Czechoslovak Mathematical Journal

František Šik

Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 611–621

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100544

ÜBER ADDITIVE UND ISOTONE FUNKTIONALE AUF GEORDNETEN GRUPPEN

František Šik, Brno

(Eingelangt am 29. November 1960)

Diese Abhandlung enthält die Lösung zweier Fragen: 1. Man untersucht Bedingungen, unter welchen ein von Null verschiedenes additives und isotones Funktional auf einer abelschen (teilweise) geordneten Gruppe (d. h. eine homomorphe und isotone Abbildung einer geordneten Gruppe in die linear geordnete additive Gruppe der reellen Zahlen) existiert.

2. Ist H eine Untergruppe einer abelschen geordneten Gruppe, f ein additives und isotones Funktional auf $H, f \not\equiv 0$, so wollen wir Bedingungen finden, unter welchen ein additives und isotones Funktional F auf der gegebenen Gruppe existiert, so dass die partielle Funktion F_H auf H mit f identisch ist. Die Lösung des zweiten Problems ist eine Folgerung der Lösung des ersten.

1. Unter dem Symbol (G, R) verstehen wir ein für allemal eine abelsche geordnete Gruppe (kurz: eine *po*-Gruppe), in der die Gruppenoperation additiv geschrieben wird, d.h. eine abelsche Gruppe G, in der eine das Nullelement nicht umfassende Teilhalbgruppe R definiert ist (wir wollen auch $R = \emptyset$ zulassen). Die Menge R nennen wir eine *Anordnung* der Gruppe G.[1]) Die Anordnung R heisst *linear*, wenn $G = R \cup - R \cup 0$ gilt bzw. *quasilinear*, wenn für die Menge G_∞ aller Elemente in G von unendlicher Ordnung $G_\infty = R \cup - R$ erfüllt ist. Die *po*-Gruppe (G, R) nennen wir in diesem Fall eine *linear* bzw. *quasilinear geordnete Gruppe*. Es sei bemerkt, dass jede Anordnung R der Gruppe G die Beziehung $R \cup - R \subseteq G_\infty$ befriedigt. Die Menge $\mathfrak{P}$ aller Anordnungen der Gruppe G, die mit Hilfe der mengentheoretischen Inklusion geordnet ist, besitzt das kleinste Element und zwar $\emptyset$. Gilt für zwei Elemente $R, S \in \mathfrak{P}$ $S \supseteq R$, so heisst S eine *Erweiterung* der Anordnung R. Das Zornsche Lemma garantiert für jedes Element $R \in \mathfrak{P}$ die Existenz eines maximalen Elements M der Menge $\mathfrak{P}$ mit $M \supseteq R$. Die Anordnung M nennen wir eine *maximale Erweiterung* der Anordnung R. Analog definiert man eine *lineare* bzw. *quasilineare Erweiterung* der Anordnung R.

Ist H eine Untergruppe der *po*-Gruppe (G, R), so ist die Konvexität der Untergruppe H in (G, R) — wie bekannt — notwendig und hinreichend dazu, dass die Faktor-

[1]) Für die Relation $x - y \in R$ bzw. $x - y \in R \cup 0$ benützt man oft das Zeichen $x > y$ bzw. $x \geqq y$.

gruppe G/H der Gruppe G mod H geordnet mit der Anordnung $(R + H)/H$ ist. Eine konvexe Untergruppe H in (G, R) heisst ein *p-Ideal*. (Eine Untergruppe H in (G, R) ist also ein p-Ideal, wenn aus $a, b \in H$, $x \in G$, $a > x > b$ die Relation $x \in H$ folgt.) Die geordnete Faktorgruppe $(G, R)/H$ nennen wir eine *p-Faktorgruppe*; ihre Anordnung $(R + H)/H$ bezeichnen wir kurz mit $R(H)$. Ist $R = \emptyset$, so verstehen wir unter $R(H)$ die leere Menge $\emptyset$. Das Zeichen P bedeutet im folgenden die Untergruppe aller Elemente in G von endlicher Ordnung. Ist $\mathfrak{N}$ ein System von Untermengen in G, so verstehen wir unter $\bigcup \mathfrak{N}$ die Vereinigung aller Untermengen, die zu $\mathfrak{N}$ gehören.

Hilfssatz 1.1. *H sei ein p-Ideal einer po-Gruppe (G, R).* a) *Ist N eine Erweiterung der Anordnung R, so ist $N(H)$ eine Erweiterung der Anordnung $R(H)$.*

b) Ist $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung der Anordnung $R(H)$, so ist $N = \bigcup \mathfrak{N}$ eine Erweiterung der Anordnung R und es gilt $N + H = N$, $\mathfrak{N} = N/H$.

Die Behauptungen sind offensichtlich.

Hilfssatz 1.2. *Ist L eine quasilineare Anordnung der Gruppe G, so ist $P + L = L$, $P - L = -L$.*

Beweis. Ist L eine quasilineare Anordnung, $x \in L$, a bzw. $x + a$ Elemente der Ordnungen m bzw. n, so gilt $0 = mnx + mna = mnx$ im Widerspruch zu $x \in L \subseteq G_\infty$. Daraus folgt $x + a \in G_\infty \subseteq L \cup - L$. Im Falle $x + a \in - L$ erhält man einen Widerspruch, nämlich $a \in - L - x \subseteq - L$. Es ist also $L + P \subseteq L$ und wegen $0 \in P$ gilt $L + P = L$. Daher ergibt sich $-L + P = - L$.

Hilfssatz 1.3. *Eine Anordnung L einer Gruppe G ist dann und nur dann quasilinear, wenn $L + P = L$ gilt und $L(P)$ eine lineare Anordnung der p-Faktorgruppe G/P ist.*

Beweis. Ist die Anordnung L quasilinear, so gilt nach Hilfssatz 1.2 $L + P = L$. Die Linearität der Anordnung $L(P)$ folgt daraus, dass für jedes von Null verschiedene Element $x + P \in G/P$ die Relationen $x \in G_\infty \subseteq L \cup - L$ erfüllt sind, woraus sich $x + P \in L(P) \cup - L(P)$ ergibt.

Umgekehrt, wenn die Bedingung des Satzes erfüllt ist und $x \in G_\infty$, so ist $x + P = P$, so dass $x + P \in L(P) \cup - L(P)$, $x \in (L + P) \cup - (L + P) = L \cup - L$ und $G_\infty \subseteq L \cup - L$ gilt.

Hilfssatz 1.4. *Eine Anordnung ist dann und nur dann maximal, wenn sie quasilinear ist.*

Beweis. Jede quasilineare Anordnung ist offensichtlich maximal.

Umgekehrt, wenn M eine maximale Anordnung der Gruppe G ist, so ist $M(P)$ nach Hilfssatz 1.1 eine maximale Anordnung auf G/P. Ist nämlich $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung zu $M(P)$, dann ist $M_1 = \bigcup \mathfrak{N}$ nach Hilfssatz 1.1 eine Erweiterung zu M und damit ist $M_1 = M$. Ferner gilt $M = M_1 = M_1 + P \supseteq M + P \supseteq M$. Daraus folgt $M + P = M$, und damit $M(P) = (M + P)/P = M_1/P = \mathfrak{N}$, d.h. $M(P)$ ist maximal.

Da nun G/P torsionsfrei ist, so ist $M(P)$ eine lineare Anordnung auf G/P ([2], Folgerung 1 zu Satz 3) und nach Hilfssatz 1.3 ist M eine quasilineare Anordnung auf G.

2. Unter einem *additiven und isotonen Funktional* (kurz: ein *ai-Funktional*) auf einer *po-Gruppe* (G, R) verstehen wir eine homomorphe und isotone Abbildung der *po*-Gruppe (G, R) in die linear geordnete additive Gruppe der reellen Zahlen, d. h. eine reelle Funktion f, für die gilt: $a, b \in G \Rightarrow f(a + b) = f(a) + f(b)$; $a \in R \Rightarrow \Rightarrow f(a) \geqq 0$. Die Menge aller *ai*-Funktionale auf der *po*-Gruppe (G, R) bezeichnen wir mit $\widetilde{(G, R)}$. Ist $f \in \widetilde{(G, R)}$, so sagt man auch, dass f ein *ai*-Funktional auf G bezüglich R ist.

Hilfssatz 2.1. *Ist $f \in \widetilde{(G, R)}$, dann existiert eine quasilineare Erweiterung L der Anordnung R, so dass $f \in \widetilde{(G, L)}$ gilt.*

Beweis. Mit Rücksicht darauf, dass $a \in P$ offenbar $f(a) = 0$ zur Folge hat, erhalten wir eine eindeutige Funktion F auf G/P, die ein *ai*-Funktional auf der *p*-Faktorgruppe $(G, R)/P$ wird, wenn wir für jedes $X \in G/P$ und für jedes $x \in X$ $F(X) = f(x)$ definieren. G/P ist eine torsionsfreie Gruppe, also nach [3], Hilfssatz 4 existiert eine lineare Erweiterung $\mathfrak{N}$ der Anordnung $R(P)$ so, dass $F \in \widetilde{(G/P, \mathfrak{N})}$ ist. Nach Hilfssatz 1.1 ist $L = \bigcup \mathfrak{N}$ eine maximale Erweiterung der Anordnung R, die nach Hilfssatz 1.4 quasilinear ist. Ist $x \in L$, so ist $x + P \in \mathfrak{N}$ und $0 \leqq F(x + P) = f(x)$. Damit gilt $f \in \widetilde{(G, L)}$.

Wie üblich, nennen wir ein Element a der *po*-Gruppe (G, R) *archimedisch*, wenn zu jedem beliebigen Element $b \in G$ eine ganze Zahl n existiert, so dass $b - na$ non $\in R$ gilt. Übrige Elemente der Gruppe G heissen nichtarchimedisch. Eine *po*-Gruppe (G, R) heisst archimedisch, wenn jedes Element aus G_∞ archimedisch ist.

Hilfssatz 2.2. *Ein Element a einer quasilinear geordneten Gruppe (G, L) ist dann und nur dann nichtarchimedisch, wenn ein $b \in L$ existiert, so dass für jedes ganze n $b - na \in L$ ist.*

Das ist eine offensichtliche Folgerung der Definition und des Hilfssatzes 1.2.

Hilfssatz 2.3. *Ein Element a einer quasilinear geordneten Gruppe (G, L) ist dann und nur dann archimedisch, wenn zu jedem $b \in G_\infty$ ein ganzes n mit $na - b \in L$ existiert.*

Beweis. Die Bedingung ist nach Hilfssatz 2.2 hinreichend. Zum Beweis der Notwendigkeit setzen wir voraus, dass für ein Element $a \in (G, L)$ die Bedingung des Satzes nicht erfüllt ist. Es gibt also ein $b \in G_\infty$, so dass für jedes ganze n die Beziehung $na - b$ non $\in L$, d. h. $na - b \in -L \cup P$, besteht. Setzen wir voraus, dass die Relation

$$na - b \in P \tag{2.1}$$

für $n = n_0$ gültig ist. Für die Elemente $A = a + P$, $B = b + P$ der linear geordneten Faktorgruppe G/P gilt $B = n_0 A$ und für jedes ganze n, $n \neq n_0$, ist $b - na \in L$ und somit $B > nA$. Im Falle $A > P$ ist $B > (n_0 + 1) A > n_0 A = B$, im Falle $A < P$ ist $B > (n_0 - 1) A > n_0 A = B$ und im Falle $A = P$ ist $a \in P$; daher und aus (2.1) folgt $- b \in P - n_0 a \subseteq P$. Der Widerspruch bestätigt, dass für jedes n die Beziehung $b - na \in L$ besteht. Somit ist a nichtarchimedisch.

Hilfssatz 2.4. *Für jedes nichtarchimedische Element a einer po-Gruppe (G, R) und für jedes $f \in \widetilde{(G, R)}$ gilt $f(a) = 0$.*

Beweis. Es existiert ein $b \in G$, so dass für jedes ganze n $b - na \in R$ und daher $f(b) \geqq nf(a)$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2.5. *Auf einer archimedischen linear geordneten Gruppe (G, L) existiert genau ein ai-Funktional, das auf einem gegebenen Element aus L einen gegebenen Wert annimmt.*

Folgerung. *Sind g, h ai-Funktionale auf einer archimedischen linear geordneten Gruppe, $h \neq 0$, dann existiert eine nichtnegative reelle Zahl γ, so dass $g = \gamma h$ ist.*

Beweis der Existenz. Es sei $x \in L$. Mit Hilfe des folgenden Verfahrens konstruieren wir ein ai-Funktional $f \in \widetilde{(G, L)}$, für welches $f(x) = 1$ gilt (siehe [1], XIV, § 7, Th. 15). Für jedes $y \in G$ bildet die Menge aller rationalen Zahlen $m/n (n > 0)$, für die $mx \leqq ny$ bzw. $mx > ny$ ist, die untere bzw. obere Klasse eines Schnittes α in der Menge aller rationalen Zahlen. Wenn wir $f(y) = \alpha$ vorgeben, dann ist $f \in \widetilde{(G, L)}$ und $f(x) = 1$. Ist $\beta \geqq 0$ eine reelle Zahl, dann hat die Gleichung $g = \beta f$ offenbar $g \in \widetilde{(G, L)}$, $g(x) = \beta$ zur Folge.

Beweis der Eindeutigkeit. Es sei $f, g \in \widetilde{(G, L)}$ und $f(x) = g(x) > 0$ für ein $x \in L$. Man kann $f(x) = 1$ voraussetzen. Es sei ein $y \in G$ gegeben. Ist $mx \leqq ny$ für ganze Zahlen m, n $(n > 0)$, so ist $mg(x) \leqq ng(y)$ und somit $m/n \leqq g(y)$. Ist $mx > ny$, so ist $g(y) < m/n$. Da die rationalen Zahlen m/n im ersten Falle die untere und im zweiten die obere Klasse eines Schnittes α bilden, so ist $g(y) = \alpha$. Damit ist $g = f$. Ist $g(x) = 0$, dann gilt $g(y) = 0$ für jedes $y \in G$. Das folgt aus der Tatsache, dass für jedes $y \in G$ ganze Zahlen n_1, n_2 mit $n_1 x \geqq y \geqq n_2 x$ existieren.

Beweis der Folgerung. Ist $g, h \in \widetilde{(G, L)}$, $h \neq 0$, dann für jedes $x \in L$ ist $g(x) \geqq 0$ und es existiert ein $x_0 \in L$ mit $h(x_0) > 0$. Es existiert also eine nichtnegative Zahl γ mit $g(x_0) = \gamma h(x_0)$. Aus Hilfssatz 2.5 folgt dann $g = \gamma h$.

Hilfssatz 2.6. *Auf einer quasilinear geordneten Gruppe (G, L) existiert genau ein ai-Funktional, das auf einem gegebenen archimedischen Element aus L einen gegebenen nichtnegativen Wert annimmt.*

Folgerung. *Sind g, h ai-Funktionale auf einer quasilinear geordneten Gruppe, $h \neq 0$, so existiert eine nichtnegative reelle Zahl γ mit $g = \gamma h$.*

Beweis. Wie man leicht einsehen kann, bildet die Menge T aller nichtarchimedischen Elemente in (G, L) ein p-Ideal und G/T ist eine archimedische linear geordnete Gruppe. Es sei eine reelle Zahl $\alpha \geqq 0$ und ein archimedisches Element $x_0 \in L$ ausgewählt. Nach Hilfssatz 2.5 existiert genau ein ai-Funktional F auf G/T, für das $F(x_0 + T) = \alpha$ ist. Definieren wir für ein beliebiges $y \in G$ $f(y) = F(y + T)$, dann ist $f \in \widetilde{(G, L)}$ und $f(x_0) = \alpha$. Ist ferner $h \in \widetilde{(G, L)}$, $h(x_0) = \alpha$, dann definiert die Gleichung $H(y + T) = h(y)$ eine eindeutige Funktion H auf G/T (Hilfssatz 2.4), die offensichtlich ein ai-Funktional auf G/T darstellt. Aus den Relationen $H(x_0 + T) = h(x_0) = f(x_0) = F(x_0 + T)$ folgt nach Hilfssatz 2.5 $H = F$, d.h. $h = f$.

3. Es sei (G, R) eine po-Gruppe, H eine ihrer Untergruppen. Die po-Gruppe (G, R) heisst *schwach konfinal* zu H (bezüglich R), wenn zu jedem $x \in G_\infty$ eine natürliche Zahl n und ein Element $a \in H$ mit $a - nx \in R \cup 0$ existiert. Eine po-Gruppe (G, R) heisst *konfinal* zu H (bezüglich R), wenn zu jedem $x \in G$ ein Element $a \in H$ mit $a - x \in R$ existiert.

Anmerkungen. 1. Wenn $G_\infty \neq \emptyset$ gilt, so lässt sich in der Definition der schwachen Konfinalität gleichwertig $x \in G$ statt $x \in G_\infty$ schreiben. Ist nämlich $x \in P$, so für ein beliebiges $y \in G_\infty$ ist $-y + x \in G_\infty$. Zu den Elementen $-y + x$ bzw. y existieren nach Voraussetzung Elemente $a \in H$ bzw. $b \in H$ und natürliche Zahlen n_1 bzw. n_2 mit $a - n_1(-y + x) \in R \cup 0$ bzw. $b - n_2 y \in R \cup 0$. Daraus folgt $n_2 a - n_1 n_2(-y + x) + n_1 b - n_1 n_2 y \in R \cup 0$ und damit $(n_2 a + n_1 b) - n_1 n_2 x \in R \cup 0$, $n_2 a + n_1 b \in H$.

2. Die Definitionsbedingung der schwachen Konfinalität kann man äquivalent auch folgenderweise erklären: Zu jedem $x \in G_\infty$ existieren Elemente $a, b \in H$ und eine natürliche Zahl n mit $a \geqq nx \geqq b$ (bezüglich R). Zu den Elementen x bzw. $-x$ existieren nämlich natürliche Zahlen n_1 bzw. n_2 und Elemente $a' \in H$ bzw. $b' \in H$, so dass $a' \geqq n_1 x$, $b' \geqq -n_2 x$ gilt; daraus folgt $n_2 a' \geqq n_2 n_1 x \geqq -n_1 b'$; die genannte Bedingung ist nun für $a = n_2 a'$, $b = n_1 b'$, $n = n_1 n_2$ erfüllt.

3. Die Ausführungen aus der Anmerkung 2 lassen sich auch für die Konfinalität durchführen.

4. Existiert auf (G, R) ein von Null verschiedenes ai-Funktional, so ist offensichtlich $G_\infty \neq \emptyset$.

Ist H eine Untergruppe einer po-Gruppe (G, R), f ein ai-Funktional auf $(H, H \cap R)$, so nennen wir ein ai-Funktional F auf (G, R) eine *Fortsetzung* des ai-Funktionals f (von H auf G bezüglich R), wenn es gilt: $a \in H \Rightarrow f(a) = F(a)$.

Satz 3.1. *H sei eine Untergruppe einer po-Gruppe (G, R), f ein von Null verschiedenes ai-Funktional auf $(H, H \cap R)$. Existiert eine Erweiterung S der Anordnung R der Gruppe G, so dass (G, S) schwach konfinal zu H und $f \in \widetilde{(H, H \cap S)}$ ist, so existiert eine Fortsetzung des Funktionals f von H auf G bezüglich R (auch bezüglich S und auch bezüglich L, wobei L eine geeignet ausgewählte quasilineare Erweiterung der Anordnung S darstellt).*

Beweis. S sei eine Erweiterung der Anordnung R der erwähnten Eigenschaften. Es existiert eine quasilineare Erweiterung S_1 der Anordnung $H \cap S$ der Gruppe H, so dass $f \in \widetilde{(H, S_1)}$ gilt (Hilfssatz 2.1). $S_2 = (S_1 + S) \cup S \cup S_1$ ist eine Erweiterung der Anordnung S der Gruppe G. In der Tat, S_2 ist offensichtlich eine Halbgruppe. Es bleibt zu beweisen, dass S_2 das Nullelement nicht enthält. Im entgegengesetzten Fall gilt offenbar $0 \in S + S_1$; demnach existieren Elemente $a \in S$, $b \in S_1$ mit $a + b = 0$. Aus $a \in H$ folgt $a \in H \cap S \subseteq S_1$ und somit $a + b \neq 0$. Aus a non $\in H$ ergibt sich $(a + b)$ non $\in H$ und daher $a + b \neq 0$. Folglich ist S_2 eine Anordnung in G und offenbar eine Erweiterung zu S. Ferner ist (G, S_2) schwach konfinal zu H und $f \in \widetilde{(H, H \cap S_2)}$. (Es gilt nämlich $S_2 \supseteq S_1$, $S_2 \cap H = S_1$.) Es existiert eine quasilineare Erweiterung L der Anordnung S_2 (Hilfssatz 1.4). Aus der Maximalität der Anordnung S_1 auf H und aus der Relation $L \cap H \supseteq S_1$ folgt $L \cap H = S_1$. Offenbar gilt $f \in \widetilde{(H, H \cap L)}$, und (G, L) ist schwach konfinal zu H. Nach der Annahme gibt es ein Element $a \in H$ mit $f(a) > 0$. Das Element a ist also archimedisch in $(H, H \cap L)$ (Hilfssatz 2.4). Ist das Element a nichtarchimedisch in (G, L), dann existiert ein $x \in L$, so dass für jedes ganze n $x - na \in L$ gilt (Hilfssatz 2.2). Aus der schwachen Konfinalität der Gruppe (G, L) zu H folgt die Existenz eines $b \in H$ und einer natürlichen Zahl n_0 mit $b - n_0 x \in L \cup 0$. Aus den Relationen $n_0 x - n_0 na \in L$, $b - n_0 na \in H$ und aus der vorhergehenden erhalten wir $b - n_0 na \in L \cap H$; es gilt also $f(b) \geqq n_0 n f(a)$ für jedes ganze n. Der Widerspruch bestätigt, dass a archimedisch in (G, L) ist. Nach Hilfssatz 2.6 existiert ein ai-Funktional F auf (G, L) mit $F(a) = f(a)$. Nach der Folgerung zu Hilfssatz 2.6 gilt $F(x) = f(x)$ für jedes $x \in H$, also F ist eine Fortsetzung des ai-Funktionals f von H auf G bezüglich L (und erst recht bezüglich S und R).

Satz 3.2. *H sei eine Untergruppe der po-Gruppe (G, R), f ein von Null verschiedenes ai-Funktional auf $(H, H \cap R)$. Existiert eine Fortsetzung F des ai-Funktionals f von H auf G bezüglich R, dann existiert eine quasilineare Erweiterung L der Anordnung R der Gruppe G, so dass $\widetilde{(G, L)}$ konfinal zu H und $F \in \widetilde{(G, L)}$ (und somit auch $f \in \widetilde{(H, H \cap L)}$) ist.*

Beweis. Sind genannte Voraussetzungen erfüllt, so existiert nach Hilfssatz 2.1 eine quasilineare Erweiterung L der Anordnung R mit $F \in \widetilde{(G, L)}$. Demnach ist auch $f \in \widetilde{(H, H \cap L)}$. Wenn ein Element $x \in G$ mit der Eigenschaft $a - x$ non $\in L$ für jedes $a \in H$ existierte, so wäre $F(a - x) \leqq 0$, $f(a) = F(a) \leqq F(x)$ für jedes $a \in H$. Das ergibt zufolge $f \neq 0$ einen Widerspruch. Es existiert also ein $a \in H$ mit $a - x \in L$.

Satz 3.3. *Existiert auf einer Untergruppe $(H, H \cap R)$ einer po-Gruppe (G, R) ein von Null verschiedenes ai-Funktional, dann existiert eine Erweiterung S der Anordnung R der Gruppe G, so dass gilt:*

Die po-Gruppe (G, S) ist dann und nur dann schwach konfinal zu H, wenn sie konfinal zu H ist. (Den Ausdruck „eine Erweiterung S" kann man äquivalent durch „eine quasilineare Erweiterung S" ersetzen).

In Sätzen 3.1 und 3.2 ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Fortsetzung eines ai-Funktionals f von H auf G gegeben. Ausdrücklich erklären wir die genannte Bedingung in dem folgenden Satz.

Satz 3.4. *H sei eine Untergruppe einer po-Gruppe* (G, R), $f \in \widetilde{(H, H \cap R)}$, $f \neq 0$. *Dann und nur dann existiert eine Fortsetzung des ai-Funktionals f von H auf G bezüglich R, wenn eine Erweiterung L der Anordnung R der Gruppe G existiert, so dass* (G, L) *konfinal zu H und* $f \in \widetilde{(H, H \cap L)}$ *ist.*

Anmerkung. Im Satze kann man „eine quasilineare Erweiterung L“ statt „eine Erweiterung L“ stellen. Unabhängig davon lässt sich „konfinal“ durch „schwach konfinal“ ersetzen.

4. Das Problem 2 ist durch den Satz 3.4 gelöst. Die Lösung des Problems 1 erhalten wir als eine Folgerung der vorangehenden Sätze.

Satz 4.1. *Existiert ein von Null verschiedenes ai-Funktional F auf einer po-Gruppe* (G, R), $F(a) \neq 0$ *für ein* $a \in G$, *dann existiert eine nichtleere quasilineare Erweiterung L der Anordnung R der Gruppe G, so dass* $F \in \widetilde{(G, L)}$ *gilt und zu jedem Elemente* $x \in G$ *eine ganze Zahl m mit* $ma - x \in L$ *existiert.*

Beweis. Es sei $F \in \widetilde{(G, R)}$, $F(a) \neq 0$. Auf der zyklischen von dem Element a erzeugten Untergruppe H stellt die partielle Funktion $F_H = f$ ein von Null verschiedenes *ai*-Funktional auf H bezüglich $H \cap R$ dar. F ist offensichtlich eine Fortsetzung des Funktionals f (von H auf G bezüglich R). Nach Satz 3.2 existiert eine quasilineare Erweiterung L der Anordnung R der Gruppe G, so dass $F \in \widetilde{(G, L)}$ und (G, L) konfinal zu H ist. Zu jedem $x \in G$ existiert also ein ganzes m mit $ma - x \in L$. Wäre $L = \emptyset$, so wäre auch $G_\infty = \emptyset$, $F = 0$ im Widerspruch mit der Voraussetzung.

Satz 4.2. *Existiert eine nichtleere Erweiterung S der Anordnung R einer Gruppe G und ein Element* $a \in G$, *so dass zu jedem* $x \in G_\infty$ *eine ganze Zahl m und ein natürliches p mit* $ma - px \in S \cup 0$ *existiert, dann existiert ein von Null verschiedenes ai-Funktional auf* (G, R) *(auch auf* (G, S) *oder gar auf* (G, L), *wobei L eine beliebige quasilineare Erweiterung der Anordnung S bedeutet).*

Beweis. Es sei mit L eine beliebige quasilineare Erweiterung der Anordnung S, und mit H die von dem Element a erzeugte Untergruppe in G bezeichnet. Wäre $a \in P$, so folgte aus der Bedingung des Satzes – nämlich daraus, dass zu jedem $x \in G_\infty$ und für ein geeignet ausgewähltes ganzes m und ein natürliches p $ma - px \in S \cup 0$ gilt – die Relation $-npx \in S \subseteq L$ (für ein passendes natürliches n). Dies würde auf die Relationen $G_\infty \subseteq -L$, $G_\infty = \emptyset$ führen, was einen Widerspruch mit $\emptyset \neq S \subseteq G_\infty$ ergibt. Es ist also $a \in L \cup -L$. Auf H sei eine Funktion f folgenderweise definiert: Für ein ganzes n habe die Relation $a \in L$ bzw. $a \in -L$ zur Folge $f(na) = n$ bzw. $f(na) = -n$. f ist offenbar ein von Null verschiedenes *ai*-Funktional auf H bezüglich $H \cap L$ und (G, L) ist schwach konfinal zu H. Nach Satz 3.1 existiert eine Fortsetzung F des Funktionals f von H auf G bezüglich L, S und R.

In den vorhergehenden Sätzen 4.1 und 4.2 wurde offensichtlich eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines von Null verschiedenen *ai*-Funktionals auf einer *po*-Gruppe festgestellt. Wir fassen zusammen:

Satz 4.3. *Auf einer po-Gruppe (G, R) existiert dann und nur dann ein von Null verschiedenes ai-Funktional, wenn eine nichtleere Erweiterung S der Anordnung R der Gruppe G und ein Element $a \in G$ existiert, so dass für jedes $x \in G$ eine ganze Zahl m mit $ma - x \in S$ existiert.*

Anmerkung. Im Satze kann man „eine quasilineare Erweiterung S" durch „eine Erweiterung S" ersetzen. Unabhängig davon lässt sich die Konfinalität der *po*-Gruppe (G, S) zu der zyklischen Untergruppe $\{a\}$ durch die schwache ersetzen.

5. In diesem Absatz spezialisieren wir die im vorhergehenden Absatze aufgestellten Resultate auf solche *po*-Gruppen (G, R), die genau eine quasilineare Erweiterung der Anordnung R zulassen.

Unter einer *ungeordneten* Untergruppe in (G, R) verstehen wir eine Untergruppe H, für die $H \cap R = \emptyset$ gilt.

Vorerst beweisen wir folgende Hilfsbehauptung.

Hilfssatz 5.1. *Auf einer po-Gruppe (G, R) sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Es existiert eine einzige quasilineare Erweiterung der Anordnung R.*
2. *Jede ungeordnete Untergruppe ist in P enthalten.*
3. *Zu jedem Element $a \in G_\infty$ existiert ein ganzes n mit $na \in R$.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$. P ist eine maximale ungeordnete Untergruppe in (G, R), also nach [2], Satz 3 existiert genau eine lineare Erweiterung $\mathfrak{N}$ der Anordnung $R(P)$ der Gruppe $(G, R)/P$. Nach Hilfssatz 1.3 ist $L = \bigcup \mathfrak{N}$ eine quasilineare Erweiterung der Anordnung R der Gruppe G. Ist L_1 eine quasilineare Erweiterung der Anordnung R der Gruppe G, so ist wegen Hilfssatz 1.3 $L_1 + P = L_1$ und L_1/P ist eine lineare Erweiterung der Anordnung $R(P)$ der Gruppe $(G, R)/P$. Daher ist $L_1/P = \mathfrak{N}$, $L_1 = L$.

$1 \Rightarrow 3$. Wir setzen voraus, dass ein $a \in G_\infty$ mit na non $\in R$ für jedes ganze n existiert. Demnach ist na non $\in R \cup - R \cup P$. Die Mengen $R_1^0 = (R \cup 0) + \{na \mid n \geqq 0 \text{ ganz}\}$, $R_2^0 = (R \cup 0) + \{na \mid n \leqq 0 \text{ ganz}\}$ sind offenbar (um das Nullelement erweiterte) Erweiterungen der Anordnung R, und für die quasilinearen Erweiterungen L_1 und L_2 der Anordnungen $R_1 (= R_1^0 \setminus 0)$ und $R_2 (= R_2^0 \setminus 0)$ gilt $L_1 \neq L_2$ im Widerspruch mit der Voraussetzung.

$3 \Rightarrow 2$. H sei eine ungeordnete Untergruppe in (G, R), die kein Element $a \in G_\infty$ enthält. Dann für jedes ganze n ist na non $\in R$, im Widerspruch zu 3.

Hilfssatz 5.2. *(G, R) sei eine po-Gruppe, deren jede ungeordnete Untergruppe in P enthalten ist. Die einzige quasilineare Erweiterung L der Anordnung R ist die Menge aller Elemente $a \in G$, für die ein natürliches p mit $pa \in R$ existiert.*

Beweis. Die Menge L ist offenbar eine quasilineare Erweiterung der Anordnung R und nach Hilfssatz 5.1 ist L die einzige quasilineare Erweiterung der Anordnung R.

Satz 5.3. (G, R) *sei eine po-Gruppe, deren jede ungeordnete Untergruppe in P enthalten ist. Dann gilt:*

a) *Wenn ein Element* $a \in G_\infty$ *existiert, so dass zu jedem* $x \in G_\infty$ *eine ganze Zahl m und natürliche Zahlen p, n mit* $p(ma - nx) \in R \cup 0$ *existieren, dann existiert ein* $F \in \widetilde{(G, R)}$ *mit* $F(a) \neq 0$.

b) *Existiert auf* (G, R) *ein von Null verschiedenes ai-Funktional F mit* $F(a) \neq 0$ *für ein* $a \in G$, *dann existiert zu jedem* $x \in G$ *eine ganze Zahl m und ein natürliches p mit* $p(ma - x) \in R$.

Anmerkung. Im Satze wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines von Null verschiedenen *ai*-Funktionals auf einer *po*-Gruppe, deren jede ungeordnete Untergruppe in P enthalten ist, ausgesprochen. Die notwendige Bedingung ist möglichst stark, die hinreichende am schwächsten formuliert.

Beweis. a) Ist die Bedingung sub a) erfüllt und ist L das einzige quasilineare Erweiterung der Anordnung R, so geht aus der Relation $p(ma - nx) \in R$ wegen Hilfssatz 5.2 $ma - nx \in L$ hervor, und nach Satz 4.2 existiert ein $F \in \widetilde{(G, R)}$ mit $F(a) \neq 0$.

b) Ist die Bedingung sub b) erfüllt und ist L die einzige quasilineare Erweiterung der Anordnung R, dann existiert zufolge Satz 4.1 für ein beliebiges $x \in G$ eine ganze Zahl m mit $ma - x \in L$, und nach Hilfssatz 5.2 existiert somit eine natürliche Zahl p mit $p(ma - x) \in R$.

Satz 5.4. (G, R) *sei eine po-Gruppe, deren jede ungeordnete Untergruppe in P enthalten ist; ferner sei* $F \in \widetilde{(G, R)}$ *mit* $F(a) \neq 0$ *für ein* $a \in G$ *und* $x \in G_\infty$. *Dann gilt:*

Es gibt eine ganze Zahl m und natürliche p, n mit $p(ma - nx) \in R \cup 0$ *dann und nur dann, wenn eine ganze Zahl* m' *und ein natürliches* p' *mit* $p'(m'a - x) \in R$ *existieren.*

Dies ist eine Folgerung des Satzes 5.3.

Literaturverzeichnis

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, rev. ed. 1948, New York.

[2] *F. Šik:* Erweiterungen teilweise geordneter Gruppen. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No *410* (1960), 65—80.

[3] *F. Šik:* Über die algebraische Charakterisierung der Gruppen von reellen Funktionen. Annali di Matematica pura ed applicata, ser. IV, *54* (1961), 295—299.

Резюме

ОБ АДДИТИВНЫХ И ИЗОТОННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ НА УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

ФРАНТИШЕК ШИК (František Šik), Брно

Статья посвящена решению двух проблем:

1. Отыскание условий, при которых на абелевой (частично) упорядоченной группе (G, R) существует ненулевой аддитивный и изотонный функционал (т. е. гомоморфное и изотонное отображение упорядоченной группы (G, R) в линейно упорядоченную аддитивную группу действительных чисел).

2. Если H – подгруппа абелевой упорядоченной группы (G, R), f – аддитивный и изотонный функционал на $(H, H \cap R)$, $f \neq 0$, то требуется найти условия, при которых существует аддитивный и изотонный функционал F на данной группе (G, R) такой, что частичная функция F_H на H тождественна с f (F мы называем *продолжением функционала* f из H на G относительно R).

Решение второй проблемы основано на следующих понятиях: Расширение L упорядочения R группы G называсется *квазилинейным*, если множество $L \cup - L$ равно множеству G_∞ всех элементов бесконечного порядка из G. Упорядоченная группа (G, R) называется *слабо конфинальной* с H (относительно R), если для любого $x \in G_\infty$ существует натуральное число n и элемент $a \in H$ такой, что $a - nx \in R \cup 0$. Упорядоченная группа (G, R) называется *конфинальной* с H (относительно R), если для любого $x \in G$ существует элемент $a \in H$ такой, что $a - x \in R$.

Решение проблемы 2 дается в следующей теореме: *Пусть H – подгруппа упорядоченной абелевой группы (G, R), f – ненулевой аддитивный и изотонный функционал на $(H, H \cap R)$. Если существует расширение S упорядочения R группы G такое, что (G, S) слабо конфинально с H, а f входит в множество $\widehat{(H, H \cap S)}$ аддитивных и изотонных функционалов на $(H, H \cap S)$, то существует продолжение функционала f из H на G относительно R (а также относительно S, даже и относительно L, где L – подходящее квазилинейное расширение упорядочения S).*

Наоборот: *если существует продолжение F функционала f из H на G относительно R, то существует квазилинейное расширение L упорядоченной группы G такое, что (G, L) конфинально с H и имеет место $F \in \widehat{(G, L)}$ (а следовательно и $f \in \widehat{(H, H \cap L)}$).* (Теорема 3.1 и 3.2.)

Решение первой проблемы получится как следствие предыдущей теоремы. Оно дается теоремой:

Если на упорядоченной абелевой группе (G, R) *существует ненулевой аддитивный и изотонный функционал* F, $F(a) \neq 0$ *для какого-либо* $a \in G$, *то существует непустое квазилинейное расширение* L *упорядочения* R *группы* G *такое, что* $F \in \widetilde{(G, L)}$ *и для каждого элемента* $x \in G$ *существует целое число* m *так, что* $ma - x \in L$.

Наоборот: *если существует непустое расширение* S *упорядочения* R *группы* G *и элемент* $a \in G$ *такой, что для каждого* $x \in G_\infty$ *существует целое число* m *и натуральное число* p *так, что* $ma - px \in S \cup 0$, *то существует ненулевой аддитивный и изотонный функционал на* (G, R) *(также и на* (G, S) *и даже на* (G, L), *где* L *— любое квазилинейное расширение упорядочения* S*)*. (Теорема 4.1 и 4.2.)

В обеих теоремах необходимое условие, сформулированное в как можно более сильном виде, влечет за собой достаточное условие.

В заключение работы, второй из приведенных результатов специализируется применительно к упорядоченной абелевой группе (G, R), содержащей в точности одно квазилинейное расширение упорядочения R (раздел 5).