$

wie man leicht nachrechnet; in diesem Fall ist also (2) mit (6) identisch und laut Satz 10 ist (6) regulär. Nach Satz 11 ist (1) nichtoszillatorisch und die Funktionen $z_i = \delta y_i' y_i^{-1} - \gamma$ sind Lösungen von (6) (in einem Intervall $\langle b, \infty)$); auf Grund von Satz 13 folgen jetzt die Beziehungen (20) aus (7) und (8).

Es sei nun τ eine beliebige Zahl grösser als σ_2. Es gibt ein b_0 mit $\delta y_2' y_2^{-1} - \gamma < \tau$ in $\langle b_0, \infty)$; demnach hat man $y_2' y_2^{-1} - \gamma\delta^{-1} < \tau\delta^{-1}$ und $\log|y_2| - K \leqq \tau H + + \kappa_1$ $(\kappa_1 \in E_1)$. Wegen $H \to \infty$ gilt $\limsup\,((\log|y_2| - K) . H^{-1}) \leqq \tau$; mithin ist $\limsup\,((\log|y_2| - K) . H^{-1}) \leqq \sigma_2$. Ähnlich kann man die übrigen Ungleichungen in (21) beweisen.

Es gelte nun (22). Wenn 3) erfüllt ist, so haben wir offensichtlich $\varphi \to 0$; es gibt daher ein b mit $\sigma_2 + \varphi < \alpha_1$ in $\langle b, \infty)$. Wenn man in Satz 10 $\sigma_2 - \varphi$ statt ψ und in Satz 9 $\sigma_2 + \varphi$ statt ψ schreibt, so sieht man, dass $\sigma_2 - \varphi \leqq z_2 \leqq \sigma_2 + \varphi$, also $|z_2 - \alpha_2| \leqq 2\varphi$ in $\langle b, \infty)$ ist; daraus ergibt sich die Existenz eines endlichen Grenzwertes

$$\lim \int_a^x (z_2 - \alpha_2)\, \delta^{-1}\,. \tag{25}$$

Ist 1) erfüllt, so bestimmen wir zunächst ein b mit $z_2 < \alpha_1$ in $\langle b, \infty)$. Da

$$\log(\alpha_1(x) - z_2(x)) = \kappa_2 + \int_b^x \frac{d(\alpha_1 - z_2)}{\alpha_1 - z_2} = \kappa_2 + \int_b^x \frac{d\alpha_1}{\alpha_1 - z_2} - \int_b^x \frac{z_2'}{\alpha_1 - z_2}$$

ist, haben wir

$$\int_b^x \frac{z_2'}{\alpha_1 - z_2} = \kappa_2 - \log(\alpha_1(x) - z_2(x)) + \int_b^x \frac{d\alpha_1}{\alpha_1 - z_2} \quad (x > b)\,. \tag{26}$$

Nach (6) gilt $(z_2 - \alpha_2)\, \delta^{-1} = z_2' \,.\, (\alpha_1 - z_2)^{-1}$, was mit (26) wieder die Existenz eines endlichen Grenzwertes (25) ergibt. Man hat offenbar $y_2' y_2^{-1} - (\alpha_2 + \gamma)\, \delta^{-1} = (z_2 - \alpha_2)\, \delta^{-1}$; wenn also 1) oder 3) in Kraft ist, so existieren endliche Grenzwerte $\lim (\log |y_2(x)| - \int_a^x (\alpha_2 + \gamma)\, \delta^{-1})$, $\lim (y_2(x) \,.\, \exp \{-\int_a^x (\alpha_2 + \gamma)\, \delta^{-1}\}) = c_2 \neq 0$. Daraus folgt (23) für $i = 2$.

Setzen wir ferner $W(x) = \exp\{-\int_a^x p\}$, so haben wir $\delta W \,.\, (y_1 y_2)^{-1} = \kappa_3 \delta \,.\, (y_1' y_2 - y_1 y_2') \,.\, (y_1 y_2)^{-1} = \kappa_3 (z_1 - z_2) \to \kappa_4 \neq 0$, also $y_1(x) \sim \kappa_5 \,.\, \delta(x) \,.\, W(x) \,.\, y_2^{-1}(x) \sim \kappa_6 \,.\, \delta(x) \,.\, \exp\{\int_a^x (-p - (\alpha_2 + \gamma)\, \delta^{-1})\}$. Wegen (24) ist jedoch $-p\delta - (\alpha_2 + \gamma) = \alpha_1 + \gamma - \delta'$, so dass $y_1(x) \sim \kappa_6 \,.\, \delta(x) \,.\, \exp\{\int_a^x (\alpha_1 + \gamma - \delta')\, \delta^{-1}\} = c_1 \,.\, \delta(x) \,.\, \exp\{\int_a^x (\alpha_1 + \gamma)\, \delta^{-1}\} \,.\, \exp\{-\log \delta(x)\} = c_1 \,.\, \exp\{\int_a^x (\alpha_1 + \gamma)\, \delta^{-1}\}$ ist. Daraus folgt (23) für $i = 1$.

Wenn schliesslich 2) erfüllt ist, so beweisen wir zunächst die Existenz von c_1 und daraus leiten wir die Existenz von c_2 her.

15. Satz. *Es gelte* $p, q \in C_0$, $\int_a^\infty |dp| < \infty$, $\int_a^\infty |dq| < \infty$; *wir setzen* $\Delta = p^2 - 4q$ *und nehmen an, dass* $\lim \Delta > 0$ *ist. Dann ist die Gleichung* (1) *nichtoszillatorisch und hat ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_i(x) \sim \exp\left\{\int_b^x \tfrac{1}{2}(-p + \varepsilon_i \Delta^{1/2})\right\} \quad (\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)\,;$$

y_2 *ist eine Hauptlösung.*[2])

Beweis. Es genügt, in Satz 14 $\gamma = 0$ und $\delta = 1$ zu setzen.

16. Satz. *Es sei* $A \in C_1$, $A > 0$ *und*

$$\int_a^\infty |d(A^{-1/2})'| < \infty\,. \tag{27}$$

---

[2]) Für $p = 0$ hat diese Formeln A. Wintner in [4] abgeleitet.

Wir setzen $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\lambda = \lim (A^{-1/2})'$, $\sigma_i = \frac{1}{2}(\lambda + \varepsilon_i(\lambda^2 + 1)^{1/2})$ $(i = 1,2)$. *Dann ist* $\int_a^\infty A^{1/2} = \infty$ *und die Gleichung*

$$(28) \qquad y'' = Ay$$

hat ein Fundamentalsystem y_1, y_2 *mit*

$$y_i(x) \sim A^{-1/4}(x) \,.\, \exp\left\{\varepsilon_i \int_a^x A^{1/2} \,.\, (1 + \tfrac{1}{16}A'^2A^{-3})^{1/2}\right\},$$

$$y_i' \sim \sigma_i A^{1/2} y_i \,;$$

y_2 *ist eine Hauptlösung.*[3])

Beweis. Wir schreiben $\delta = A^{-1/2}$, $\alpha_i = \frac{1}{2}(\delta' + \varepsilon_i(\delta'^2 + 4)^{1/2})$. Aus $\delta' \to \lambda < \infty$ folgt zunächst $\delta(x) \,.\, x^{-1} \to \lambda$, also $\int_a^\infty A^{1/2} = \int_a^\infty \delta^{-1} = \infty$. Offensichtlich ist $\lim \alpha_2 = \sigma_2 < 0 < \sigma_1 = \lim \alpha_1$ und wegen (27) gilt $\int_a^\infty |\mathrm{d}\alpha_i| < \infty$ $(i = 1, 2)$. Da $(\delta'^2 + 4)^{1/2} \,.\, (2\delta)^{-1} = A^{1/2} \,.\, (1 + \frac{1}{16}A'^2A^{-3})^{1/2}$ und $\int_a^x (2\delta)^{-1} \,.\, \delta' = \kappa_1 + \frac{1}{2}\log\delta = \kappa_1 + \log A^{-1/4}$ ist, haben wir $\exp\{\int_a^x \alpha_i\delta^{-1}\} = \kappa_2 \,.\, A^{-1/4}(x) \,.\, \exp\{\varepsilon_i \int_a^x A^{1/2} \,.\, (1 + \frac{1}{16}A'^2A^{-3})^{1/2}\}$. Wenn nun Y_2 eine Hauptlösung und Y_1 eine von Y_2 unabhängige Lösung der Gleichung (28) ist, so haben wir nach Satz 14 (wo wir $\gamma = p = 0$, $q = -A$ setzen) $\delta Y_i' Y_i^{-1} \to \sigma_i$. Daraus bekommen wir nach Satz 14 unsere Behauptung.

17. Satz. *Es gelte* $A \in C_0$, $\delta \in C_1$, $\delta > 0$, $\sup|\delta'| < \infty$, $\sup A\delta^2 < \infty$, $\inf A\delta^2 > 0$. *Wir setzen* $H(x) = \int_a^x \delta^{-1}$, $\alpha_i = \frac{1}{2}(\delta' + \varepsilon_i(\delta'^2 + 4A\delta^2)^{1/2})$ $(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1)$, $\iota_i = \liminf \alpha_i$, $\sigma_i = \limsup \alpha_i$. *Es sei* y_2 *eine Hauptlösung und* y_1 *eine von* y_2 *unabhängige Lösung der Gleichung* (28). *Wenn wir noch* $W = y_1'y_2 - y_1y_2'$, $f = y_1y_2W^{-1}$ *setzen, so gilt*

$$(29) \qquad \lim H = \int_a^\infty \delta^{-1} = \infty\,,$$

$$(30) \qquad -\infty < \iota_2\,, \quad \sigma_2 < 0 < \iota_1\,, \quad \sigma_1 < \infty\,,$$

$$(31) \qquad \iota_i \leqq \liminf \delta y_i' y_i^{-1}\,, \quad \limsup \delta y_i' y_i^{-1} \leqq \sigma_i\,,$$

$$(32) \qquad \iota_1 - \sigma_2 \leqq \liminf \delta f^{-1}, \quad \limsup \delta f^{-1} \leqq \sigma_1 - \iota_2\,,$$

$$(33) \qquad -1 < (\iota_1 + \iota_2)(\iota_1 - \iota_2)^{-1} \leqq \liminf f'\,,$$
$$\limsup f' \leqq (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1} < 1\,,$$

$$(34) \qquad \iota_i \leqq \liminf (H^{-1} \,.\, \log|y_i|)\,, \quad \limsup (H^{-1} \,.\, \log|y_i|) \leqq \sigma_i\,,$$

$$(35) \qquad \log|y_i'| \sim -\log|y_k| \quad (k \neq i)\,.$$

Beweis. Aus der Beziehung $\sup\delta' < \infty$ folgt leicht (29). Wir definieren nun $\eta = \inf A\delta^2$ und $\varphi_i(t) = t + \varepsilon_i(t^2 + \eta)^{1/2}$ $(t \in E_1)$. Es ist leicht zu sehen, dass φ_i

3) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Resultates von P. Hartman und A. Wintner ([1], S. 82).

wachsende Funktionen sind. Daraus folgt $2\alpha_1 \geqq \delta' + (\delta'^2 + \eta)^{1/2} \geqq \varphi_1(\inf \delta')$, $2\alpha_2 \leqq \delta' - (\delta'^2 + \eta)^{1/2} \leqq \varphi_2(\sup \delta')$, also $\iota_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$; offensichtlich ist $\iota_2 > > -\infty$, $\sigma_1 < \infty$. Wenn wir in Satz 14 $\gamma = p = 0$, $q = -A$ setzen, so bekommen wir (31), (34) und wegen $\delta f^{-1} = \delta \,.\, (y_1'y_2 - y_1y_2') \,.\, (y_1y_2)^{-1} = \delta y_1'y_1^{-1} - \delta y_2'y_2^{-1}$ gilt (32). Aus (30) und (31) sehen wir, dass $y_1y_2' \neq 0$ in einem Intervall $\langle b, \infty)$ ist; daher können wir $h = -(y_1'y_2) \,.\, (y_1y_2')^{-1}$ setzen und auf Grund von $h = -(\delta y_1'y_1^{-1}) \,.\, (\delta y_2'y_2^{-1})^{-1}$ erhalten wir nach (30) und (31)

$$(36) \qquad 0 < -\iota_1\iota_2^{-1} \leqq \liminf h\,, \quad \limsup h \leqq -\sigma_1\sigma_2^{-1} < \infty\,.$$

Es ist $f' = (y_1'y_2 + y_1y_2') \,.\, (y_1'y_2 - y_1y_2')^{-1}$, also $f'(x) = g(h(x))$ mit $g(t) = (t-1) \,.\, (t+1)^{-1}$. Da $g(t)$ für $t > 0$ wächst, gilt nach (36) $\liminf f' = g(\liminf h) \geqq g(-\iota_1\iota_2^{-1}) = (\iota_1 + \iota_2)(\iota_1 - \iota_2)^{-1} > -1$, $\limsup f' = g(\limsup h) \leqq g(-\sigma_1\sigma_2^{-1}) = (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1} < 1$, womit (33) bewiesen ist.

Auf Grund von (29) und (34) hat man

$$(37) \qquad \log|y_1| \to \infty\,, \quad \log|y_2| \to -\infty$$

(also $|y_1| \to \infty$, $|y_2| \to 0$). Aus (33) und aus den Beziehungen $2y_1'y_2 = W(1 + f')$, $-2y_1y_2' = W(1 - f')$ ergibt sich ferner, dass $\log|y_1'| + \log|y_2| = \log|y_1'y_2| = O(1)$, $\log|y_1| + \log|y_2'| = \log|y_1y_2'| = O(1)$ ist; daraus folgt nach (37) die Beziehung (35).

18. Satz. *Es sei* $A \in C_0$; *wir setzen* $j(x) = x$, $l(x) = \log x$, $\lambda = \liminf Aj^2$ *und nehmen an, dass* $\lambda > -\frac{1}{4}$ *ist. Dann ist die Gleichung* (28) *nichtoszillatorisch; es sei* y_2 *eine Hauptlösung und* y_1 *eine von* y_2 *unabhängige Lösung der Gleichung* (28). *Wenn wir noch* $\Lambda = \limsup Aj^2$, $\sigma_1 = \frac{1}{2}(1 + (1 + 4\Lambda)^{1/2})$, $\iota_1 = \frac{1}{2}(1 + (1 + 4\lambda)^{1/2})$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(1 - (1 + 4\lambda)^{1/2})$, $\iota_2 = \frac{1}{2}(1 - (1 + 4\Lambda)^{1/2})$ *setzen*[4]), *so gelten die Abschätzungen*

$$(38) \qquad \iota_i \leqq \liminf jy_i'y_i^{-1}\,, \quad \limsup jy_i'y_i^{-1} \leqq \sigma_i\,,$$

$$(39) \qquad \iota_i \leqq \liminf (l^{-1} \,.\, \log|y_i|)\,, \quad \limsup (l^{-1} \,.\, \log|y_i|) \leqq \sigma_i\,,$$

$$(40) \qquad \iota_1 - 1 \leqq \liminf (l^{-1} \,.\, \log|y_1'|)\,, \quad \limsup (l^{-1} \,.\, \log|y_1'|) \leqq \sigma_1 - 1\,;$$

für $\lambda > 0$ *ist*

$$(41) \qquad \iota_2 - 1 \leqq \liminf (l^{-1} \,.\, \log|y_2'|)\,, \quad \limsup (l^{-1} \,.\, \log|y_2'|) \leqq \sigma_2 - 1\,,$$

für $\Lambda < 0$ *ist*

$$\log|y_i'| \sim -\log|y_k| \quad (i \neq k)\,.$$

Beweis. Wenn wir in Satz 14 $\delta = j$, $p = \gamma = 0$, $q = -A$ setzen, so haben wir $\alpha_i = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_i(1 + 4Aj^2)^{1/2})$, also $\iota_i = \liminf \alpha_i$, $\sigma_i = \limsup \alpha_i$ und aus (20), (21) folgen unmittelbar die Beziehungen (38), (39).

[4]) Für $\Lambda = \infty$ ist also $\sigma_1 = \infty$, $\iota_2 = -\infty$.

Wegen $\iota_1 > \frac{1}{2}$ gibt es ein $b > 1$ mit $jy_1'y_1^{-1} > \frac{1}{2}$ in $\langle b, \infty)$. Daraus folgt $\log |y_1'| > > \log |y_1| - l - \log 2$, $l^{-1} . \log |y_1'| > l^{-1} . \log |y_1| - 1 - o(1)$, $\lim \inf (l^{-1} . . \log |y_1'|) \geqq \lim \inf (l^{-1} . \log |y_1|) - 1 \geqq \iota_1 - 1$; ähnlich beweist man die zweite Ungleichung in (40). Ist $\lambda > 0$, so haben wir $\sigma_2 < 0$; nach (38) gibt es also ein $\varepsilon > 0$ und ein $b > 1$ mit $|jy_2'y_2^{-1}| > \varepsilon$ in $\langle b, \infty)$. Daraus folgt nach (39) die erste Ungleichung in (41); ähnlich kann man die zweite beweisen. Es sei schliesslich $\Lambda < 0$. Dann ist $0 < \iota_2, \sigma_1 < 1$; die Funktion $h = y_1'y_2 \cdot (y_1y_2')^{-1}$ erfüllt laut (38) die Beziehungen $1 < \iota_1/\sigma_2 \leqq \lim \inf h$, $\lim \sup h \leqq \sigma_1/\iota_2 < \infty$ und nach (39) ist $|y_i| \to \infty$ $(i = 1, 2)$. Aus der Identität $y_1y_2' = (y_1'y_2 - y_1y_2')(h - 1)^{-1}$ folgt nun $\log |y_i'y_k| = = O(1)$, also $\log |y_i'| \sim - \log |y_k|$ $(k \neq i)$. Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung. Ist $0 < \lambda$, $\Lambda < \infty$, so folgen die Beziehungen $\log |y_i'| \sim - \log |y_k|$ aus Satz 17 (wo wir $\delta = j$ setzen).

19. Satz. *Es sei $A \in C_1$, $A > 0$; wir setzen $j(x) = x$, $H(x) = \int_a^x A^{1/2}$ und nehmen an, dass ein endlicher Grenzwert $\lim (A^{-1/2})' = \lambda$ existiert. Es sei y_2 eine Hauptlösung und y_1 eine von y_2 unabhängige Lösung der Gleichung (28). Dann hat man $H \to \infty$, $j^{-2} . A^{-1} \to \lambda^2$; für $\lambda = 0$ gilt*

$$(42) \qquad \log |y_1| \sim \log |y_1'| \sim - \log |y_2| \sim - \log |y_2'| \sim H\,,$$

für $\lambda > 0$ gilt

$$(43) \qquad \log |y_1| \sim - \log |y_2'| \sim \xi \log j\,, \quad \log |y_1'| \sim - \log |y_2| \sim (\xi - 1) \log j\,,$$

wo $\xi = \frac{1}{2}(1 + (1 + 4\lambda^{-2})^{1/2})$ ist.

Beweis. Man hat offenbar $j^{-1} . A^{-1/2} \to \lambda$, also $\lim H = \int_a^\infty A^{1/2} = \infty$. Es sei zunächst $\lambda = 0$. Wenn wir in Satz 17 $\delta = A^{-1/2}$ setzen, so ist $\sigma_i = \iota_i = \varepsilon_i$ und (42) folgt unmittelbar aus (34) und (35). Wenn nun $\lambda > 0$ ist, so können wir Satz 18 anwenden, wo wir λ^{-2} statt λ schreiben. Dann ist $\sigma_1 = \iota_1 = \xi$, $\sigma_2 = \iota_2 = - \xi + 1$ und aus (39)–(41) folgt (43).

20. Satz. *Es sei $A \in C_0$. Wir setzen $j(x) = x$, $l(x) = \log x$, $\gamma(x) = \int_a^x jA$ und nehmen an, dass $\mu = \lim \sup \gamma - \lim \inf \gamma < 1$ ist. Dann ist die Gleichung (28) nichtoszillatorisch; ist y_2 eine Hauptlösung und y_1 eine von y_2 unabhängige Lösung dieser Gleichung, so gilt*

$$(44) \qquad \lim \sup |jy_2'y_2^{-1}| \leqq \mu\,, \quad \lim \sup |jy_1'y_1^{-1} - 1| \leqq \mu\,,$$

$$(45) \qquad \lim \sup |l^{-1} . \log |y_2|| \leqq \mu\,, \quad \lim \sup |l^{-1} . \log |y_1| - 1| \leqq \mu\,.$$

Weiter setzen wir voraus, dass eine von den folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

1) $\int_a^\infty j|A| < \infty$;

2) *es ist $\mu = 0$ und es gibt eine nichtnegative nichtwachsende Funktion φ mit*

$$(46) \qquad \int_a^\infty \varphi j^{-1} < \infty\,, \quad |\gamma - \lim \gamma| \leqq \varphi\,.$$

Dann gibt es Zahlen c_1, c_2 mit

$$y_1 \sim c_1 j\,, \quad y_2 \sim c_2\,, \tag{47}$$

$$y_1' \sim c_1\,, \quad y_2' = o(j^{-1})\,. \tag{48}$$

Beweis. In Satz 14 setzen wir $\delta = j$, $q = -A$, $p = 0$. Wegen $\gamma' = jA = -q\delta$ ist $\Delta = 1$, also

$$\alpha_1 = 1 - \gamma\,, \quad \alpha_2 = -\gamma\,, \tag{49}$$

$$\sigma_2 = -\liminf \gamma < 1 - \limsup \gamma = \iota_1\,. \tag{50}$$

Nach (20) ist

$$-\mu = \iota_2 + \liminf \gamma \leqq \liminf jy_2'y_2^{-1}\,, \tag{51}$$

$$\limsup jy_2'y_2^{-1} \leqq \sigma_2 + \limsup \gamma = \mu\,;$$

damit ist die erste Ungleichung in (44) bewiesen. Daraus ergibt sich leicht die erste Ungleichung in (45). Ähnlich beweist man die entsprechenden Beziehungen für y_1. Wenn also $\mu = 0$ ist, so haben wir

$$jy_2'y_2^{-1} \to 0\,, \quad jy_1'y_1^{-1} \to 1\,. \tag{52}$$

Gibt es ausserdem eine nichtnegative nichtwachsende Funktion φ mit den Eigenschaften (46), so ist die Bedingung 3) aus Satz 14 erfüllt; wenn $\int_a^\infty j|A| < \infty$ gilt, so ist $\mu = 0$ und es sind die Bedingungen 1) und 2) aus Satz 14 in Kraft. Da nach (49) $\exp\{\int_a^x (\alpha_1 + \gamma)\,\delta^{-1}\} = \kappa_1 x$, $\exp\{\int_a^x (\alpha_2 + \gamma)\,\delta^{-1}\} = 1$ ist, können wir auf Grund von Satz 14 solche Zahlen c_1, c_2 bestimmen, dass (47) besteht, und nach (52) gilt dann auch (48).

21. Satz. *Es gelte $A, B \in C_0$ und die Gleichung*

$$Y'' = BY \tag{53}$$

sei nichtoszillatorisch. Es sei Y_1, Y_2 ein Fundamentalsystem dieser Gleichung; Y_2 sei eine Hauptlösung und es gelte $Y_1Y_2 \neq 0$ in J. Wir setzen $W = Y_1'Y_2 - Y_1Y_2'$, $f = Y_1Y_2W^{-1}$, $F = f^2\,.\,(A - B)$ und nehmen an, dass $\inf F > -\frac{1}{4}$ ist. Dann ist auch die Gleichung (28) nichtoszillatorisch; es sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von (28), y_2 sei eine Hauptlösung. Wenn wir noch $\lambda = \liminf F$, $\Lambda = \limsup F$, $\sigma_1 = (1 + 4\Lambda)^{1/2}$, $\iota_1 = (1 + 4\lambda)^{1/2}$, $\sigma_2 = -\iota_1$, $\iota_2 = -\sigma_1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\Theta_i = \frac{1}{2}(\sigma_i - \varepsilon_i)$, $\vartheta_i = \frac{1}{2}(\iota_i - \varepsilon_i)$ setzen, so haben wir

$$\iota_i \leqq \liminf\left(2fy_i'y_i^{-1} - f'\right), \quad \limsup\left(2fy_i'y_i^{-1} - f'\right) \leqq \sigma_i\,, \tag{54}$$

$$\iota_i \leqq \liminf \frac{\log y_i^2 f^{-1}}{\log |Y_1Y_2^{-1}|}\,, \quad \limsup \frac{\log y_i^2 f^{-1}}{\log |Y_1Y_2^{-1}|} \leqq \sigma_i\,, \tag{55}$$

$$\vartheta_i \leqq \liminf f\,.\left(y_i'y_i^{-1} - Y_i'Y_i^{-1}\right), \quad \limsup f\,.\left(y_i'y_i^{-1} - Y_i'Y_i^{-1}\right) \leqq \Theta_i\,, \tag{56}$$

$$\vartheta_i \leqq \liminf \frac{\log |y_iY_i^{-1}|}{\log |Y_1Y_2^{-1}|}\,, \quad \limsup \frac{\log |y_iY_i^{-1}|}{\log |Y_1Y_2^{-1}|} \leqq \Theta_i \quad (i = 1, 2)\,. \tag{57}$$

Ferner gelten die folgenden Behauptungen:

1) *Wenn $F \to 0$ ist und wenn das Paar (i, k) die Bedingungen $i \neq k$,* $\liminf |Y_i' Y_k| >$ > 0 *erfüllt, so haben wir*

$$y_i' y_i^{-1} \sim Y_i' Y_i^{-1} . \tag{58}$$

2) *Ist $A < \infty$ und $|Y_1 Y_2'| \to \infty$, so gilt (58) für $i = 1, 2$.*

3) *Ist $\int_a^\infty |\mathrm{d}F| < \infty$, so gibt es Zahlen b_i, c_i mit*

$$y_i \sim b_i \,.\, f^{1/2} \,.\, e^{\varepsilon_i G} = c_i \,.\, Y_i \,.\, e^{\varepsilon_i \varphi} , \tag{59}$$

wo $G(x) = \int_a^x (1 + 4F)^{1/2} . (2f)^{-1}$ und $\varphi(x) = \int_a^x 2F . f^{-1} . (1 + (1 + 4F)^{1/2})^{-1}$ ist.

4) *Wenn $\int_a^\infty |\mathrm{d}F| < \infty$ ist und wenn das Integral $\int_a^\infty f . (A - B)$ konvergiert*[5], *so ist $F \to 0$ (also $\vartheta_i = \Theta_i = 0$) und es gibt Zahlen c_1^*, c_2^* mit*

$$y_i \sim c_i^* \,.\, Y_i \,. \tag{60}$$

Beweis. Wenn wir in Satz 14 $p = 0, q = -A, \delta = 2f, \gamma = f'$ setzen, so haben wir $\alpha_i = \frac{1}{2}\varepsilon_i \Delta^{1/2}$, $\Delta = 4f'^2 - 8f . (f'' - 2Af)$, $\frac{1}{4}\Delta = (Y_1' Y_2 + Y_1 Y_2')^2 W^{-2} - 2Y_1 Y_2 W^{-1} .$ $. (Y_1'' Y_2 + 2Y_1' Y_2' + Y_1 Y_2'') W^{-1} + 4Af^2 = (Y_1' Y_2 - Y_1 Y_2')^2 W^{-2} - 2Y_1 Y_2 W^{-1} .$ $. 2BY_1 Y_2 W^{-1} + 4Af^2 = 1 + 4f^2 . (A - B)$, also $\alpha_i = \varepsilon_i . (1 + 4F)^{1/2}$, $\limsup \alpha_i = \sigma_i$, $\liminf \alpha_i = \iota_i$. Wegen $\lambda > -\frac{1}{4}$ ist $\sigma_2 < 0 < \iota_1$; ferner gilt $(Y_1 Y_2^{-1})' = WY_2^{-2}$, mithin (da Y_2 eine Hauptlösung ist) $Y_1 . (WY_2)^{-1} \to \infty$. Daraus ergibt sich $|Y_1 Y_2^{-1}| \to$ $\to \infty$ und $f > 0$. Auf Grund von $(\log |Y_1 Y_2^{-1}|)' = W . (Y_1 Y_2)^{-1} = f^{-1} = 2\delta^{-1}$ erhält man

$$H = \kappa_1 + \tfrac{1}{2} \log |Y_1 Y_2^{-1}| \to \infty . \tag{61}$$

Wegen $\gamma \delta^{-1} = f' . (2f)^{-1} = \frac{1}{2}(\log f)'$ ist

$$K = \kappa_2 + \tfrac{1}{2} \log f ; \tag{62}$$

aus (20), (21), (61) und (62) folgen die Ungleichungen (54) und (55). Aus (54) und

$$\varepsilon_i + f' = \varepsilon_i + \frac{Y_1' Y_2 + Y_1 Y_2'}{Y_1' Y_2 - Y_1 Y_2'} = 2 \frac{Y_1 Y_2}{W} . \frac{Y_i'}{Y_i} = 2f \frac{Y_i'}{Y_i}$$

folgt (56); aus (55) und $y_i^2 f^{-1} = y_i^2 W (Y_1 Y_2)^{-1} = (y_i Y_i^{-1})^2 . W . (Y_1 Y_2^{-1})^{\varepsilon_i}$ folgt (57).

Es sei nun $F \to 0$ und $\liminf |Y_i' Y_k| > 0$. Dann ist $\vartheta_i = \Theta_i = 0$ und nach (56) haben wir $y_i' y_i^{-1} = Y_i' Y_i^{-1} + o(1) . f^{-1} = Y_i' Y_i^{-1} . (1 + o(1) . (Y_i' Y_k)^{-1}) = Y_i' Y_i^{-1} .$ $. (1 + o(1))$; damit ist (58) bewiesen.

Wenn $A < \infty$ und $|Y_1 Y_2'| \to \infty$ ist, so haben wir wegen $Y_1' Y_2 - Y_1 Y_2' = \text{konst.}$ auch $|Y_1' Y_2| \to \infty$ und laut (56) gilt $y_i' y_i^{-1} = Y_i' Y_i^{-1} + O(1) . f^{-1} = Y_i' Y_i^{-1} .$ $. (1 + O(1) . (Y_i' Y_k)^{-1}) = Y_i' Y_i^{-1} . (1 + o(1))$, woraus sich wieder (58) ergibt.

Es ist offenbar $\int_a^x \alpha_i \delta^{-1} = \varepsilon_i G(x)$ und laut (62) gilt $e^K = \kappa_3 f^{1/2}$; daraus folgt

$$\exp \left\{ \int_a^x (\gamma + \alpha_i) \, \delta^{-1} \right\} = \kappa_3 f^{1/2}(x) \, e^{\varepsilon_i G(x)} . \tag{63}$$

---

[5]) Es wird keine absolute Konvergenz, sondern nur die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim \int_a^x f . (A - B)$ gemeint.

Ferner gilt $G - H = \varphi$, wie man leicht nachrechnet; (61) ergibt $e^H = \kappa_4 \,.\, |Y_1 Y_2^{-1}|^{1/2}$, also $f^{1/2} \,.\, e^{\varepsilon_i H} = \kappa_5 \,.\, Y_i$. So kommt

(64) $$f^{1/2} \,.\, e^{\varepsilon_i G} = f^{1/2} \,.\, e^{\varepsilon_i H} \,.\, e^{\varepsilon_i (G-H)} = \kappa_5 \,.\, Y_i \,.\, e^{\varepsilon_i \varphi} \,.$$

Wenn $\int_a^\infty |\mathrm{d}F| < \infty$ ist, so gilt offenbar auch $\int_a^\infty |\mathrm{d}\alpha_i| < \infty$ und

(65) $$\int_a^\infty |\mathrm{d}(1 + (1 + 4F)^{1/2})^{-1}| < \infty \,;$$

aus (23), (63) und (64) erhalten wir (59). Konvergiert ausserdem noch das Integral $\int_a^\infty f \,.\, (A - B) = \int_a^\infty Ff^{-1}$, so konvergiert wegen (65) auch $\int_a^\infty 2F \,.\, f^{-1} \,.\, (1 + (1 + 4F)^{1/2})^{-1}$ und die Funktionen $e^{\varepsilon_i \varphi}$ haben positive endliche Grenzwerte; daraus ergibt sich nach (59) die Beziehung (60). Aus der Konvergenz von $\int_a^\infty Ff^{-1}$ und der Divergenz von $\int_a^\infty f^{-1}$ folgt sofort $F \to 0$. Damit ist alles bewiesen.

22. Satz. *Wir setzen* $j(x) = \log_0 x = x$, $M_0(x) = 1$, $\log_{n+1} x = \log(\log_n x)$, $M_{n+1} = M_n \,.\, \log_n$, $Z_n = \sum_{k=1}^{n} M_k^{-2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. *Es gelte* $m, c \in E_1$, *m ganz,* $m \geqq 0$, $c < 1$, $r \in C_0$, $\int_a^\infty |\mathrm{d}r| < \infty$. *Wir nehmen an, dass das Integral* $\int_a^\infty r \,.\, M_{m+1}^{-1}$ *konvergiert, und setzen*

(66) $$\beta_i = \tfrac{1}{2}(1 + \varepsilon_i (1 - c)^{1/2}) \quad (\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1) \,.$$

Dann hat die Gleichung

(67) $$y'' + \tfrac{1}{4}(Z_m + (c + r) \,.\, M_{m+1}^{-2})\, y = 0$$

ein Fundamentalsystem y_1, y_2 *mit*

(68) $$y_i \sim \log_m^{\beta_i} \,.\, M_m^{1/2} \quad (i = 1, 2) \,;$$

y_2 *ist eine Hauptlösung und es gilt*

(69) $$j y_i' y_i^{-1} \to \beta_i \quad (m = 0;\ i = 1, 2) \,,$$

(70) $$2 j y_i' \sim y_i \quad (m > 0;\ i = 1, 2) \,.$$

Beweis. Wir setzen $A = -\tfrac{1}{4}(Z_m + (c + r) \,.\, M_{m+1}^{-2})$, $B = -\tfrac{1}{4}(Z_m + c M_{m+1}^{-2})$, $Y_i = \log_m^{\beta_i} \,.\, M_m^{1/2}$ $(i = 1, 2)$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} M_k^{-1}$. Die Funktionen Y_1, Y_2 bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung $Y'' = BY$; Y_2 ist eine Hauptlösung. Da

(71) $$Y_i' = Y_i \,.\, (\beta_i M_{m+1}^{-1} + \tfrac{1}{2} S_m)$$

und $Y_1 Y_2 = M_{m+1}$ ist, haben wir

(72) $$Y_i' Y_k = \beta_i + \tfrac{1}{2} M_{m+1} S_m \quad (k \neq i) \,.$$

Wenn wir die Bezeichnungen aus Satz 21 benutzen, so erhalten wir $f = M_{m+1} W^{-1}$, $F = -\tfrac{1}{4} r W^{-2}$; wir sehen, dass $\int_a^\infty |\mathrm{d}F| < \infty$ ist und dass das Integral $\int_a^\infty f \,.\, (A - B) = \int_a^\infty Ff^{-1}$ konvergiert. Es ist also $\vartheta_i = \Theta_i = 0$ und laut (60) gibt es ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von (67) mit $y_i \sim Y_i$ $(i = 1, 2)$; y_2 ist eine Hauptlösung. Für $m = 0$ ist $M_{m+1} = j$, $jY_i' = \beta_i Y_i$ und nach (56) haben wir $jy_i'y_i^{-1} - \beta_i = j(y_i'y_i^{-1} - Y_i'Y_i^{-1}) \to \to 0$. Für $m > 0$ ist offenbar $M_{m+1}S_m \to \infty$ und nach (72) ist auch $Y_i'Y_k \to \infty$ $(k \neq i)$. Wegen (71) und $2j \,.\, (\beta_i M_{m+1}^{-1} + \frac{1}{2}S_m) \to 1$ gilt $2jY_i' \sim Y_i$, was mit (58) die Beziehung (70) ergibt. Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung. Wenn $m = c = 0$ ist, so haben wir $\beta_2 = 0$ und laut (68) und (69) gilt $y_2' = o(j^{-1})$. Wenn $m = 0$ ist und wenn das Paar (c, i) nicht mit $(0, 2)$ identisch ist, so haben wir $\beta_i \neq 0$ und statt (69) können wir $y_i' \sim \beta_i \,.\, y_i \,.\, j^{-1} \sim \beta_i \,.\, j^{\beta_i - 1}$ schreiben.

23. Satz. *Es sei* $h \in C_2$, $A, \psi \in C_0$ *und es gelte* $h > 0$, $\int_a^\infty h^{-2} = \infty$, $\psi > 0$, $\int_a^\infty |\mathrm{d}\psi| < \infty$, $\psi \to \eta^2$ $(\eta > 0)$, $\int_a^\infty |hh'' + \psi h^{-2} - Ah^2| < \infty$. *Setzen wir* $G(x) = = \int_a^x \psi^{1/2} \,.\, h^{-2}$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, *so hat die Gleichung* (28) *ein Fundamentalsystem* z_1, z_2 *mit*

$$z_i \sim h \,.\, e^{\varepsilon_i G} \quad (i = 1, 2)\,;$$

z_2 *ist eine Hauptlösung. Ist* $\limsup |hh'| < \eta$, *so gilt noch*

$$z_i' \sim h^{-1} \,.\, (\varepsilon_i \eta + hh') \,.\, e^{\varepsilon_i G} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Beweis. Es sei $A_1 = \psi h^{-4} + h''h^{-1}$, $B = h^{-4} + h''h^{-1}$. Laut [2], Satz 15 hat die Gleichung $Y'' = BY$ ein solches Fundamentalsystem Y_1, Y_2, dass Y_2 eine Hauptlösung ist und dass die Beziehung $Y_1 Y_2 W^{-1} = \frac{1}{2}h^2$ besteht $(W = Y_1'Y_2 - Y_1 Y_2')$. Setzen wir $f = \frac{1}{2}h^2$, $F = f^2 \,.\, (A_1 - B)$, so ist $F = \frac{1}{4}(\psi - 1)$, $\lim F > -\frac{1}{4}$, $\int_a^\infty |\mathrm{d}F| < < \infty$, $\int_a^x (1 + 4F)^{1/2} \,.\, (2f)^{-1} = G(x)$ und für die in Satz 21 definierten Zahlen σ_i, ι_i gilt $\sigma_i = \iota_i = \varepsilon_i \eta$. Nach Satz 21 (Formeln (59) und (54)) hat also die Gleichung

$$y'' = A_1 y \tag{73}$$

ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit

$$y_i \sim h \,.\, e^{\varepsilon_i G}\,, \tag{74}$$

$$h^2 y_i' y_i^{-1} - hh' \to \varepsilon_i \eta\,. \tag{75}$$

Ist $\limsup |hh'| < \eta$, so haben wir $\liminf |\varepsilon_i \eta + hh'| > 0$ und aus (74), (75) folgt leicht

$$y_i' \sim (\varepsilon_i \eta + hh') \,.\, h^{-1} \,.\, e^{\varepsilon_i G}\,. \tag{76}$$

Nach (74) ist

$$h^2 = y_1 y_2 \chi \quad (\chi \to 1)\,; \tag{77}$$

aus (75) folgen jetzt die Beziehungen $\chi \,.\, y_i' y_k - hh' \to \varepsilon_i \eta$, $\chi \,.\, (y_1' y_2 - y_1 y_2') \to 2\eta$, $\chi \,.\, (y_1' y_2 + y_1 y_2') - 2hh' \to 0$. Wenn wir nun $W_1 = y_1' y_2 - y_1 y_2'$, $f_1 = y_1 y_2 W_1^{-1}$ setzen, so ist $W_1 = 2\eta$, $\chi \,.\, f_1' - \eta^{-1} \,.\, hh' \to 0$. Falls $\limsup |hh'| < \eta$ ist, so haben wir $\limsup |f_1'| < 1$, so dass die Gleichung (73) regelmässig ist ([2], Definition 12). Wegen (77) und $\int_a^\infty h^2 |A_1 - A| = \int_a^\infty |\psi h^{-2} + hh'' - Ah^2| < \infty$ ist $\int_a^\infty y_1 y_2 |A_1 - A| <$

$< \infty$. Nach [2], Satz 20 hat also die Gleichung (28) ein Fundamentalsystem z_1, z_2 mit $z_i \sim y_i$; ist (73) regelmässig, so gilt auch $z_i' \sim y_i'$. Daraus folgt leicht unsere Behauptung.

24. Satz. *Es sei $A \in C_0$, $A > 0$ und $\int_a^\infty A^{1/2} = \infty$. Wenn es ein $h \in C_2$ mit $h > 0$, $\int_a^\infty |hh''| < \infty$, $\int_a^\infty |\mathrm{d}(Ah^4)| < \infty$, $\lim Ah^4 > 0$ gibt, dann hat die Gleichung* (28) *ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit*

$$(78)\quad y_i(x) \sim A^{-1/4}(x) \,.\, \exp\left\{\varepsilon_i \int_a^x A^{1/2}\right\}, \quad y_i'(x) \sim \varepsilon_i A^{1/4}(x) \,.\, \exp\left\{\varepsilon_i \int_a^x A^{1/2}\right\}$$

$(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1)$; *$y_2$ ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Wenn wir $\psi = Ah^4$ setzen, so sehen wir, dass die Voraussetzungen von Satz 23 erfüllt sind und dass $G(x) = \int_a^x A^{1/2}$, $h \sim \eta^{1/2} \,.\, A^{-1/4}$ ist (G, η haben dieselbe Bedeutung wie in Satz 23). Nach [2], Lemma 26 ist $hh' \to 0$. Die Gleichung (28) hat demnach ein Fundamentalsystem z_1, z_2 mit $z_i \sim h \,.\, e^{\varepsilon_i G}$, $z_i' \sim \varepsilon_i \eta h^{-1} e^{\varepsilon_i G}$; z_2 ist eine Hauptlösung. Setzen wir schliesslich $y_i = z_i \,.\, \eta^{-1/2}$, so ist $y_i \sim \eta^{-1/2} \,.\, h \,.\, e^{\varepsilon_i G} \sim$ $\sim A^{-1/4} e^{\varepsilon_i G}$, $y_i' \sim \varepsilon_i \eta^{1/2} h^{-1} e^{\varepsilon_i G} \sim \varepsilon_i A^{1/4} e^{\varepsilon_i G}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Verschiedene hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von $\int_a^\infty |hh''| < \infty$ kann der Leser in [2], Lemma 26 und Satz 30 finden.

25. Satz. *Es gelte $A, B \in C_0$, $A, B > 0$, $A \sim B$ und $\int_a^\infty |A^{1/2} - B^{1/2}| < \infty$. Die Gleichung $Y'' = BY$ habe ein Fundamentalsystem Y_1, Y_2 mit*

$$(79)\quad Y_i(x) \sim B^{-1/4}(x) \,.\, \exp\left\{\varepsilon_i \int_a^x B^{1/2}\right\}, \quad Y_i'(x) \sim \varepsilon_i B^{1/4}(x) \,.\, \exp\left\{\varepsilon_i \int_a^x B^{1/2}\right\}$$

$(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1)$. *Dann ist $\int_a^\infty A^{1/2} = \infty$ und die Gleichung* (28) *hat ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit den Eigenschaften* (78); *y_2 ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Zunächst nehmen wir an, es sei $\int_a^\infty B^{1/2} < \infty$; wir wollen zu einem Widerspruch kommen. Wegen (79) gibt es dann positive Zahlen b, κ_1, κ_2 mit $\kappa_1 B^{-1/4} < Y_1$, $0 < Y_1' < \kappa_2 B^{1/4}$ in $\langle b, \infty)$. Daraus folgt $Y_1' Y_1^{-1} < \kappa_2 \kappa_1^{-1} B^{1/2}$; $\log Y_1$ und somit auch Y_1 ist daher beschränkt. Wegen $Y_1 > \kappa_1 B^{-1/4}$ gibt es ein $\kappa_3 > 0$ mit $\kappa_3 < B$, so dass doch $\int_a^\infty B^{1/2} = \infty$ ist. Weil nach Voraussetzung $\int_a^\infty |A^{1/2} - B^{1/2}| < \infty$ ist, erhalten wir jetzt $\int_a^\infty A^{1/2} = \infty$ und aus $Y_1(x) \,.\, Y_2^{-1}(x) \sim \exp\{2 \int_a^x B^{1/2}\} \to \infty$ folgt, dass Y_2 eine Hauptlösung ist ([2], Satz 7). Wegen $Y_1' Y_2 \sim 1$, $Y_1 Y_2' \sim -1$ gilt $(Y_1 Y_2)' = Y_1' Y_2 + Y_1 Y_2' \to 0$; die Gleichung $Y'' = BY$ ist daher regelmässig ([2], Definition 12). Ferner hat man $Y_1 Y_2(A - B) \sim B^{-1/2} \,.\, (A - B) = B^{-1/2} \,.$ $.\, (A^{1/2} + B^{1/2}) \,.\, (A^{1/2} - B^{1/2}) \sim 2(A^{1/2} - B^{1/2})$, also $\int_a^\infty |Y_1 Y_2(A - B)| < \infty$. Nach Satz 20 aus [2] hat die Gleichung (28) ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit $y_i \sim Y_i$, $y_i' \sim Y_i'$; y_2 ist eine Hauptlösung. Aus der Beziehung $\exp\{\int_a^x A^{1/2}\} \sim \kappa \exp\{\int_a^x B^{1/2}\}$ ergibt sich sofort unsere Behauptung.

Literatur

[1] *P. Hartman, A. Wintner:* Asymptotic integrations of linear differential equations. Amer. J. Math. *77* (1955), 45—86.

[2] *J. Mařík - M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x)\,y$ im nichtoszillatorischen Fall. Чех. мат. журнал *10* (*85*) (1960), 501—522.

[3] *И. М. Соболь:* Об уравнениях Риккати и приводимых к ним линейных уравнениях второго порядка. Докл. Акад. Наук *65* (1949), 275—278.

[4] *A. Wintner:* Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range. Duke Math. J. *15* (1948), 55—67.

Резюме

НЕКОЛЕБЛЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ОГО ПОРЯДКА

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага и МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

Пусть p, q — непрерывные функции в интервале $J = \langle a, \infty)$ и пусть $W(x) = \exp\{-\int_a^x p\}$. Скажем, что решение y уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

главно, если существует такое $b \geqq a$, что $y(x) \neq 0$ для всех $x \geqq b$ и что $\int_b^\infty Wy^{-2} = \infty$. Можно показать, что всякое неколеблющееся уравнение (1) имеет главное решение и что всяких два главных решения линейно зависимы. Легко можно убедиться, что подстановка

$$z = \delta y' y^{-1} - \gamma \tag{2}$$

переводит уравнение (1) в уравнение Риккати

$$\delta z' + z^2 + Pz + Q = 0\,, \tag{3}$$

где $P = p\delta - \delta' + 2\gamma$, $Q = q\delta^2 + \gamma^2 + p\gamma\delta + \gamma'\delta - \gamma\delta'$. Если y — главное решение уравнения (1) и если $y(x) \neq 0$ для всех $x \geqq b$, то функция (2) — наименьшая из всех решений уравнения (3), определенных в $\langle b, \infty)$.

На основании этих связей выведен ряд асимптотических оценок и асимптотических формул для решений уравнения (1). Приводим здесь только некоторые результаты, касающиеся уравнения

$$y'' = Ay\,. \tag{4}$$

Вместо $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ будем писать $f \to c$, $f \sim g$ (или $f(x) \sim g(x)$).

1. Пусть A — положительная функция с непрерывной производной в интервале J, $(A^{-1/2})' \to \lambda < \infty$. Пусть y_1, y_2 — независимые решения уравнения (4), y_2 — главное решение. Положим $H(x) = \int_a^x A^{1/2}$, $j(x) = x$. Тогда $H \to \infty$, $(j^2 A)^{-1} \to \lambda^2$; если $\lambda = 0$, то

$$\log |y_1| \sim \log |y_1'| \sim -\log |y_2| \sim -\log |y_2'| \sim H\,,$$

если $\lambda > 0$, то

$$\log |y_1| \sim -\log |y_2'| \sim \log j^{\xi}\,, \quad \log |y_1'| \sim -\log |y_2| \sim \log j^{\xi-1}\,,$$

где $\xi = \frac{1}{2}(1 + (1 + 4\lambda^{-2})^{1/2})$.

Пусть, далее, $\int_a^\infty |d(A^{-1/2})'| < \infty$; положим $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\sigma_i = \frac{1}{2}(\lambda + \varepsilon_i(\lambda^2 + 1)^{1/2})$. Тогда существуют такие c_1, c_2, что

$$y_i(x) \sim c_i \,.\, A^{-1/4}(x) \,.\, \exp\{\varepsilon_i \,.\, \int_a^x A^{1/2}(1 + \tfrac{1}{16}A'^2 A^{-3})^{1/2}\}\,,$$

$$y_i'(x) \sim \sigma_i \,.\, A^{1/2}(x) \,.\, y_i(x)\,.$$

2. Пусть A, B — непрерывные функции в интервале J. Пусть $Y'' = BY$ — неколеблющееся уравнение, Y_1, Y_2 — независимые решения этого уравнения, Y_2 — главное решение. Положим $W = Y_1'Y_2 - Y_1Y_2'$, $f = Y_1Y_2W^{-1}$, $F = (A - B)f^2$. Если $\liminf_{x\to\infty} F(x) > -\frac{1}{4}$, то и (4) — неколеблющееся уравнение. Предположим далее, что $\int_a^\infty |dF| < \infty$ и что существует конечный предел $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f \,.\, (A - B)$; пусть y_1, y_2 — независимые решения уравнения (4), y_2 — главное решение. Тогда $F \to 0$, и существуют такие c_1, c_2, что $y_i \sim c_i Y_i$, $y_i' y_i^{-1} = Y_i' Y_i^{-1} + o(f^{-1})$ $(i = 1, 2)$.