Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Rektorys

Die Lösung der gemischten Randwertaufgabe und des Problems mit einer Integralbedingung "im Ganzen" für eine nichtlineare parabolische Gleichung mit der Netzmethode

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 189–208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100562`

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

DIE LÖSUNG DER GEMISCHTEN RANDWERTAUFGABE UND DES PROBLEMS MIT EINER INTEGRALBEDINGUNG „IM GANZEN“ FÜR EINE NICHTLINEARE PARABOLISCHE GLEICHUNG MIT DER NETZMETHODE

KAREL REKTORYS, Praha

(Eingegangen am 2. März 1961)

Die vorliegende Arbeit ist im Grunde eine Anwendung der Ergebnisse der Arbeit [1] zur Lösung zweier Probleme der nichtlinearen Wärmeleitung.

I.

Beim Studium der Wärmeleitung in Betonmassiven stossen wir auf zwei charakteristische Probleme. Das erste ist die gemischte Randwertaufgabe für eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t, u)\,u + E(x, t, u) \tag{1}$$

auf einem Rechteck $\bar{Q} = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; \tau \rangle$, wobei auf den Seiten $t = 0$, $x = 1$ dieses Rechtecks die Randwertfunktionen vorgeschrieben sind und auf der Seite $x = 0$ die Newtonsche Bedingung des Wärmeüberganges (Kap. II) vorgeschrieben ist. Die Randbedingungen sind allgemein unstetig. Diese Aufgabe ist im Kapitel II gelöst, wobei wesentlich die Ergebnisse der Arbeit [1] benutzt werden.

Im Kapitel III wird das zweite charakteristische Problem, das Problem der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t, u, z) \tag{2}$$

mit der Integralbedingung

$$z(x, t) = \int_0^t D[x, \zeta, u(x, \zeta), z(x, \zeta)]\,d\zeta \tag{3}$$

gelöst. Diese Bedingung bedeutet physikalisch, dass die Intensität D der inneren Wärmequellen (Hydrationswärme) von der Menge der schon hydratierten Wärme abhängt, welche durch das Integral (3) gegeben ist.

In den Kapiteln II und III werden auf Grund der Ergebnisse des Kapitels III der Arbeit [1] beide Probleme nicht für die Gleichungen (1) und (2) gelöst, sondern für die entsprechenden quasilinearen Gleichungen.

II. LÖSUNG DER GEMISCHTEN RANDWERTAUFGABE

In diesem Kapitel wollen wir die gemischte Randwertaufgabe für die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t, u) u + D(x, t, u) \tag{4}$$

auf dem Rechteck

$$\bar{Q} = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; \tau \rangle \tag{5}$$

lösen. Dabei seien auf den Seiten $t = 0$, resp. $x = 1$ die Bedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{resp.} \quad u(1, t) = g(t) \tag{6}$$

vorgeschrieben, auf der Seite $x = 0$ sei die Newtonsche Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -ku, \tag{7}$$

d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ku, \tag{8}$$

vorgeschrieben. Wir setzen zuerst voraus, dass k eine positive Konstante ist (siehe Anmerkung 3).

Anmerkung 1. Die Newtonsche Bedingung in der Form (7), resp. (8) erhalten wir aus der gewöhnlichen Form

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -k[u - h(t)], \tag{8'}$$

wenn wir die Substitution $u = \bar{u} + h(t)$ benützen. Die transformierte Gleichung ist von demselben Typ und hat auch genügend glatte Koeffizienten, wenn $h(t)$ zwei Ableitungen auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ besitzt (zu unseren Zwecken genügt es, wenn $h'(t)$ auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ die Lipschitzsche Bedingung erfüllt).

Satz 1. (*Glatte Randbedingungen*). *Die Koeffizienten A, B, C, D der Gleichung* (4) *mögen dieselbe Bedingungen wie im Satz* 1 *der Arbeit* [1], *Kap.* II, *erfüllen. Die Funktion $f(x)$ habe auf dem Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ drei stetige Ableitungen, wovon die letztere auf dem Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ der Lipschitzschen Bedingung genügen möge; die Funktion $g(t)$ habe auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ zwei stetige Ableitungen; im Punkte $\langle 1; 0 \rangle$ gelte*

$$f(1) = g(0) \tag{9}$$

und

$$g'(0) = A[1; 0; f(1)] f''(1) + B[1; 0; f(1)] f'(1) + \\ + C[1; 0; f(1)] f(1) + D[1; 0; f(1)] . \tag{10}$$

Weiter sei

$$f(0) = 0 , \quad f'(0) = 0 \tag{11}$$

und für $x = 0$, $t = 0$, $u = 0$ *gelte weiter*

$$Af'''(0) + (A_x + B - kA) f''(0) + D_x - kD = 0 . \tag{12}$$

Dann existiert gerade eine Funktion $u(x, t)$, *welche auf dem Rechteck* $\bar{Q}$ *einschliesslich des Randes stetige Ableitungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial u}{\partial t} . \tag{13}$$

besitzt und das Problem (4), (6), (8) *löst.*

Ist $|f(x)| \leqq K$, $|g(t)| \leqq K$, so gilt für $|u(x, t)|$ die Abschätzung (6) aus [1], Kap. II.

Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung ist dem Beweis von Satz 1, [1] Kap. II, ähnlich. Der Unterschied $u = u_2 - u_1$ von zwei Lösungen mit den angeführten Eigenschaften erfüllt auf Q die Gleichung (14), [1], Kap. II, mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = 0 , \quad u(1, t) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = ku(0, t) . \tag{14}$$

Mit Hilfe der bekannten Substitution

$$u = e^{\varepsilon t} v \tag{15}$$

erzielen wir, dass der Koeffizient bei v in der Gleichung, welche der angeführten Gleichung (14) entspricht, negativ wird. Die Funktion v kann dann in Q weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum auf $\bar{Q}$ haben. Auf den Seiten $x = 1$, $t = 0$ ist $v = 0$. Auf der Seite $x = 0$ kann die Funktion v kein positives Maximum auf $\bar{Q}$ haben. Würde nämlich in irgendeinem Punkte $P(0; t_1)$ dieser Fall eintreten [also $v(0, t_1) > 0$], wäre in diesem Punkte $\partial v / \partial x \leqq 0$, was der letzten Bedingung (14) widerspricht. Auf gleiche Weise kommen wir zu einem Widerspruch, wenn wir voraussetzen, dass in irgendeinem Punkte $(0, t_2)$ die Funktion v ihr negatives Minimum auf $\bar{Q}$ erreicht.

Also ist $v \equiv 0$ in $\bar{Q}$ und daher auch $u \equiv 0$ in $\bar{Q}$, was wir beweisen sollten.

Die Gültigkeit der Abschätzung (6), [1], Kap. II, beweist man ähnlich wie in dem zitierten Kapitel. Es wird wieder der Umstand ausgenützt, dass die Funktion u, resp. die transformierte Funktion v kein positives Maximum resp. negatives Minimum auf $\bar{Q}$ auf dem Rande $x = 0$ erreichen kann.

Den Beweis der Existenz der Lösung führen wir ähnlich wie in Arbeit [1], Kap. II, mit Hilfe der Netzmethode durch. Die Gleichung (4) ersetzen wir durch die Differenzengleichung

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l} = A_{ik}\frac{\Delta^2 u_{ik}}{h} + B_{ik}\frac{\Delta u_{ik}}{h} + C_{ik}u_{ik} + D_{ik}\,. \tag{16}$$

Die Bedingung (8) auf der Seite $x = 0$ drücken wir in Differenzenform aus,

$$\frac{\Delta u_{0k}}{h} = \frac{u_{1k} - u_{0k}}{h} = ku_{0k}\,, \tag{17}$$

woraus wir (für bekannte u_{1k}) u_{0k} sofort eindeutig bestimmen können,

$$u_{0k} = \frac{u_{1k}}{1 + hk}\,. \tag{18}$$

Wir beweisen wieder wie in Arbeit [1], Kap. II, die gleichmässige Beschränktheit der Netzfunktion u_{ik} und der entsprechenden Differenzenquotienten:

Die gleichmässige Beschränktheit der Netzfunktion u_{ik} wird auf Grund des Beweisgedankens von Lemma 2, [1], Kap. II, bewiesen. Mit Hilfe der Substitution (29), [1], Kap. II, beweisen wir, dass wenn $|v_{ik}|$ in der k-ten Zeile durch die Konstante $M + a$ beschränkt ist, so wird $|v_{ik}|$ durch diese Konstante auch in jedem inneren Punkte der $(k + 1)$-ten Zeile beschränkt. Im Punkte $(1, t_{k+1})$ wird $|v_{ik}|$ durch diese Konstante auf Grund der Beschränktheit der Funktion $g(t)$ durch die Konstante K beschränkt, im Punkte $(0, t_{k+1})$ auf Grund der Gleichung (18): ist nämlich $u_{1,k+1} > 0$, so folgt aus Gleichung (18) $0 < u_{0,k+1} < u_{1,k+1}$, ist $u_{1,k+1} < 0$, so ist $u_{1,k+1} < < u_{0,k+1} < 0$ und dasselbe gilt auf Grund der Gleichung (15) für die Netzfunktion v_{ik}. Die weiteren Beweispunkte bleiben unverändert.

Auch der Beweis der Beschränktheit von

$$p_{ik} = \frac{\Delta u_{ik}}{h} \tag{19}$$

ist auf Grund von Lemma 3, [1], Kap. II, sehr einfach. In den Punkten auf $x = 0$ ist (19) auf Grund von (17) gleichmässig beschränkt, denn die rechte Seite von (17) ist mit Rücksicht auf die gleichmässige Beschränktheit der Netzfunktion u_{0k} beschränkt. Der weitere Beweisvorgang ist wiederum derselbe wie in [1], Kap. II.

Wir beweisen die Beschränktheit von

$$\frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2}\,. \tag{20}$$

Zu diesem Zwecke erweiterten wir das Netz auch auf die Punkte auf der Gerade $x = -h$ derart, dass die Gleichung (16) auch in den Punkten des Randes $x = 0$

erfüllt wird. Es ist also notwendig die Werte $u_{-1,k}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke differenzieren wir die Gleichung (17) nach t und teilen mit l,

$$\frac{\Delta q_{0k}}{h} = k q_{0k} \quad \left(q_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l} \right) \tag{21}$$

und für q_{0k} und $\Delta q_{0k}/h$ setzen wir aus (16) ein:

$$\begin{aligned} A_{1k} \frac{\Delta^3 u_{0k}}{h^3} + \left(A_x + A_u \frac{\Delta u_{0k}}{h} + B_{1k} \right) \frac{\Delta^2 u_{0k}}{h^2} + \left(B_x + B_u \frac{\Delta u_{0k}}{h} \right) \frac{\Delta u_{0k}}{h} + \\ + C_{1k} \frac{\Delta u_{0k}}{h} + \left(C_x + C_u \frac{\Delta u_{0k}}{h} \right) u_{0k} + \left(D_x + D_u \frac{\Delta u_{0k}}{h} \right) = \\ = k \left(A_{0k} \frac{\Delta^2 u_{0k}}{h^2} + B_{0k} \frac{\Delta u_{0k}}{h} + C_{0k} u_{0k} + D_{0k} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

(Dabei hängt k vor der letzten Klammer freilich mit dem Index der Funktion u_{ik} nicht zusammen.) Die Gleichung (22) bestimmt die Funktion $u_{-1,k}$ (für genügend kleine h) eindeutig. Es genügt die Gleichung mit der Zahl h^3 zu multiplizieren oder aus ihr $p_{-1,k}$ zu berechnen.

Wir differenzieren jetzt die Gleichung (16) zweimal in Bezug auf x. Wir erhalten die Differenzengleichung für

$$r_{ik} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} . \tag{23}$$

Von p_{ik} haben wir schon bewiesen, dass diese Funktion auf $\bar{Q}$ beschränkt ist, $|p_{ik}| < P$. Wir wenden die schon mehrmals benützte Substitution

$$p_{ik} = G(v_{ik}) \tag{24}$$

an, wobei $G(v)$ die Funktion (61) aus [1], Kap. II, ist, wo wir P für H schrieben. Durch Benützung dieser Substitution beweisen wir wieder (siehe [1], Kap. II): Ist $R_{ik} = \Delta v_{ik}/h$ in der k-ten Zeile durch eine genügend grosse Konstante R_1 von oben beschränkt, so ist R_{ik} durch diese Konstante auch in jedem inneren Punkte der $(k + 1)$-ten Zeile beschränkt. Die (gleichmässige) Beschränktheit von R_{ik} auf der Seite $x = 1$ wird wie in [1], Kap II, durch Erweiterung des Netzes auf Punkte mit der X-Koordinate $x = 1 + h$ bewiesen.

Wir untersuchen den Verlauf von R_{ik} auf dem linken Rande, d.h. für die Punkte des Netzes, für welche $x = 0$ ist. Durch Differenzieren von (24) erhalten wir

$$r_{ik} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} = G' R_{ik} , \tag{25}$$

$$\frac{\Delta r_{ik}}{h} = \frac{\Delta^3 u_{ik}}{h^3} = G'' R_{ik}^2 + G' \frac{\Delta R_{ik}}{h} , \tag{26}$$

wobei die Werte G', G'' in den passenden Punkten zu nehmen sind. Durch Einsetzen von (25) und (26) in (22) erhalten wir für $i = 0$

$$(27) \qquad A_{1k}G' \frac{\Delta R_{0k}}{h} = -A_{1k}G''R_{0k}^2 + (kA_{0k} - A_x - A_u p_{0k} - B_{ik})\, G'R_{0k} + \dots .$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (27) steht ein quadratischer Ausdruck für R_{0k}, $\alpha_2 R_{0k}^2 + \alpha_1 R_{0k} + \alpha_0$, mit beschränkten Koeffizienten α_1, α_0 und einem scharf positiven Koeffizienten α_2 (denn es ist $A_{1k} >$ const. > 0, $G'' <$ const. < 0). Es existiert daher sicher eine bestimmte Zahl R_2 derart, dass die rechte Seite der Gleichung (27) für $R_{0k} \geqq R_2$ positiv ist, also ist $\Delta R_{0k}/h > 0$, woraus folgt, dass wenn $R_{0k} \geqq R_2$ ist, R_{0k} in der k-ten Zeile nicht der Maximalwert von R_{ik} sein kann.

Weil in der ersten Zeile die Funktion R_{ik} (für $k = 0$) gleichmässig auf Grund der Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ beschränkt ist, ist R_{ik} (für alle n) von oben in $\bar{Q}$ gleichmässig beschränkt.

Durch Anwendung der Substitution $p_{ik} = \bar{G}(v_{ik})$, wo $\bar{G}(v)$ eine so modifizierte Funktion $G(v)$ ist, dass in der Gleichung (61) aus [1], Kap. II, $-F$ statt F geschrieben wird (dadurch erreichen wir in der Gleichung (27) einen negativen Koeffizienten bei dem Glied R_{0k}^2), beweisen wir die gleichmässige Beschränktheit der Funktion R_{ik} von unten. Wir beobachten hierbei, dass wir E in der Gleichung (61) so klein wählen können, dass sich $G'(v)/\bar{G}'(v)$ auf dem Intervall $\langle -1; 1 \rangle$ beliebig wenig von Eins unterscheidet.

Also, ist R eine passend gewählte Konstante, so ist $|r_{ik}| \leqq R$ gleichmässig auf $\bar{Q}$ für alle n.

Aus (22) folgt auch die gleichmässige Beschränktheit des Gliedes

$$(29) \qquad \frac{\Delta^3 u_{0k}}{h^3},$$

also nach (16) auch die Beschränktheit von

$$(30) \qquad \frac{\Delta q_{0k}}{h}$$

auf der Seite $x = 0$ des Rechteckes $\bar{Q}$. Weil wir die gleichmässige Beschränktheit des Gliedes (30) in den inneren Punkten und für die Punkte mit der X-Koordinate $x = 1 - h$ beweisen können (siehe [1], Kap. II), haben wir auch die Beschränktheit des Differenzenquotienten

$$(31) \qquad \frac{\Delta q_{ik}}{h} = \frac{\Delta p_{ik}}{l}$$

auf $\bar{Q}$ bewiesen.

Durch einen ähnlichen Kunstgriff mit welchem wir die Beschränktheit von $\Delta^2 u_{ik}/h^2$ auf $\bar{Q}$ bewiesen haben, beweisen wir auch die Beschränktheit von

$$(32) \qquad \frac{\Delta q_{ik}}{h^2}$$

und dadurch auch die Beschränktheit des Quotienten

$$\frac{\Delta q_{ik}}{l} \tag{33}$$

auf $\bar{Q}$. Einzelheiten führen wir nicht an; es wird die Bedingung (12) wesentlich angewendet, welche für $t = 0$ die gleichmässige Beschränktheit der Differenz

$$\frac{\Delta^4 u_{1,0}}{h^4} \tag{34}$$

und dadurch auch der Differenz

$$\frac{\Delta^2 q_{1,0}}{h^2} \tag{35}$$

garantiert. Aus der Beschränktheit der angeführten Differenzen folgt nun schon auf bekannte Weise die Behauptung unseres Satzes.

Anmerkung 2. Zu dem Problem mit genügend glatten Randwertbedingungen können wir dieselben Anmerkungen über die Voraussetzungen von den Koeffizienten der Gleichung (4) wie in [1], Kap. II (Anmerkung 6) machen.

Anmerkung 3. Wie aus dem Beweis zu sehen ist, kommt man zu keinen Schwierigkeiten, wenn in der Bedingung (8) k nicht eine Konstante ist, sondern wenn auf der rechten Seite der Gleichung (8) resp. (8'), die Funktion $f(t, u)$, welche eine ansteigende Funktion der Veränderlichen u ist, steht.

Satz 2. (*Unstetige Randbedingungen.*) *Die Voraussetzungen über die Koeffizienten A, B, C, D der Gleichung* (4) *seien dieselben. Die Funktionen $f(x)$ und $g(t)$ seien auf dem Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ resp. $\langle 0; \tau \rangle$ stückweise stetig, die Funktion $h(t)$ (siehe Gleichung* (8')) *habe auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ eine stetige Ableitung.* (*In den Punkten* (0; 0) *und* (0; 1) *machen wir keine speziellen Voraussetzungen.*) *Dann existiert in Q gerade eine beschränkte Lösung $u(x, t)$ der Gleichung* (4), *welche zu den Funktionen $f(x)$ resp. $g(t)$ in jedem Punkt, in dem sie stetig sind, stetig fortsetzbar ist, welche auf dem Rande $x = 0$ für $t > 0$ eine stetige Ableitung*

$$\frac{\partial u}{\partial x} \tag{36}$$

besitzt und die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k[u - h(t)] \tag{37}$$

erfüllt. (Ist $f(x) \leqq K$, $|g(t)| \leqq K$, $|h(t)| \leqq K$ so gilt für $u(x, t)$ die Abschätzung (6) aus [1], Kap. II).

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung bei glatten Randbedingungen (Satz 1) mit Hilfe der Methode der Arbeit [2]. Die Existenz der

Lösung beweisen wir ähnlich wie in [1], Kap. II: Wir bilden eine Folge der Funktionen $u_m(x, t)$, welche den glatten Randbedingungen

$$f_m(x)\,, \quad g_m(t)\,, \quad h_m(t)\,, \tag{38}$$

die die Funktionen $f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ (im Sinne der lokal gleichmässigen Konvergenz) approximieren, und den Mittelwertfunktionen A_m, B_m, C_m, D_m entsprechen. Wir beweisen, dass die Folge $u_m(x, t)$ zu der gesuchten Lösung konvergiert. Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst die gleichmässige Beschränktheit der Ableitungen

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial t}\,, \quad \frac{\partial^3 u_m}{\partial x^3}\,, \quad \frac{\partial^3 u_m}{\partial x^2\,\partial t} \tag{39}$$

auf einem beliebigen in Q liegendem Rechteck $\bar{Q}_0$ mit den den Koordinatenachsen parallelen Seiten. Wir beweisen weiter, dass die Bedingung (37) erfüllt ist. Die Erfüllung der Randbedingungen auf $x = 1$, $t = 0$ werden wir nicht beweisen (dies wird durch die bekannte Barriermethode leicht gezeigt).

Wir führen den Beweis der Beschränktheit der Ableitungen (39) ähnlich wie in [1], Kap. II, nur mit dem Unterschied, dass wir die Funktion $g(x)$ in der Gleichung (105) gleich Eins für alle $x \leqq 1 - 2\delta$ setzen (also nicht gleich Null für $0 \leqq x \leqq \delta$ wie dies der Fall in [1] war; wir merken noch an, dass die Funktion $g(x)$ nicht mit der Funktion $g(t)$ zusammenhängt).

Wir bezeichnen

$$\bar{Q}_1 = \langle 0;\ 1 - \delta \rangle \times \langle 0;\ \tau \rangle\,. \tag{40}$$

Durch die Substitution

$$u_m = G(v_m) = G\left(\frac{w_m}{tg}\right)$$

und durch Differenzieren der Gleichung (4) (für u_m) erhalten wir eine Gleichung für

$$\frac{\partial w_m}{\partial x} \tag{41}$$

(vgl. Gleichung (106), [1], Kap. II), welche in Q_1 bei Nullrandbedingungen für $\partial w_m / \partial x$ auf den Seiten $x = 1 - \delta$ und $t = 0$ und der Bedingung

$$G' \frac{\partial w_m}{\partial x} = kt[u_m - h(t)] \tag{42}$$

auf der Seite $x = 0$ gilt. Aus (42) folgt die Beschränktheit auf der Seite $x = 0$; die Beschränktheit auf Q_1 folgt aus der Gleichung für $\partial w_m / \partial x$ auf ähnliche Weise wie in [1], Kap. II. Also wird die Funktion $\partial u_m / \partial x$ (gleichmässig in Bezug auf m, unabhängig von der Glattheit der Randbedingungen) auf dem Rechteck

$$\bar{Q}_2 = \langle 0;\ 1 - 2\delta \rangle \times \langle t_0;\ \tau \rangle\,, \quad t_0 > 0\,, \tag{43}$$

beschränkt sein. Durch Anwendung der Substitution

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = G\left(\frac{y_m}{(t - t_0)\, g(x)}\right), \tag{44}$$

wobei die Funktion G die Funktion (61) aus [1], Kap. II ist, beweisen wir die Beschränktheit der Funktion

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \tag{45}$$

auf dem Rechteck $\bar{Q}_3 = \langle 0;\ 1 - 4\delta \rangle \times \langle t_1;\ \tau \rangle$, $t_1 > t_0$, von oben; dabei gilt $g(x) \equiv 0$ auf dem Intervall $\langle 1 - 3\delta,\ 1 \rangle$ und $g(x) \equiv 1$ für $0 \leqq x \leqq 1 - 4\delta$:

Wir wollen zuerst die Punkte auf dem Rande $x = 0$ untersuchen. Die Funktion (44) hat in der Umgebung des Randes $x = 0$ die Form

$$G\left(\frac{y_m}{t - t_0}\right).$$

Durch Differenzieren der Randbedingung (37) nach t und durch Einsetzen aus Gleichung (4) (mit den Koeffizienten A_m, B_m, C_m, D_m) erhalten wir auf dem Rande $x = 0$ die Bedingung

$$\begin{aligned} A_m \frac{\partial^3 u_m}{\partial x^3} &+ (A_{mx} + A_{mu} p_m + B_m) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \\ &+ (B_{mx} + B_{mu} p_m + C_m) \frac{\partial u_m}{\partial x} + (C_{mx} + C_{mu} p_m)\, u_m + \\ &+ D_{mx} + D_{mu} p_m = k \left[A_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + B_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + C_m u_m + D_m - h'(t) \right]. \end{aligned} \tag{46}$$

Wenn wir (44) in (46) einsetzen und $\partial y_m / \partial x = R_m$ bezeichnen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$A_m G' \frac{1}{t - t_0} \frac{\partial R_m}{\partial x} = \frac{1}{(t - t_0)^2} (- A_m G'' R_m^2 + \alpha_1 R_m + \alpha_0), \tag{47}$$

wobei die Koeffizienten α_1, α_0 beschränkt (unabhängig von m) sind. Weil $-A_m G'' >$ $>$ const. > 0 ist, ist für genügend grosse R_m ($R_m \geqq R_1$)

$$\frac{\partial R_m}{\partial x} > 0, \tag{48}$$

also, wenn in dem Punkte $(0;\ t)$ $R_m \geqq R_1$ ist, kann in diesem Punkte R_m nicht maximal auf $\bar{Q}_3$ sein. Die Beschränktheit der Funktion R_m von oben innerhalb von $\bar{Q}_3$ beweist man auf gleiche Weise wie in dem vorhergehenden Fall [1], Kap. II.

Für die Beschränktheit von unten wenden wir wieder die Funktion (44) an, wobei diesmal $G(v)$ die Funktion (61) aus [1], Kap. II, vorstellt, wo wir $-F$ statt F schreiben. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} = G' \frac{1}{t - t_0} R_m$$

folgt dann die gleichmässige Beschränktheit von $\partial^2 u_m / \partial x^2$ auf $\bar{Q}_3$.

Aus (47) folgt dann die gleichmässige Beschränktheit von $\partial^3 u_m / \partial x^3$ auf $x = 0$, $t \in \langle t_1; \tau \rangle$ und dadurch die gleichmässige Beschränktheit auf $x = 0$, $t \in \langle t_1; \tau \rangle$ der Ableitung

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x \, \partial t}. \tag{49}$$

Weil die Beschränktheit der Ableitung (49) in den übrigen Punkten des Rechtecks

$$\bar{Q}_4 = \langle 0; 1 - 6\delta \rangle \times \langle t_2; \tau \rangle, \quad t_2 > t_1 \tag{50}$$

in gleicher Weise wie früher bewiesen werden kann, haben wir auf $\bar{Q}_4$ die Beschränktheit der Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial x \, \partial t} \tag{51}$$

sichergestellt. Die gleichmässige Beschräntkheit der Ableitung

$$\frac{\partial^3 u_m}{\partial t \, \partial x^2} \tag{52}$$

auf dem Rechteck

$$\bar{Q}_0 = \langle 2\delta; 1 - 8\delta \rangle \times \langle t_3; \tau \rangle, \quad t_3 > t_2 \tag{53}$$

wird auf gleiche Weise wie im vorhergehenden bewiesen.

Hiermit ist bewiesen, dass wir aus der Funktionenfolge $u_m(x, t)$ eine Folge auswählen können, welche auf $\bar{Q}_0$ einschliesslich u_{mx}, u_{mt}, u_{mxx} gleichmässig konvergiert. Die Grenzwertfunktion wird in $\bar{Q}_0$ die Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \tag{54}$$

besitzen und in $\bar{Q}_0$ die Gleichung (4) erfüllen. Weil dieser Schluss für alle Rechtecke $\bar{Q}_0$ gilt, wird $u(x, t)$ die Lösung der Gleichung in Q sein. Weil weiter in $\bar{Q}_4$ die Ableitungen (51) gleichmässig beschränkt sind, wird die Funktion $u(x, t)$ auf $x = 0$ für $t > 0$ eine Ableitung $\partial u / \partial x$ haben, welche offenbar die Bedingung $\partial u / \partial x = k[u - h(t)]$ erfüllt. Hiermit ist der Beweis von Satz 2 gebracht.

Anmerkung 4. Der in Anmerkung 3 angeführte Fall bildet keine Schwierigkeiten.

Anmerkung 5. Aus dem vorhergehenden folgt die Anwendbarkeit der Netzmethode zur Lösung der gemischten Randwertaufgabe. Für glatte Randbedingungen

(Satz 1) konvergiert die Folge der Netzfunktionen $u_m(x, t)$ gleichmässig auf $\bar{Q}$, für nichtstetige Randbedingungen (Satz 2) gleichmässig auf jedem Rechteck $\bar{Q}'$, $\bar{Q}' = \langle 0; 1 - a\rangle \times \langle t'; \tau\rangle$, wo $0 < a < 1$, $t' > 0$ ist. Also gleicherweise wie in [1], Kap. II gilt:

Satz 3. *Die Netzmethode für das gemischte Randwertproblem konvergiert.*

III. DIE LÖSUNG DES QUASILINEAREN PROBLEMS MIT EINER INTEGRALBEDINGUNG

Wir lösen die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t, u, z) \tag{1}$$

mit der Integralbedingung

$$z = \int_0^t C[x, \zeta, u(x, \zeta), z(x, \zeta)]\,\mathrm{d}\zeta\,. \tag{2}$$

Auf den Seiten des Rechteckes $\bar{Q} = \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; \tau\rangle$ seien die Randbedingungen

$$u(x, 0) = f(x)\,,\quad u(0; t) = g(t)\,,\quad u(1, t) = h(t) \tag{3}$$

vorgeschrieben. Wir setzen voraus, dass für alle $(x, t) \in \bar{Q}$, $u \in (-\infty, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$ $|C| \leqq \gamma$ gilt. Es sei weiter für alle $(x, t) \in \bar{Q}$, $u \in (-\infty, \infty)$, $A > 0$. Weiter sei $|f(x)| \leqq$ $\leqq K$, $|g(t)| \leqq K$, $|h(t)| \leqq K$. Wir bezeichnen $\max(K, \gamma) = M$. Dann, wenn eine in $\bar{Q}$ stetige Lösung $u(x, t)$, $z(x, t)$ des Problems (1), (2), (3) existiert, ist (vgl. Lemma 1, [1], Kap. II)

$$|u(x, t)| = Me^\tau \tag{4}$$

und offensichtlich

$$|z(x, t)| \leqq \gamma\tau = c\,. \tag{5}$$

(Es ist wieder zu sehen, dass die Bedingung unendlicher Intervalle durch eine schwächere Bedingung ersetzt werden kann.) Wir bezeichnen

$$R \times \langle -c, c\rangle = S\,. \tag{6}$$

Satz 1. (*Glatte Randbedingungen.*) *Die Funktionen A, B und die Funktionen* (3) *mögen die gleichen Voraussetzungen wie im Satz* 1, [1], Kap. II *erfüllen. Weiter seien die Funktionen*

$$C,\ C_x,\ C_t,\ C_u,\ C_z,\ C_{xx},\ C_{tx},\ C_{tu},\ C_{tz},\ C_{uu},\ C_{zz},\ C_{xu},\ C_{xz},\ C_{uz} \tag{7}$$

in $\bar{S}$ stetig, wobei die letzten acht Funktionen die Lipschitzsche Bedingung in Bezug auf x, u, z erfüllen. Es gelte weiter

$$\begin{aligned} g'(0) &= A[0, 0, f(0)]\,f''(0) + B[0,0,f(0)]\,f'(0) + C[0, 0, f(0), 0]\,,\\ h'(0) &= A[1, 0, f(1)]\,f''(1) + B[1, 0, f(1)]\,f'(1) + C[1, 0, f(1), 0]\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Dann existiert gerade eine Lösung $u(x, t)$, $z(x, t)$ *des Problems* (1), (2), (3), *welche einschliesslich der Ableitungen*

$$(9)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

auf $\bar{Q}$ *stetig ist.* (Dabei sind nach dem vorangehenden die Ungleichungen (4), (5) erfüllt.)

Beweis. A. Eindeutigkeit der Lösung. Betrachten wir zwei Funktionenpaare

$$u_1(x, t), \; z_1(x, t) \; ; \quad u_2(x, t), \; z_2(x, t)$$

mit den angeführten Eigenschaften. Wir bezeichnen

$$(10)\qquad u = u_2 - u_1 \, , \quad z = z_2 - z_1 \, .$$

Die Gleichungen (1), (2) schreiben wir für das erste Paar in der Form

$$(11)\qquad F(x, t, u_1, u_{1t}, u_{1x}, u_{1xx}, z_1) = 0 \, ,$$

$$(12)\qquad z_1 = \int_0^t C[x, \zeta, u_1(x, \zeta), z_1(x, \zeta)] \, \mathrm{d}\zeta \, ,$$

für das zweite Paar in der Form

$$(13)\qquad F(x, t, u_2, u_{2t}, u_{2x}, u_{2xx}, z_2) = 0 \, ,$$

$$(14)\qquad z_2 = \int_0^t C[x, \zeta, u_2(x, \zeta), z_2(x, \zeta)] \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

Wenn wir nun die Gleichung (11) von der Gleichung (13) und die Gleichung (12) von der Gleichung (14) subtrahieren, erhalten wir Gleichungen für u, z:

$$(15)\qquad \frac{\partial F}{\partial u} u + \frac{\partial F}{\partial u_t} u_t + \frac{\partial F}{\partial u_x} u_x + \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} u_{xx} + \frac{\partial F}{\partial z} z = 0 \, ,$$

$$(16)\qquad z = \int_0^t \left(\frac{\partial C}{\partial u} u + \frac{\partial C}{\partial z} z \right) \mathrm{d}\zeta \, ,$$

wobei die Ableitungen der Funktionen F und C nach dem Mittelwertsatz für geeignete Werte $u, u_x, \dots$ zu nehmen sind. Es ist

$$(17)\qquad \frac{\partial F}{\partial u_t} = 1 \, , \quad \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = -A \, , \quad \frac{\partial F}{\partial u_x} = -B \, ,$$

$$(18)\qquad \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| \leqq \alpha_1 \, , \quad \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial C}{\partial z} \right| \leqq \alpha_2 , \quad \left| \frac{\partial C}{\partial u} \right| \leqq \alpha_3 \, ,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ geeignete Konstanten sind; die Ableitungen $\partial C/\partial z$, $\partial C/\partial u$ sind beschränkt nach den Voraussetzungen über die Funktion C, die Ableitung $\partial F/\partial u$ ist beschränkt nach den Voraussetzungen über die Koeffizienten A, B und über die

Beschränktheit der Ableitungen der Lösung auf $\bar{Q}$. Die Funktion u erfüllt die Nullrandbedingungen, $z(x, 0) = 0$.

Wir behaupten nun, dass

$$u(x, t) \equiv 0 , \quad z(x, t) \equiv 0 \quad \text{auf} \quad \bar{Q} \tag{19}$$

gilt. Wir bezeichnen $\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{\alpha}$, so dass

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \leqq \bar{\alpha} . \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial C}{\partial z}\right| \leqq \bar{\alpha} , \quad \left|\frac{\partial C}{\partial u}\right| \leqq \bar{\alpha} \tag{20}$$

gilt. Die Gleichung (15) überschreiben wir auf die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Du + Ez \tag{21}$$

und führen die Funktion v mit Hilfe der Substitution

$$u = e^{\varepsilon t} v \tag{22}$$

ein, wobei $\varepsilon = 2\bar{\alpha}$ ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial v}{\partial x} + D'v + Ee^{-\varepsilon t} z , \tag{23}$$

$$z = \int_0^t (Fv + Gz) \, \mathrm{d}\zeta , \tag{24}$$

wobei wir $F = (\partial C/\partial u) \, e^{\varepsilon t}$, $G = \partial C/\partial z$ bezeichnet haben, also ist

$$|F| \leqq \bar{\alpha} e^{\varepsilon \tau} , \quad |F| + |G| \leqq \bar{\alpha} e^{\varepsilon \tau} + \bar{\alpha} = \beta . \tag{25}$$

Gleichzeitig ist

$$D' \leqq -\bar{\alpha} . \tag{26}$$

Wir wählen $t_1 > 0$ derart, dass

$$\beta t_1 < 1 \tag{27}$$

gilt und betrachten die Gleichungen (23), (24) auf dem Bereich

$$\bar{Q}_1 = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; t_1 \rangle \tag{28}$$

(mit Nullrandbedingungen für die Funktion v). Weil nach (4) und (5) die Funktionen u, z und daher auch die Funktionen v, z beschränkt sind,

$$|v| \leqq N , \quad |z| \leqq N , \tag{29}$$

ist nach (24)

$$|z(x, t)| \leqq \beta N t . \tag{30}$$

Hieraus folgt jedoch nach (26) und nach den bekannten Eigenschaften der Gleichung (23), dass

$$|v(x, t)| \leqq \beta N t \tag{31}$$

ist. (Denn die Voraussetzung, dass die Funktion $v(x, t)$ in irgendeinem Punkte aus Q ein positives Maximum erreicht, welches grösser als (31) ist, führt wegen (26) zum Widerspruch; ähnlich auch für ein negatives Minimum.)

Die Funktion $v(x, t)$ möge auf $\bar{Q}_1$ ihr positives Maximum $v_0 > 0$ im Punkte $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_1$ erreichen. (Dieses Maximum ist nach (31) nicht grösser als $\beta N t_1$). Wenn wir (30) und (31) in Erwägung ziehen, so folgt aus (24) $|z(x, t)| \leqq N\beta^2 \cdot \frac{1}{2}t^2$ und aus (23) wieder $|v(x, t) \leqq N\beta^2 \cdot \frac{1}{2}t^2$. Wenn wir diesen Vorgang mehrmals wiederholen, erhalten wir mit Rücksicht auf (27) das Ergebnis, dass $|v(x_0, t_0)|$ eine beliebig kleine Zahl ist, was einen Widerspruch mit der Voraussetzung $v_0 = \text{const.} > 0$ gibt. Derselbe Schluss gilt auch für ein negatives Minimum. Also ist auf $\bar{Q}_1$ $v(x, t) \equiv \equiv 0$, also auch $z(x, t) \equiv 0$. Hiermit ist der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung gebracht, denn der weitere Vorgang auf dem Rechteck Q (für das ganze Intervall $\langle 0, \tau \rangle$) ist offensichtlich.

Anmerkung 1. Aus dem angeführtem Vorgang folgt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randbedingungen im Sinne der Anmerkung 3, [1], Kap. II.

B. Beweis der Existenz der Lösung. Diesen Beweis führen wir wieder mit Hilfe der Netzmethode durch. Die Gleichungen (1) und (2) ersetzen wir durch die Gleichungen

$$q_{ik} = A_{ik} \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} + B_{ik} \frac{\Delta u_{ik}}{h} + C_{ik}\,, \tag{32}$$

wo $C_{ik} = C(x_i, t_k, u_{ik}, z_{ik})$,

$$z_{ik} = l \sum_{j=0}^{k-1} C(x_i, t_j, u_{ij}, z_{ij})\,. \tag{33}$$

In der nullten Zeile ist $z_{i0} \equiv 0$, in der ersten ist $z_{i1} = lC(x_i, t_0, u_{i0}, z_{i0})$ $(t_0 = 0)$, weiter $z_{i2} = l[C(x_i, t_0, u_{i0}, z_{i0}) + C(x_i, t_1, u_{i1}, z_{i1})]$ usw.; also ist

$$z_{i,k+1} = z_{ik} + lC(x_i, t_k, u_{ik}, z_{ik})\,. \tag{34}$$

Unser Ziel ist es wiederum die gleichmässige (unabhängig von der Wahl des Netzes S_n) Beschränktheit der Funktionen u_{ik}, z_{ik} und ihrer Differenzenquotienten zu beweisen.

Lemma 1. *Die Netzfunktionen u_{ik}, z_{ik} sind auf $\bar{Q}$ gleichmässig beschränkt. Für alle Netze S_n mit einem Index grösserem als n_0 ist die Funktion u_{ik} durch die Konstante* (28), [1], Kap. II, *beschränkt, wobei es genügt $\varepsilon = 1$ zu setzen, die Funktion z_{ik} wird durch die Konstante $\gamma\tau$ beschränkt.*

Beweis. Für die Funktion u_{ik} ist der Beweis eine fast wörtliche Wiederholung des Beweises von Lemma 2, [1], Kap. II; für die Funktion z_{ik} ist der Beweis trivial.

Lemma 2. *Es existiert eine von den Koeffizienten der Gleichung* (1) *und den Randbedingungen abhängige, von n unabhängige Konstante P derart, dass für alle Netze S_n, für die n grösser als eine genügend grosse Zahl n_1 ist, $|p_{ik}| = |\Delta u_{ik}/h| \leqq P$ ist.*

Beweis. Wir beobachten zuerst einmal folgenden Umstand: Nach (33), (34) ist (wenn wir

(35) $$\frac{\Delta z_{ik}}{h} = Z_{ik}$$

bezeichnen)

$$Z_{i0} = 0\,, \quad Z_{i1} = l(C_x + C_u p_{i0} + C_z Z_{i0})$$

(wobei die Werte C_x usw. in passenden Punkten ausgewertet werden müssen),

(36) $$\begin{aligned} Z_{i2} &= Z_{i1} + l(C_x + C_u p_{i1} + C_z Z_{i1})\,, \\ &\vdots \\ Z_{i,k+1} &= Z_{ik} + l(C_x + C_u p_{ik} + C_z Z_{ik})\,. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus (36) führen wir folgenden Schluss leicht ab: Ist $|p_{ik}| \leqq T$, dann ist

(37) $$|Z_{i,k+1}| \leqq a_1 T + b_1$$

wobei a_1, b_1 (positive) von den Koefizienten C und seinen Ableitungen abhängige, von k und dem Netze S_n unabhängige Zahlen sind. Wir bezeichnen

(38) $$|C_x| \leqq \bar{\gamma}\,, \quad |C_u| \leqq \bar{\gamma}\,, \quad |C_z| \leqq \bar{\gamma} \quad \text{auf} \quad \bar{S}\,,$$
$$\max |Z_{ik}| = Z_k\,.$$

Dann werden Z_k durch die Lösung der Gleichung

$$Y_{k+1} = Y_k + l(\bar{\gamma} + \bar{\gamma}T + \bar{\gamma}Y_k)\,, \quad Y_0 = 0\,,$$

d.h. der Gleichung

(39) $$\frac{Y_{k+1} - Y_k}{l} = \bar{\gamma}Y_k + \bar{\gamma}T + \bar{\gamma}$$

mit der Anfangsbedingung $Y_0 = 0$, majorisiert. Die Y_k werden jedoch bekanntlich durch die Lösung der Differentialgleichung

(40) $$Y' = \bar{\gamma}Y + \bar{\gamma}T + \bar{\gamma}\,,$$

(41) $$Y(0) = 0\,,$$

majorisiert. Die Lösung von (40) und (41) ist $Y = (T + 1)(e^{\bar{\gamma}t} - 1)$, was die Richtigkeit der Behauptung (37) bestätigt.

Weiter gehen wir wie bei dem Beweise von Lemma 3, [1], Kap. II, vor: Den Beweis dessen, dass die Funktion p_{ik} auf dem Rande gleichmässig (durch eine Konstante, welche wir P_0 bezeichen) beschränkt ist, ist wörtlich derselbe wie in dem zitierten Lemma. Was die Beschränktheit der Funktion p_{ik} in den inneren Punkten betrifft, ist es notwendig eine gewisse Modifikation in dem Beweise des zitierten Lemmas durchzuführen. Die rechte Seite der Gleichung (52), [1], Kap. II, in der wir für unseren Fall $C \equiv 0$ und statt D unsere Funktion C schreiben, wird ausser dem Glied $\Delta C_{ik}/h$ noch das Glied von der Form

(42) $$\frac{\partial C}{\partial z} \frac{\Delta Z_{ik}}{h}$$

enthalten. Nach (37) ist

$$\left|\frac{\partial C}{\partial z} \frac{\Delta Z_{ik}}{h}\right| \leqq \bar{\gamma}(a_1 T + b_1) . \tag{43}$$

Ohne Anwesendheit des Gliedes (42) haben wir bewiesen, dass eine solche Zahl P_3 gefunden werden kann, dass für $|P_{ik}| > P_3$ das absolute Glied der rechten Seite der Gleichung (75), [1], Kap. II, negativ wird, woraus mit Hilfe der Beweismethode von Lemma 2, [1], Kap. II, folgt, dass aus der Beziehung $|P_{ik}| \leqq P_3 + a_3$ in der k-ten Zeile (für genügend kleine h) die Beziehung $|P_{i\,k+1}| \leqq P_3 + a_3$ in der $(k + 1)$-ten Zeile folgt.

Wir wählen für unseren Fall P_3 so gross, dass das absolute Glied der rechten Seite der angeführten Gleichung (75) für $|P_{ik}| > P_3$ auch nach dem Hinzufügen des Gliedes $\bar{\gamma}[a_1 \max\limits_{-1 \leqq v \leqq 1} G'(v)\, 2P_3 + b_1]$, welches den Ausdruck (43) majorisiert, negativ wird. Dann gilt wieder

$$|P_{ik}| \leqq P_3 + a_3 \Rightarrow |P_{i,k+1}| \leqq P_3 + a_3 ,$$

woraus die gleichmässige Beschränktheit der Funktion p_{ik} und nach (37) auch der Funktion Z_{ik} folgt. Um die Beschränktheit der Funktionen

$$r_{ik} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} \quad \text{und} \quad V_{ik} = \frac{\Delta^2 Z_{ik}}{h^2}$$

zu zeigen, wenden wir denselben Vorgang an. Wir bemerken leicht, dass für die Funktion V_{ik} eine der Ungleichung (37) ähnliche Abschätzung gilt. Denn nach (34) gilt

$$V_{i,k+1} = V_{ik} + l(C_{xx} + 2C_{xu}p_{ik} + C_{uu}p_{ik}^2 + C_u r_{ik} + 2C_{xz}Z_{ik} + C_{zz}Z_{ik}^2 + \\ + 2C_{uz}p_{ik}Z_{ik} + C_z V_{ik}) .$$

Aus der bewiesenen (gleichmässigen) Beschränktheit der Funktionen p_{ik}, Z_{ik} erhalten wir leicht die lineare Abschätzung von der Form (37) für die Funktion $|V_{i,k+1}|$ in der Form $|V_{i,k+1}| \leqq a_2 V + b_2$, wobei $|r_{ik}| \leqq V$ ist, durch dessen Anwendung, auf gleiche Weise wie schon gezeigt, die gleichmässige Beschränktheit der Funktionen r_{ik} und V_{ik} folgt. Hiermit ist auch die (gleichmässige) Beschränktheit der Funktion q_{ik} bewiesen. Der weitere Vorgang nach dem Beweisvorgang des Satzes 1, [1], Kap. II, macht keine Schwierigkeiten, denn nach (34) ist $\Delta Z_{ik}/l = C_{ik}$. Damit ist Satz 1 bewiesen, denn der Beweis der Existenz der Ableitungen (9) aus der bewiesenen gleichmässigen Beschränktheit der Differenzenquotienten sowie der Erfüllung der Gleichungen (1), (2) und der Bedingungen (3) wird auf bekannte Art durchgeführt.

Anmerkung 2. Bei den vorausgesetzten glatten Randbedingungen können die Voraussetzungen auf die Glattheit der Koeffizienten der Gleichung abgeschwächt werden. Siehe Anmerkung 6, [1], Kap. II.

Satz 2. (*Unsteige Randbedingungen.*) *Die Funktionen A, B, C mögen die Voraussetzungen aus Satz 1 erfüllen. Die Funktionen $f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ seien stück-*

weise auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ *resp.* $\langle 0; \tau\rangle$ *stetig. (Die Erfüllung der Bedingungen* (8) *wird nicht gefordert.) Es sei*

$$|f(x) \leqq K\,, \quad |g(t)| \leqq K\,, \quad |h(t)| \leqq K\,. \tag{44}$$

Dann existiert in Q *gerade eine Lösung* $u(x, t)$, $z(x, t)$ *der Gleichungen* (1), (2), *welche in* Q *durch die Konstante* (4) *resp.* (5) *beschränkt ist, wobei die Funktion* $u(x, t)$ *zu den Werten der Randfunktionen in jedem Punkte, in welchem diese Funktionen stetig sind, stetig fortsetzbar ist.*

Beweis. Wir bilden eine Folge

$$u_1(x, t),\ u_2(x, t),\ \ldots,\ u_m(x, t),\ \ldots \tag{45}$$

$$z_1(x, t),\ z_2(x, t),\ \ldots,\ z_m(x, t),\ \ldots \tag{46}$$

von Lösungen der Gleichungen (1), (2), welche der Folge genügend glatter Randbedingungen

$$f_m(x),\ g_m(t),\ h_m(t) \tag{47}$$

entsprechen, welche (im Sinne der lokal gleichmässigen Konvergenz) die Randwertfunktionen $f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ approximieren, und der Folge der Mittelwertfunktionen A_m, B_m, C_m, D_m entsprechen.

Wir zeigen, dass die Folgen (45), (46) zu bestimmten Funktionen

$$u(x, t)\,, \quad z(x, t)\,, \tag{48}$$

welche die Lösung der Gleichung (1), (2) sind, konvergieren. Die Erfüllung der Randbedingungen im Sinne des Satzes 2 wird mit Hilfe der bekannten Barriermethode gezeigt. Die Abschätzung (4) resp. (5) folgt durch Grenzübergang, die Eindeutigkeit der Lösung mit Hilfe der in Arbeit [2] gezeigten Methode.

Die Funktionen (45), (46) sind gleichmässig beschränkt. Um zu beweisen, dass die Folgen (45), (46) zu den gesuchten Lösungen $u(x, t)$, $z(x, t)$ konvergieren, beweisen wir die gleichmässige Beschränktheit der Ableitungen

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t}\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{\partial z_m}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial z_m}{\partial t}\,, \quad \ldots$$

auf einem beliebig gewähltem Rechteck $\bar{Q}_0$, dessen Seiten mit den Koordinatenachsen parallel sind, und das in Q liegt. Der Beweis wird auf gleiche Weise wie der Beweis in Arbeit [1], Kap. II, durch Benützung der Funktionen von der Form (61) und (105) des angeführten Kapitels, geführt. Den ganzen Beweis wollen wir hier nicht wiederholen; weil jedoch in diesem Fall die Funktion $z_m(x, t)$ vorkommt, gibt es eine gewisse Abweichung von der angeführten Methode, durch welche wir die Beschränktheit der Funktion $|\partial u_m / \partial x|$ in einem inneren Punkte des betrachteten Bereiches beweisen. Darum zeigen wir diesen Schritt nun, auch wenn er sehr ähnlich der Differenzenanalogie aus Satz 1 ist.

Um einer komplizierten Bezeichnung auszuweichen, werden wir das Funktionenpaar $u_m(x, t)$, $z_m(x, t)$ für einen Augenblick ohne Index bezeichnen, also nur $u(x, t)$, $z(x, t)$. Diese Funktionen entsprechen den glatten Randbedingungen $f_m(x)$, $g_m(t)$, $h_m(t)$ und den Koeffizienten A_m, B_m, C_m, D_m. Wir führen leicht ab: Wenn

$$p_0 = \max_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \tag{49}$$

ist, so gilt

$$\max_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \leqq a_3 p_0 + b_3 \,, \tag{50}$$

wobei a_3, b_3 von m unabhängige Zahlen sind. Wir schreiben nämlich die Gleichung (2) in äquivalenter Form $\partial z/\partial t = C(x, t, u, z)$, $z(x, 0) = 0$. Hieraus bekommen wir, wenn wir $\partial u/\partial x = p$, $\partial z/\partial x = Z$ bezeichnen,

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = C_x + C_u p + C_z Z \,, \quad Z(x, 0) = 0 \,. \tag{51}$$

Offensichtlich ist $|Z|$ auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ durch die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \bar{\gamma} + \bar{\gamma} p_0 + \bar{\gamma} Y \,, \quad Y(x, 0) = 0 \,, \tag{52}$$

majorisiert, wobei $\bar{\gamma}$ das Maximum der Funktionen $|C_x|$, $|C_u|$, $|C_z|$ auf $\bar{S}$ bedeutet. Aus der Form der Lösung der Gleichung (52),

$$Y = (p_0 + 1)\,(e^{\bar{\gamma} t} - 1) \,, \tag{53}$$

folgt sofort (50).

Wir führen eine neue Funktion $v(x, t)$ durch die Substitution

$$u = G(v) \tag{54}$$

ein, wobei G die Funktion (61) aus Kap. II. der Arbeit [1] ist. Wir erhalten die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{G''}{G'} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + B \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{G'} C \,, \tag{55}$$

durch deren Ableitung wir die Gleichung für $P = \partial v/\partial x$ erhalten:

(56)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{G''}{G'} \right)' P^3 + 2 \frac{G''}{G'} P \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial u} G'P \right) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{G''}{G'} P^2 \right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} G'P \right) P + B \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{G'} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial u} G'P + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \frac{G''}{G'^2} CP \,,$$

oder

$$\frac{\partial P}{\partial t} - A\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \{.\}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[A\left(\frac{G''}{G'}\right)' + \frac{\partial A}{\partial u}G''\right]P^3 + \tag{57}$$

$$+ \alpha_1 P^2 + \alpha_2 P + \alpha_3 + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x},$$

wobei α_1, α_2, α_3 nur von den Koeffizienten der gegebenen Gleichung abhängen. Nach (65) und (62) der Arbeit [1], Kap. II, ist

$$A\left(\frac{G''}{G'}\right)' + \frac{\partial A}{\partial u}G'' = \frac{A}{G'}\left[G''' + \frac{\partial A/\partial u}{A}G'G'' - \frac{G''^2}{G'}\right] \leqq \varphi < 0\,, \tag{58}$$

wobei φ eine von x, t, u unabhängige Konstante ist (die Funktionen G', G'', G''' sind auf dem Intervall $\langle -1; 1\rangle$ stetig).

Es möge die Funktion $|P|$ auf $\bar{Q}$ ihr Maximum P_0 in dem Punkte $(x_0, t_0) \in Q$ erreichen. Wir zeigen, dass $P_0 \leqq \alpha^0$, wobei α^0 eine bestimmte Konstante ist, gilt. Aus der Beziehung $\max\limits_{Q} |P| \leqq P_0$ folgt $|p_0| \leqq P_0 \max\limits_{-1 \leqq v \leqq 1} G'(v) = kP_0$ (nach (61), [1], Kap. II), also ist

$$\left|\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x}\right| \leqq \bar{\gamma}(a_3 k P_0 + b_3)\,. \tag{59}$$

In dem Punkte (x_0, t_0) hat die Funktion P entweder ein positives Maximum oder negatives Minimum (wir setzen $P_0 \neq 0$ voraus, denn sonst ist der Fall trivial). Es sei also in (x_0, t_0) ein positives Maximum vorhanden. Wir behaupten nun, dass die Funktion P_0 nicht grösser als eine bestimmte von der Funktion G und den Koeffizienten der gegebenen Gleichung abhängige Konstante ist. Wirklich, wenn wir (59) erwägen, steht auf der rechten Seite der Gleichung (57) ein Polynom dritten Grades mit einem negativen Koeffizienten bei dem Glied mit dritter Potenz, so dass für genügend grosse P_0 die rechte Seite der Gleichung (57) negativ sein wird, während die linke Seite in dem Punkte (x_0, y_0) nicht negativ ist. Auf ähnliche Weise erhalten wir: Ist im Punkte $(x_0, y_0) \in Q$ ein negatives Minimum der Funktion P auf $\bar{Q}$ vorhanden, so kann P_0 wieder nicht zu gross sein. Auf gleiche Weise wird die Beschränktheit der übrigen Ableitungen bewiesen.

Zu dem Beweis der gleichmässigen Beschränktheit der Ableitungen der Funktionen $u_m(x, t)$, $z_m(x, t)$ (unabhängig von den Randbedingungen) genügt es, das eben angeführte Ergebnis, welches auf der Ungleichung (59) beruht, und die Funktionen vom Typ (105), [1], Kap. II, zu benutzen. Der Schluss ist dann wieder derselbe wie in Arbeit [1], Kap. II.

Aus dem vorhergehenden folgt wiederum:

Satz 3. *Die Netzmethode für das Problem mit der Integralbedingung konvergiert.*

Literatur

[1] *Rektorys K.:* Die Lösung des ersten Randwertproblems „im Ganzen“ für eine nichtlineare parabolische Gleichung mit der Netzmethode. Чехосл. мат. журнал, *12* (*87*), 1962, 69—103.

[2] *Rektorys K.:* Výpočet teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla. Rozpravy ČSAV, Řada mat. a přír., *14*, 1956, 1—74.

Резюме

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО МЕТОДУ СЕТОК „В ЦЕЛОМ“

КАРЕЛ РЕКТОРЫС (Karel Rektorys), Прага

В работе проводятся доказательства существования для смешанной краевой задачи для уравнения

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t, u)\,u + E(x, t, u)$$

и для первой краевой задачи для уравнения

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial z}{\partial x} + D(x, t, u, z)$$

с интегральным условием

$$(3)\qquad z(x, t) = \int_0^t D[x, \zeta, u(x, \zeta), z(x, \zeta)]\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Краевые условия, вообще говоря, разрывны. К решению этих двух проблем приводит исследование нелинейных вопросов теплопроводности в бетонных массивах.

Доказательства существования проводятся по методу сеток в целом, причем существенно используются результаты работы автора [1]. На основании этой работы вместо уравнений (1), (2) можно ограничиться рассмотрением квазилинейных уравнений.