Josef Kolomý

Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 607–610

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100543

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

ÜBER DIE LÖSUNG DER IM BANACHSCHEN RAUME DEFINIERTEN NICHTLINEAREN GLEICHUNGEN

JOSEF KOLOMÝ, Praha

(Eingelangen 25. 11. 1960)

In dem Artikel wird gezeigt, dass in der oft zitierten Abhandlung von I. FENYÖ [1] die beiden Sätze nicht ganz korrekt bewiesen sind, wobei der Satz 1 praktisch nicht anwendbar ist. Weiter wird in der folgenden Arbeit ein Satz über die Konvergenz der modifizierten Methode von Newton-Kantorowitsch ausgesprochen, der als eine Verbesserung des Satzes 2 [1] angesehen werden kann.

Es sei die folgende Gleichung

$$f(x) = y\,, \tag{1}$$

gegeben, wo $f(x)$ ein nichtlinearer Operator ist, der den Banachschen Raum X in den Banachschen Raum Y abbildet. Setzen wir $F(x) = f(x) - y$. I. FENYÖ beweist in seiner Arbeit [1] folgende Sätze:

Satz 1. *Es sei $f(x)$ ein Operator, der den Banachschen Raum X in den Banachschen Raum Y abbildet. Falls $f(x)$ in einer Umgebung des Elementes $x_0 \in X$ folgende Eigenschaften besitzt,*

1. *$f(x)$ ist im Fréchetschen Sinne differenzierbar, der inverse Operator $f'(x_0)^{-1}$ von $f'(x_0)$ existiert und es gilt $\|f'(x_0)^{-1}\| \leqq B$,*
2. *es gilt $\|f'(x) - f'(x_0)\| \leqq C\|x - x_0\|$, falls*

$$\|x - x_0\| \leqq r < \frac{1}{3BC}\,;$$

dann für jedes der Ungleichung

$$\|y - f(x_0)\| \leqq \eta = \frac{2 - 3BCr}{11B}\, r \tag{2}$$

genügendes Element $y \in Y$ ist die Gleichung (1) in der r-Umgebung von x_0 eindeutig lösbar. Die Lösung x^* wird als Grenzwert derjenigen Folge $\{x_n\}$ dargestellt, die durch die Gleichung

$$x_n = x_{n-1} - F'(x_{n-1})^{-1}\, F(x_{n-1})\,; \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definiert ist.

Satz 2. *Bildet der Operator $f(x)$ den Banachschen Raum X in den Banachschen Raum Y ab und besitzt er in einer Umgebung des Elementes $x_0 \in X$ eine im Fréchetschen Sinne stetige Ableitung, existiert ausserdem $f'(x_0)^{-1}$ (der Umkehrungsoperator von $f'(x_0)$), so hat die Gleichung (1) eine einzige in der Umgebung von x_0 liegende Lösung, vorausgesetzt, dass y zu $f(x_0)$ genügend nahe liegt. Genauer: Ist $0 < q < 1$ eine beliebige Zahl und ist die Zahl r so gewählt, dass die Ungleichungen*

$$\|f'(x_0)^{-1}[f'(x) - f'(x_0)]\| \leqq q\,; \quad \|x - x_0\| \leqq r$$

bestehen, dann für jedes der Ungleichung

$$\|f'(x_0)^{-1}[y - f(x_0)]\| \leqq r(1 - q)$$

genügende Element des Raumes Y ist die Gleichung (1) in der r-Umgebung von x_0 eindeutig lösbar. Die Lösung wird als Grenzwert der durch die Gleichungen

$$\xi_n = \xi_{n-1} - F'(x_0)^{-1} F(\xi_{n-1})$$

definierten Elemente von X dargestellt $(F(x) = f(x) - y)$.

Der Beweis des Satzes 1 ist an den Ungleichungen

$$\|F(x)\| \leqq \eta\,, \quad \|F'(x)\| \leqq \frac{\eta}{r}\,, \tag{3}$$

die für alle x aus einer r-Umgebung von x_0 gelten, begründet. Nun werden wir zeigen, dass die Ungleichungen (3) nicht gelten. Aus dem Satze 1 folgt nämlich nicht die Ungleichung $\|F(x)\| \leqq \eta$ für alle x aus der r-Umgebung von x_0. Weiter, die Ungleichung $\|F'(x)\| \leqq \eta/r$ gilt nicht für alle x aus der r-Umgebung von x_0.

Der Operator $F(x)$ besitzt ebenfalls die Eigenschaften 1 und 2 des Satzes 1. Zeigen wir, dass $F'(x)^{-1}$ in der ganzen r-Umgebung von x_0 existiert. Bezeichnet man I den Identitätsoperator, so existiert der inverse Operator $T(x) = [I - f'(x_0)(f'(x_0) - f'(x))]^{-1}$ und $\|T(x)\| \leqq 1/(1 - BCr) < \frac{3}{2}$ in der ganzen r-Umgebung von x_0. Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|f'(x_0)^{-1}[f'(x_0) - f'(x)]\| &\leqq \|f'(x_0)^{-1}\|\,\|f'(x_0) - f'(x)\| \leqq \\ &\leqq BC\|x - x_0\| \leqq BCr < \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

und aus dem Satz von S. Banach ([3], V, 158).

Da jedoch

$$\begin{aligned}F'(x_0)\,T^{-1}(x) &= F'(x_0)\{I - f'(x_0)^{-1}[f'(x_0) - f'(x)]\} = \\ &= F'(x_0)\,f'(x_0)^{-1} f'(x) = F'(x)\,,\end{aligned}$$

$$F'(x)^{-1} = \{F'(x_0)\,T^{-1}(x)\}^{-1} = T(x)\,F'(x_0)^{-1} \tag{4}$$

gilt, haben wir die Existenz von $F'(x)^{-1}$ bewiesen. Aus (4) folgt $\|F'(x)^{-1}\| < \frac{3}{2}B$.

Es sei nun vorausgesetzt, dass $\|F'(x)\| \leqq \eta/r$ gültig ist. Dann gilt

$$1 = \|F'(x)^{-1} F'(x)\| \leqq \|F'(x)^{-1}\|\,\|F'(x)\| < \tfrac{3}{2}B\,\frac{\eta}{r} = \tfrac{3}{2}B\,\frac{2 - 3BCr}{11B} < \tfrac{3}{11} < 1$$

und die obenerwähnte Abschätzung ist also nicht richtig.

Satz 1 ist praktisch unbrauchbar, denn in konkreten Aufgaben ist die Bedingung (2) erfüllt, falls $\|x^* - x_0\| < \varepsilon$, wo ε so klein ist, dass x_0 als die approximative Lösung von (1) aufgefasst werden kann.

Der Beweis von Satz 2 ist nicht ganz korrekt, da

a) die Gleichungen (25), (26) (cf. [1]) nicht gelten, weil der Lagrangesche Mittelwertsatz nur für Funktionalen im allgemeinen aber nicht für Operatoren gültig ist (cf. [2], § 3);

b) aus den Voraussetzungen des Satzes 2 die Eindeutigkeit der Lösungen von (1) in der r-Umgebung von x_0 nicht folgt.

Es gilt jedoch:

Satz 3. *Es sei $f(x)$ ein Operator, der den Banachschen Raum X in den Banachschen Raum Y abbildet. Falls $f(x)$ in einer Umgebung des Elementes $x_0 \in X$ folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *$f(x)$ ist im Fréchetschen Sinne differenzierbar, der inverse Operator $f'(x_0)^{-1}$ von $f'(x_0)$ existiert und es gilt*

$$\|f'(x_0)^{-1}\| \leqq B, \tag{5}$$

2. *es gilt*

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| \leqq C, \quad \textit{falls} \quad \|x - x_0\| \leqq r < \frac{1}{3BC}, \quad 0 < BC = q < 1; \tag{6}$$

dann ist für jedes der Ungleichung

$$\|y - f(x_0)\| \leqq \frac{1}{B} r(1 - q) \tag{7}$$

genügendes Element $y \in Y$ die Gleichung (1) in der r-Umgebung von x_0 eindeutig lösbar. Die Lösung wird als Grenzwert der durch die Gleichungen

$$x_n = x_{n-1} - F'(x_0)^{-1} F(x_{n-1}) \tag{8}$$

definierten Elemente von X dargestellt $(F(x) = f(x) - y)$.

Beweis. Wir definieren den Operator

$$\tau(x) = F(x) - F'(x_0)(x - x_0). \tag{9}$$

Es ist klar, dass die Gleichung (1) mit der Gleichung

$$x = x_0 - F'(x_0)^{-1} \tau(x)$$

identisch ist. Diese lösen wir durch die Methode der sukzessiven Approximationen:

$$x_n = x_0 - F'(x_0)^{-1} \tau(x_{n-1}) \tag{10}$$

und beweisen, dass $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = x^*$ existiert.

Laut (10) und (7) gilt

$$\|x_1 - x_0\| \leqq B\|\tau(x_0)\| = B\|F(x_0)\| \leqq r(1 - q) < r,$$

d.h. x_1 gehört zur r-Umgebung von x_0. Es sei angenommen, dass $x_k (k \leqq n - 1)$ zur r-Umgebung von x_0 gehören; dann beweisen wir, dass auch x_n in dieser Umgebung von x_0 liegt. Nach der Voraussetzung ist

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqq \|F'(x_0)\| \, \|\tau(x_{n-2}) - \tau(x_{n-1})\| \leqq$$
$$\leqq \|F'(x_0)^{-1}\| \, \|\tau'(x_{n-1})\| \, \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leqq q^n \|x_1 - x_0\|$$

wegen der Relationen (10) und (6), wobei

$$\bar{x}_{n-1} = x_{n-2} + \Theta_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})\,; \quad (0 < \Theta_{n-1} < 1)\,.$$

Es ist also

$$\|x_n - x_0\| \leqq \sum_{k=0}^{n} q^k \|x_1 - x_0\| < \frac{1}{1-q} \, r(1-q) = r\,,$$

womit unsere Behauptung bestätigt ist. Weiter ist

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leqq \sum_{\gamma=k}^{n+k} q^\gamma \|x_1 - x_0\| < q^k \, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \, r(1-q) < q^k$$

für alle n erfüllt, wodurch die Existenz von $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$ gesichert ist; dieser Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung (1), denn $f(x)$ stetig ist und aus (9), (10) folgt, dass

$$\|f(x_{n-1}) - y\| \leqq \|f'(x_0)\| \, \|x_n - x_{n-1}\| \leqq q^n \,.\, r\|f'(x_0)\| \to 0$$

gilt, woher eben diese Behauptung folgt.

Vorausgesetzt, dass es zwei verschiedene Lösungen x_1^* und x_2^* von (1) in der r-Umgebung von x_0 gibt, ergibt sich wegen (9)

$$\|x_1^* - x_2^*\| = \|F'(x_0)^{-1}[\tau(x_1^*) - \tau(x_2^*)]\| \leqq q\|x_1^* - x_2^*\| < \|x_1^* - x_2^*\|\,,$$

was unmöglich ist.

Literatur

[1] *I. Fenyö:* Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichlinearen Gleichungen. Acta Mathematicae Ac. sci. Hungariae, No *5* (1954), 85—93.

[2] *М. М. Вайнберг:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Москва 1956.

[3] *Л. В. Канторович-Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

Резюме

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

ИОСЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý), Прага

В статье показано что в работе И. Феньe [1] доказательство обеих теорем ошибочно и что теорема 1 из [1] практически неприменима. О сходимости модифицированного метода Ньютон-Канторовича предложена теорема, которая является результатом исправления теоремы 2 из [1].