Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jiřina

Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения со случайными коэффициентами и случайной правой частью

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 457–474

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100530

Чехословацкий математический журнал т. 12 (87) 1962, Прага

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СЛУЧАЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА (Miloslav Jiřina), Прага

(Поступило в редакцию 15/VIII 1960 г.)

В настоящей работе доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы обыкновенное дифференциальное уравнение (или же разностное уравнение) со случайными коэффициентами, правая часть которого представляет собой так называемый $\mathcal{T}$-стационарный процесс, имело решение, которое опять является $\mathcal{T}$-стационарным процессом, и выводится общий вид такого решения.

0. Введение. В настоящей работе исследуются стационарные решения дифференциального уравнения

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x^{(m)}(t) = y(t)$$

при предположении, что коэффициенты α_m являются случайными переменными, независящими от времени t, и что правая часть $y(t)$ представляет собой стационарный процесс в широком смысле. В абзаце 4 приведены аналогичные результаты для разностного уравнения

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x(t + m) = y(t) .$$

Решение осуществлено методом спектрального разложения стационарного процесса, причем мы ограничиваемся лишь немного специализированными стационарными процессами, т. наз. $\mathcal{T}$-стационарными процессами (смотри абзац 2). Причина такого ограничения заключается отчасти в самом методе, отчасти в том, что для таких процессов является сравнительно простое условие теоремы 3.4 условием не только достаточным, но и необходимым для существования решения. Так как в приложениях встречаются уравнения, правую часть которых образует стационарный обобщенный процесс — напр., так называемый „белый шум", то общая теорема сформулирована для обобщенных стационарных процессов.

Во всей работе означает $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ основное вероятностное поле, R – множество всех действительных чисел (за исключением абзаца 4), $\mathcal{A}$ – систему всех борелевских подмножеств R и $\mathcal{B}$ – систему всех ограниченных борелевских подмножеств R. Среднее значение случайной переменной ξ, т. е. $\mathcal{S}$-измеримой комплексной функции, определенной на Ω, обозначим через $\mathsf{E}(\xi)$, условное среднее значение относительно σ-алгебры $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ через $\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{T})$ и его значение в точке $\omega \in \Omega$ через $\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{T}, \omega)$. Систему всех случайных переменных ξ таких, что $\mathsf{E}(|\xi|^2) < \infty$, обозначим буквой $\mathcal{H}$ и для $\xi \in \mathcal{H}$ будем писать $|\xi| = [\mathsf{E}(|\xi|^2)]^{1/2}$. Если ξ и η – случайные переменные, то равенство $\xi = \eta$ будет выражать, что $\xi(\omega) = \eta(\omega)$ для P-почти всех ω. Если H – произвольное множество и f – функция, определенная на $H \times \Omega$, то функцию переменной $h \in H$, которую для фиксированного $\omega \in \Omega$ определяет функция f, будем обозначать через $f(., \omega)$. Но вместо аналогичного $f(h, .)$ будем писать только $f(h)$. Для характеристической функции произвольного множества H будем сохранять обозначение $C(H)$. Если w – комплексное число, то $\bar{w}$ будет означать число, комплексно сопряженное с w; тем же самым обозначением будем пользоваться и для комплексно сопряженной функции (случайной переменной).

1. СЛУЧАЙНАЯ $\mathcal{T}$-ОРТОГОНАЛЬНАЯ МЕРА И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. (Определение). *Мерой* мы будем называть неотрицательную σ-аддитивную функцию X, определенную на $\mathcal{A}$ и такую, что $X(A) < \infty$ для $A \in \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ – данная σ-алгебра.

1.2. (Определение). *Случайной $\mathcal{T}$-ортогональной мерой* будем называть комплексную функцию ξ, определенную на $\mathcal{B} \times \Omega$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1.2.1. $\xi(A)$ $\mathcal{S}$-измерима для каждого $A \in \mathcal{B}$,

1.2.2. $\xi(A) \in \mathcal{H}$ для каждого $A \in \mathcal{B}$,

1.2.3. $\mathsf{E}(\xi(A) \mid \mathcal{T}) = 0$ для каждого $A \in \mathcal{B}$,

1.2.4. $\mathsf{E}(\xi(A)\, \bar{\xi}(B) \mid \mathcal{T}) = 0$ для $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$,

1.2.5. Существует мера $X^{(0)}$ такая, что
$\mathsf{E}(\xi(A)\, \bar{\xi}(B)) = X^{(0)}(A \cap B)$ для $A, B \in \mathcal{B}$.

1.3. (Определение). Меру $X^{(0)}$, которая отношением 1.2.5 определена однозначно, будем называть *абсолютной мерой* случайной $\mathcal{T}$-ортогональной меры ξ.

Случайная $\mathcal{T}$-ортогональная мера является особым случаем ортогональной случайной меры (т. е. процесса с ортогональными приращениями). В случае $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ оба понятия совпадают.

Из 1.2 легко следует

1.2.6. $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$ для $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$,

1.2.7. $\lim_{n \to \infty} |\xi(A_n)| = 0$ для $A_n \in \mathcal{B}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\lim_{n \to \infty} A_n = \emptyset$.

1.4. *Пусть ξ — случайная $\mathscr{T}$-ортогональная мера. Тогда существует функция $X^{(1)}$, определенная на $A \times \Omega$, и такая, что*

1.4.1. $X^{(1)}(A)$ *$\mathscr{T}$-измерима для каждого $A \in \mathscr{A}$,*

1.4.2. $X^{(1)}(\,.\,, \omega)$ *— мера на $\mathscr{A}$ для каждого $\omega \in \Omega$,*

1.4.3. $\mathsf{E}(|\xi(A)|^2 \,|\mathscr{T}) = X^{(1)}(A)$ *для каждого $A \in \mathscr{B}$.*

Доказательство. Определим на $\mathscr{B} \times \Omega$ функцию X^* соотношением $X^*(A, \omega) = \mathsf{E}(|\xi(A)|^2 \,|\mathscr{T}, \omega)$, причем в качестве условного среднего значения выберем какую-нибудь версию. Из 1.2.4 и 1.2.7 следует, что для $A \cap B = \emptyset$.

(1.4.4) $X^*(A \cup B) = \mathsf{E}((|\xi(A)|^2 + \bar{\xi}(A)\,\xi(B) + \xi(A)\,\bar{\xi}(B) + |\xi(B)|^2)|\,\mathscr{T}) = X^*(A) + X^*(B)$ и для $A_n \supset A_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$,

(1.4.5) $\lim\limits_{n\to\infty} X^*(A_n) = 0.$

Пусть $\mathscr{R}$ — кольцо всех конечных соединений ограниченных интервалов с рациональными концами, причем под интервалом понимаем любой интервал, включая одноточечные множества. Пусть $\mathscr{C}$ — система всех компактных множеств из $\mathscr{R}$. Очевидно, $\mathscr{C} \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{B}$ и к каждому $I \in \mathscr{R}$ существует последовательность $C_k(I) \in \mathscr{C}$ такая, что $C_k(I) \subset C_{k+1}(I) \subset I$, $\lim\limits_{k\to\infty} C_k(I) = I$. Ввиду того, что $\mathscr{R}$ счетно, и ввиду (1.4.4) и (1.4.5), существует $\Omega^* \in \mathscr{T}$ такое, что $P(\Omega^*) = 0$ и что для всех $\omega \in \Omega - \Omega^*$ имеют место соотношения:

(1.4.6) $X^*(I_1 \cup I_2, \omega) = X^*(I_1, \omega) + X^*(I_2, \omega)$, если $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1\, I_2 \in \mathscr{R}$,

(1.4.7) $\lim\limits_{k\to\infty} X^*(C_k(I), \omega) = X^*(I, \omega)$, если $I \in \mathscr{R}$.

Положим

$$X_*(I, \omega) = X^*(I, \omega) \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega - \Omega^*\,,$$
$$X_*(I, \omega) = 0 \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega^*\,.$$

$X_*(.\,, \omega)$, очевидно, конечно аддитивна на $\mathscr{R}$ для каждого ω, и докажем сейчас непрерывность в нуле. Предположим наоборот, что для некоторого $\omega_1 \in \Omega$ существует последовательность $I_n \in \mathscr{R}$ такая, что $I_n \supset I_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \emptyset$, но $\lim\limits_{n\to\infty} X_*(I_n, \omega_1) = \alpha > 0$. Тогда существует для каждого n множество $C^{(n)} = C_{k_n}(I_n)$ такое, что

$$X^*(C^{(n)}, \omega_1) > X^*(I_n, \omega_1) - (\tfrac{1}{2})^{n+1}\,\alpha\,.$$

Очевидно,

$$C^{(1)} \cap \ldots \cap C^{(n)} = I_n - \bigcup_{m=1}^{n} (I_m - C^{(n)})\,.$$

Так как $\omega_1 \in \Omega^*$, то

$$X_*(C^{(1)} \cap \ldots \cap C^{(n)}, \omega_1) = X^*(C^{(1)} \cap \ldots C^{(n)}, \omega_1) \geqq X^*(I_n, \omega_1) - $$
$$- X^*(\bigcup_{m=1}^{n} (I_n - C^{(m)}), \omega_1) \geqq \alpha - \sum_{m=1}^{n} (\tfrac{1}{2})^{m+1}\,\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha\,.$$

Из этого вытекает – так как $X_*(.,\omega_1)$ аддитивна и конечна на $\mathscr{R}$ –, что $C^{(1)} \cap \ldots \cap C^{(n)} \neq \emptyset$ для каждого n и, значит, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C^{(n)} \neq \emptyset$ в виду $C^{(n)} \in \mathscr{C}$. Это однако противоречит $C^{(n)} \subset I_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Мы доказали, что $X_*(.,\omega)$ σ-аддитивна на $\mathscr{R}$ для всех ω, и поэтому существует расширение на $\mathscr{A}$, которое обозначим $X^{(1)}(.,\omega)$. $X^{(1)}$ удовлетворяет 1.4.2, и докажем, что оно удовлетворяет также 1.4.1 и 1.4.3. Пусть $\mathscr{A}_k$ – множество тех $A \in \langle -k, k\rangle \cap \mathscr{B}$, для которых

(1.4.8) $X^{(1)}(A)$ $\mathscr{T}$-измерима и

(1.4.9) $\mathsf{E}(|\xi(A)|^2 \,|\mathscr{T}) = X^{(1)}(A)$.

Очевидно, $\langle -k, k\rangle \cap \mathscr{R} \subset \mathscr{A}_k$, так как для каждого $I \in \mathscr{R}$ $X^{(1)}(I) = X_*(I) = X^*(I)$. Далее, пусть $A_n \in \mathscr{A}_k$, A_n монотонные. Тогда

$$X^{(1)}(A_n) = \mathsf{E}(|\xi_n|^2 \,|\mathscr{T}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}(|\xi(\lim_{n\to\infty} A_n)|^2 \,|\mathscr{T})$$

согласно (1.4.4) и (1.4.5) и также $X^{(1)}(A_n) \to X^{(1)}(\lim A_n)$. Значит, $\lim A_n \in \mathscr{A}_k$, и из этого вытекает, согласно теореме о монотонных последовательностях ([1], § 6, Theorem B), что $\mathscr{A}_k = \langle -k, k\rangle \cap \mathscr{A}$. Этим теорема доказана, так как $\mathscr{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k$.

1.5. (Определение). Функцию $X^{(1)}$, которая соотношениями 1.4.1 – 1.4.3 определена однозначно (кроме ω из какого-то P-нулевого множества), будем называть *условной мерой* случайной $\mathscr{T}$-ортогональной меры ξ.

1.6. (Определение). Если $X^{(1)}$ – условная мера случайной $\mathscr{T}$-ортогональной меры ξ, то функцию X, определенную на σ-алгебре $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$ соотношением $X(E) = \iint C(E, a, \omega)\, X^{(1)}(\mathrm{d}a, \omega)\, P(\mathrm{d}\omega)$ назовем *расширенной мерой* случайной $\mathscr{T}$-ортогональной меры ξ.

1.7. *Для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеет место соотношение $X(A \times \Omega) = X^{(0)}(A)$.*

Доказательство. Достаточно доказать для $A \in \mathscr{B}$. Тогда, согласно 1.4.3,

$$X(A \times \Omega) = \int X^{(1)}(A,\omega)\, P(\mathrm{d}\omega) = \int \mathsf{E}(|\xi(A)|^2 \,|\mathscr{T}, \omega)\, P(\mathrm{d}\omega) = \mathsf{E}(|\xi(A)|^2) = X^{(0)}(A).$$

Сейчас мы определим стохастический интеграл относительно случайной $\mathscr{T}$-ортогональной меры ξ с соответствующей абсолютной, условной и расширенной мерой $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, X. Так как имеем дело с простой модификацией обыкновенного стохастического интеграла, приведем определение и основные свойства без подробного доказательства.

1.8. (Определение). Функцию f, определенную на $R \times \Omega$, назовем ***$\mathscr{T}$-простой***, если существуют непересекающиеся $A_m \in \mathscr{B}$ $(m = 1, \ldots, n)$ и ограниченные, $\mathscr{T}$-измеримые функции f_m, определенные на Ω и такие, что

1.8.1. $f(a) = f_m$ для $a \in A_m$ $(m = 1, \ldots, n)$,

1.8.2. $f(a) = 0$ для $a \in R - \bigcup_{m=1}^{n} A_m$.

1.9. (Определение). Если f вида 1.8.1 – 1.8.2, то случайную переменную $\sum_{m=1}^{n} f_m\, \xi(A_m)$ обозначим символом $\int f(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$, или коротко $\xi(f)$, и ее значение в точке ω символом $\xi(f, \omega)$.

1.10. *Если f и g — $\mathscr{T}$-простые функции, то*

1.10.1. $\mathsf{E}(\xi(f)\,|\mathscr{T}) = 0$,

1.10.2. $\mathsf{E}(\xi(f)\,\bar{\xi}(g)\,|\mathscr{T},\omega) = \int f(a, \omega)\, \bar{g}(a, \omega)\, X^{(1)}(\mathrm{d}a, \omega)$ *для P-почти всех ω,*

1.10.3. $\mathsf{E}(\xi(f)) = 0$,

1.10.4. $\mathsf{E}(\xi(f)\,\bar{\xi}(g)) = \int f(a, \omega)\, \bar{g}(a, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, \omega))$,

1.10.5. $\mathsf{E}(|\xi(f)|^2) = \int |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega))$.

При доказательстве 1.10.2 используем тот факт, что

$$\mathsf{E}(f_j \bar{g}_k \xi(A_j)\, \bar{\xi}\,(B_k)\,|\mathscr{T}) = f_j \bar{g}_k \mathsf{E}(\xi(A_j)\, \bar{\xi}(B_k)\,|\mathscr{T})\,.$$

Остальные части доказательства очевидны.

1.11. (Определение). Пусть $\mathscr{L}$ — система всех $\mathscr{T}$-простых функций и $\mathscr{L}(X)$ — — замыкание множества $\mathscr{L}$ относительно нормы

$$\|f\|_X = \left[\int |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega))\right]^{1/2}. \tag{1.11.1}$$

Для $f \in \mathscr{L}(X)$ примем за *стохастический интеграл* относительно случайной $\mathscr{T}$-ортогональной меры ξ:

$$\int f(a)\, \xi \mathrm{d}(a) = \xi(f) \tag{1.11.2}$$

предел в среднем (по отношению к $|.|$) последовательности случайных переменных $\xi(f_k)$, причем $f_k \in L$выбраны так, чтобы $\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_X = 0$. Так же, как для обыкновенного стохастического интеграла можно доказать с помощью 1.10, что приведенное здесь определение однозначно P-почти всюду и что, далее, имеют место два следующих предложения:

1.12. *Пусть функция f, определенная на $R \times \Omega$ — $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$-измерима и такая, что $\int |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega)) < \infty$. Тогда $f \in \mathscr{L}(X)$.*

1.13. *Пусть f, $g \in \mathscr{L}(X)$. Тогда для соответствующих стохастических интегралов $\xi(f)$ и $\xi\,(g)$ имеют место соотношения 1.10.3, 1.10.4 и 1.10.5.*

1.14. *Пусть $f \in \mathscr{L}(X)$, пусть g определена на Ω и $\mathscr{T}$-измерима и пусть также $fg \in \mathscr{L}(X)$. Тогда*

$$\int g f(a)\, \xi(\mathrm{d}a) = g \int f(a)\, \xi(\mathrm{d}a)\,.$$

Доказательство очевидно, если $f \in \mathscr{L}$ и g ограничена. Общий случай докажется предельным переходом.

1.15. *Для f, $g \in \mathscr{L}(X)$ имеют место соотношения* 1.10.1 и 1.10.2.

Доказательство. Пусть $\Gamma \in \mathscr{T}$, $f, g \in \mathscr{L}(X)$. Тогда согласно 1.13 и 1.14

$$\mathsf{E}(C(\Gamma)\,\xi(f)\,\bar{\xi}(g)) = \mathsf{E}(\xi(fC(\Gamma))\,\bar{\xi}(g)) =$$
$$= \int C(\Gamma, \omega)\, f(a, \omega)\, \bar{g}(a, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, \omega)) = \int_\Gamma \left[\int f(a, \omega)\, \bar{g}(a, \omega)\, X^{(1)}(\mathrm{d}a, \omega)\right] P(\mathrm{d}\omega).$$

Функция в скобках в последнем интеграле $\mathscr{T}$-измерима, и отсюда вытекает 1.10.2. Вторая часть доказывалась бы аналогично.

1.16. *Пусть ξ — случайная $\mathscr{T}$-ортогональная мера, f-определенная на $R \times \Omega$ и $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$-измеримая функция такая, что для каждого $A \in \mathscr{B}$ функция $C(A)\,.\,f$ принадлежит $\mathscr{L}(X)$. Тогда $\eta(A) = \int C(A, a)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$ определяет новую случайную $\mathscr{T}$-ортогональную меру η и для соответствующей абсолютной, условной и расширенной меры $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, Y имеет место*

1.16.1 $$Y(A) = \int_{A \times \Omega} |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega)),$$

1.16.2 $$Y^{(1)}(A, \omega) = \int_A |f(a, \omega)|^2\, X^{(1)}(\mathrm{d}a, \omega) \quad \textit{для } P\textit{-почти всех } \omega,$$

1.16.3 $$Y(E) = \int_E |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega)).$$

Далее для произвольной функции g, определенной на $R \times \Omega$ и $\mathscr{T}$-измеримой, имеет место утверждение

1.16.4. *$g \in \mathscr{L}(Y)$ тогда и только тогда, когда $g\,.\,f \in \mathscr{L}(X)$, и если выполнено это условие, то*

1.16.5. $$\int g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) = \int g(a)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a).$$

Доказательство. Очевидно, что η выполняет условия 1.2.1 и 1.2.2. Соотношения 1.2.3 – 1.2.5 и 1.16.1 – 1.16.3 вытекают из 1.13 и 1.15. Утверждение 1.16.4 является очевидным следствием 1.16.3, и соотношение 1.16.5 вытекает из 1.14, если g принадлежит $\mathscr{L}$; в общем случае оно доказывается предельным переходом с использованием того, что из $\|g_n - g\|_X \to 0$ вытекает, согласно 1.16.3. $\|g_n f - gf\|_X \to 0$.

1.17. *Пусть f и g определены на $R \times \Omega$ и $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$-измеримы, $f\,.\,g \in \mathscr{L}(X)$, $g \in \mathscr{L}(X)$. Далее, пусть d — действительная $\mathscr{T}$-измеритая функция, определенная на $\Gamma \in \mathscr{T}$, и пусть E — ее график, т. е. $E = \{(a, \omega) : \omega \in \Gamma,\ (a, \omega) = (d(\omega), \omega)\}$. Тогда $\int f(a)\, g(a)\, C(E, a)\, \xi(\mathrm{d}a) = f(d) \int g(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$, причем $f(d)$ обо-*

значает функцию, определенную на Ω соотношением $f(d)(\omega) = f(d(\omega), \omega)$ для $\omega \in \Gamma$ и $f(d)(\omega) = 0$ для $\omega \notin \Gamma$.

Доказательство. Так как $f \,.\, C(E) = f(d) \,.\, C(E)$ и функция $f(d)$ $\mathscr{T}$-измерима, то утверждение вытекает из 1.14.

2. $\mathscr{T}$-СТАЦИОНАРНЫЕ (ОБОБЩЕННЫЕ) ПРОЦЕССЫ

За множество T параметров времени t примем здесь всю действительную прямую. Систему всех комплексных, бесконечное число раз дифференцируемых функций с компактным носителем (основных функций для обобщенных функций Шварца) будем обозначать через $\mathscr{D}$. Для $h \in T$ и $\varphi \in \mathscr{D}$ означает ${}_h\varphi$ функцию из $\mathscr{D}$, определенную соотношением ${}_h\varphi(t) = \varphi(t - h)$. Для преобразования Фурье функции $\varphi \in \mathscr{D}$ будем пользоваться обозначением $\mathscr{F}_\varphi$, т. е. $\mathscr{F}_\varphi(a) = \int e^{ita}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Пусть $\mathscr{T}$ – опять данная σ-алгебра, $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$.

2.1. (Определение). Комплексную функцию x, определенную на $\mathscr{D} \times \Omega$, мы будем называть *$\mathscr{T}$-стационарным обобщенным процессом,* если

2.1.1. $x(\varphi) \in \mathscr{H}$ для каждой $\varphi \in \mathscr{D}$,

2.1.2. отображение $\varphi \to x(\varphi)$ пространства $\mathscr{D}$ в $\mathscr{H}$ линейно и непрерывно относительно обыкновенной топологии в $\mathscr{D}$ и относительно нормы $|.|$ в $\mathscr{H}$,

2.1.3. $\mathsf{E}(x(\varphi)\,|\mathscr{T}) = 0$ для каждой $\varphi \in \mathscr{D}$,

2.1.4. $\mathsf{E}(x({}_h\varphi)\, \bar{x}({}_h\psi)\,|\mathscr{T}) = \mathsf{E}(x(\varphi)\, \bar{x}(\psi)\,|\mathscr{T})$ для произвольных $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ и $h \in T$.

$\mathscr{T}$-стационарный обобщенный процесс является особым случаем стационарного обобщенного процесса (в широком смысле) по Ито (смотри [2]) и совпадает с ним в случае $\mathscr{T} = \{\emptyset, \Omega\}$. Согласно [2] Theorem 4.1 существует для каждого стационарного (значит, и $\mathscr{T}$-стационарного) обобщенного процесса x случайная ортогональная мера ξ такая, что

2.1.5. $\int (1 + a^2)^{-l}\, X^{(0)}(\mathrm{d}a) < \infty$ для некоторого целого l и

2.1.6. $x(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$ для каждой $\varphi \in \mathscr{D}$,

причем $X^{(0)}$ означает абсолютную меру ξ (смотри абзац 1). Случайную ортогональную меру ξ, которая определена соотношением 2.16 однозначно (P-почти всюду), будем называть спектральной случайной мерой обобщенного процесса x и соответствующую абсолютную меру $X^{(0)}$ абсолютной спектральной мерой.

2.2. *Пусть x – стационарный обобщенный процесс и ξ – соответствующая спектральная случайная мера. Тогда x является $\mathscr{T}$-стационарным тогда и только тогда, когда ξ – случайная $\mathscr{T}$-ортогональная мера.*

Доказательство. Пусть x $\mathcal{T}$-стационарен. Для произвольного $\Gamma \in \mathcal{T}$ положим $x_\Gamma = C(\Gamma) \, . \, x$. Тогда $\mathsf{E}(x_\Gamma({}_h\varphi) \, \bar{x}_\Gamma({}_h\psi)) - \mathsf{E}(x_\Gamma(\varphi) \, \bar{x}_\Gamma(\psi)) =$
$= \mathsf{E}(C(\Gamma) \, \mathsf{E}(x({}_h\varphi) \, \bar{x}({}_h\psi) - x(\varphi) \, \bar{x}(\psi) \, | \mathcal{T})) = \mathsf{E}(C(\Gamma) \, . \, 0) = 0$ согласно 2.1.4. Так же доказалось бы $\mathsf{E}(x_\Gamma(\varphi)) = 0$ и, следовательно, x_Γ есть стационарный обобщенный процесс. Пусть $X^{(0)}$ и $X_\Gamma^{(0)}$ – абсолютные спектральные меры x и x_Γ и пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Тогда согласно [2] (смотри доказательство теоремы 4.1) существуют последовательности $\varphi_{n,j} \in \mathcal{D}$ $(j = 1, 2)$ такие, что

$$\left\| \mathcal{F}_{\varphi_{n,j}} - C(A_j) \right\|_{X + X_\Gamma} \to 0 \, .$$

Но тогда $\left| x(\varphi_{n,j}) - \xi(A_j) \right| \to 0$ и, следовательно,

$$\left| x_\Gamma(\varphi_{n,j}) - C(\Gamma) \, \xi(A_j) \right| \to 0 \, .$$

Из этого вытекает

$$\mathsf{E}(C(\Gamma) \, \xi(A_1) \, \bar{\xi}(A_2)) = \lim_{n \to \infty} E(x_\Gamma(\varphi_{n,1}) \, \bar{x}_\Gamma(\varphi_{n,2})) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int \mathcal{F}_{\varphi_{n,1}}(a) \, \overline{\mathcal{F}}_{\varphi_{n,2}}(a) \, X_\Gamma(da) = X_\Gamma(A_1 \cap A_2) = 0 \, .$$

Этим доказано соотношение 1.2.4 для ξ; так же доказалось бы соотношение 1.2.3. Следовательно, ξ есть случайная $\mathcal{T}$-ортогональная мера. Пусть, наоборот, ξ – случайная $\mathcal{T}$-ортогональная мера. Тогда, в виду 2.1.6 и 1.15, x выполняет 2.1.3 и 2.1.4. Из 2.2 и [2], теорема 4.1, вытекает:

2.3. *Всякая случайная $\mathcal{T}$-ортогональная мера, удовлетворяющая* 2.1.5 *для какого-то l, определяет при помощи соотношения* 2.1.6 *некоторый $\mathcal{T}$-стационарный обощенный процесс.*

2.4. (Определение). Скажем, что стационарный обобщенный процесс является *порядка не выше l*, если соответствующая абсолютная спектральная мера $X^{(0)}$ удовлетворяет условию 2.1.5 для такого l.

2.5. (Определение). Если ξ – случайная спектральная мера $\mathcal{T}$-стационарного обобщенного процесса, то соответствующую условную и расширенную меру назовем *условной* и *расширенной спектральной мерой* $\mathcal{T}$-стационарного обобщенного процесса.

2.6. (Определение). Комплексную функцию x, определенную на $T \times \Omega$, будем называть *непрерывным $\mathcal{T}$-стационарным процессом,* если

2.6.1. $x(t) \in \mathcal{H}$ для всех $t \in T$;

2.6.2. отображение $t \to x(t)$ множества T в $\mathcal{H}$ непрерывно по отношению к $|.|$;

2.6.3. $E(x(t)|\mathcal{T}) = 0$ для всех $t \in T$;

2.6.4. $E(x(t_1 + h) \, \bar{x}(t_2 + h) \, | \mathcal{T}) = E(x(t_1) \, \bar{x}(t_2) \, | \mathcal{T})$ для всех $t_1, t_2, h \in T$.

Так как $\mathcal{T}$-стационарный процесс является особым случаем непрерывного стационарного процесса (в широком смысле), то существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathcal{T}$-стационарных процессов и множеством тех $\mathcal{T}$-стационарных обобщенных процессов, спектральные абсолютные меры которых удовлетворяют условию $X^{(0)}(R) < \infty$, т.е. они порядка не выше $l = 0$. При этом соответствующим себе процессам (обыкновенному и обобщенному) принадлежит одна и та же спектральная мера.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ r-ГО ПОРЯДКА

В настоящем абзаце приведем общее решение уравнения

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x^{(m)}(\varphi) = y(\varphi) \tag{3.1}$$

при следующих условиях:

3.2.1. Коэффициенты α_m $(m = 0, 1, \ldots, r)$ — комплексные случайные величины. Наименьшую σ-алгебру, относительно которой все α_m измеримы, обозначим через $\mathcal{T}$. Очевидно, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

3.2.2. y — $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс, причем $\mathcal{T}$ определено в 3.2.1.

3.2.3. В качестве решения принимаются только $\mathcal{T}$-стационарные обобщенные процессы, причем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций Шварца, т. е. $x^{(m)}(\varphi) = (-1)^m x(\varphi^{(m)})$.

Сейчас займемся подробно коэффициентами α_m и характеристическим многочленом f, определенным соотношением $f(a, \omega) = \sum_{m=0}^{r} \alpha_m(\omega)(-ia)^m$ на $R \times \Omega$.

Пусть $\Omega_{-1} = \{\omega : \alpha_0(\omega) = \alpha_1(\omega) = \ldots \alpha_r(\omega) = 0\}$ и пусть Ω_0 — множество тех ω, для которых уравнение $f(a, \omega) = 0$ не имеет никакого действительного решения относительно a; далее положим $\Omega_1 = \Omega - (\Omega_0 \cup \Omega_{-1})$, $E_0 = \{(a, \omega) : f(a, \omega) = 0\}$, $E_1 = E_0 - R \times \Omega_{-1}$, $F_0 = R \times \Omega - E_0$. Так как для каждого $\omega \in \Omega$ функция $f(., \omega)$ — полином степени не выше r, то ко всякому $\omega \in \Omega_1$ существует хотя бы одно, но не больше чем r, различных действительных значений $d_m(\omega)$ таких, что $(d_m(\omega), \omega) \in E_0$, и из них можно построить r_0 $(0 \leqq r_0 \leqq r)$ функций d_m $(m = 1, \ldots, r_0)$ со следующими свойствами:

3.3.1. d_m определена на некотором $\mathcal{T}$-измеримом множестве $\Omega_m \subset \Omega_1$ и она $\mathcal{T}$-измерима.

3.3.2. $\Omega_{m_1} \supset \Omega_{m_2}$ если $m_1 < m_2$,

3.3.3. если F_m — график функции d_m, то $F_{m_1} \cap F_{m_2} \neq 0$ для $m_1 \neq m_2$ и $\bigcup_{m=1}^{r_0} F_m = E_1$.

Функции d_m, конечно, требованиями 3.3.1—3.3.3 однозначно не определены, следующие теоремы, однако, не зависят от особого выбора этих функций.

Также от этого выбора не зависят множества E_0, E_1, F_0. В дальнейшем будем предполагать, что функции d_m, удовлетворяющие 3.3.1—3.3.3, уже построены. Определим еще на $R \times \Omega$ функцию g при помощи соотношения

$$g(a, \omega) = [f(a, \omega)]^{-1} \quad \text{если} \quad (a, \omega) \notin E_0 ,$$
$$g(a, \omega) = 0 \quad \text{если} \quad (a, \omega) \in E_0 .$$

3.4. *Пусть y — $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс со спектральной случайной $\mathcal{T}$-ортогональной мерой η и спектральной расширенной мерой Y. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовал $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс x, удовлетворяющий уравнению* (3.1), *является одновременное выполнение следующих двух соотношений:*

3.4.1 $Y(E_0) = 0$,

3.4.2 $\int |g(a, \omega)|^2 (1 + a^2)^{-l_1} Y(\mathrm{d}(a, \omega)) < \infty$ *для какой-то достаточно большой постоянной* l_1.

Если условия выполнены, то $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс, удовлетворяющий уравнению (3.1) *имеет вид*

3.4.3. $$\int \mathcal{F}_\varphi(a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) + \sum_{m=1}^{r_0} \mathcal{F}_\varphi(d_m)\, \gamma_m + x_{-1}(\varphi) ,$$

причем γ_m — произвольные случайные переменные, для которых существует l_2 такое, что если положить $\delta_m = \gamma_m(1 + d_m^2)^{-\frac{1}{2}l_2}$, то

3.4.4. $\gamma_m(\omega) = 0$ если $\omega \notin \Omega_m$,

3.4.5. $\mathsf{E}(\delta_m \mid \mathcal{T}) = 0$,

3.4.6. $\delta_m \in \mathcal{H}$,

3.4.7. $\mathsf{E}(\delta_m \bar{\delta}_k \mid \mathcal{T}) = 0$ *если* $m \neq k$,

3.4.8. $\mathsf{E}(\delta_m \bar{\xi}_0(A) \mid \mathcal{T}) = 0$ *для произвольного* $A \in \mathcal{B}$,

причем

$$\xi_0(A) = \int C(A, a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) ;$$

наконец, x_{-1} — произвольный $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс такой, что $x_{-1}(\varphi, \omega) = 0$ для $\omega \notin \Omega_{-1}$.

Корреляционная обобщенная функция (см. [2] § 2) *$\mathcal{T}$-стационарного обобщенного процесса* 3.4.3 *имеет тогда вид*

$$(3.4.9) \quad \int \mathcal{F}_\varphi(a)\, |g(a, \omega)|^2\, Y(\mathrm{d}(a, \omega)) + \sum_{m=0}^{r} \int \mathcal{F}_\varphi(d_m(\omega))\, |\gamma_m(\omega)|^2\, P(\mathrm{d}\omega) + R_{-1}(\varphi) ,$$

причем R_{-1} — корреляционная обобщенная функция процесса x_{-1}.

Доказательство. Пусть существует $\mathcal{T}$-стационарный обощенный процесс x, удовлетворяющий (3.1). Согласно 2.2 соответствующая спектральная случайная мера ξ является случайной $\mathscr{T}$-ортогональной мерой; обозначим через $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, X соответствующую абсолютную, условную и расширенную меру. Предположим, что x порядка не выше l (сморти 2.4) и, следовательно, $\int(1 + a^2)^{-l} X^{(0)}(\mathrm{d}a) < \infty$. Согласно 1.7 тогда и

$$\int(1 + a^2)^{-l} X(\mathrm{d}(a, \omega)) < \infty\,. \tag{3.4.10}$$

Это условие гарантирует существование стохастических интегралов в следующей части доказательства, согласно 1.11.

Предположим сначала, что α_m ограничены. Тогда в виду 1.14

$$\int\mathscr{F}_\varphi(a)\,\eta(\mathrm{d}a) = \sum_{m=0}^{r}\alpha_m\int(-1)^m(ia)^m\,\mathscr{F}_\varphi(a)\,\xi(\mathrm{d}a) = \int\mathscr{F}_\varphi(a)\,f(a)\,\xi(\mathrm{d}a)\,.$$

Последний интеграл определяет, согласно 1.16 и 2.3, некоторый $\mathscr{T}$-стационарный обобщенный процесс, и так как из равенства процессов вытекает равенство соответствующих спектральных случайных мер, то для произвольных $A \in \mathscr{B}$ и $\Gamma \in \mathscr{T}$ имеет место соотношение

$$\int C(A, a)\,C(\Gamma)\,f(a)\,\xi(\mathrm{d}a) = \int C(A, a)\,C(\Gamma)\,\eta(\mathrm{d}a)\,. \tag{3.4.11}$$

Из этого следует, в виду 1.16.3, для произвольного $E \in \mathscr{A} \times \mathscr{T}$

$$\int_E |f(a, \omega)|^2\,X(\mathrm{d}(a, \omega)) = Y(E)\,. \tag{3.4.12}$$

Отбросим сейчас предположение, что α_m ограничены. Определим

$$\begin{aligned}
&\Gamma_n = \{\omega : |\alpha_m(\omega)| \leqq n,\ m = 0, 1, \ldots, r\},\ \Gamma'_n = \Omega - \Gamma_n \quad \text{и}\\
&\alpha_{m,n}(\omega) = \alpha_m(\omega) \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \ldots, r \quad \text{и} \quad \omega \in \Gamma_n\,,\\
&\alpha_{m,n}(\omega) = 0 \quad \text{для} \quad m = 1, \ldots, r \quad \text{и} \quad \omega \notin \Gamma_n\,,\\
&\alpha_{0,n}(\omega) = 1 \quad \text{для} \quad \omega \notin \Gamma_n\,.
\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma'_n = \emptyset\,. \tag{3.4.13}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\zeta_n(A, \omega) &= C(\Gamma_n, \omega)\,\zeta(A, \omega) + C(\Gamma'_n, \omega)\,\eta(A, \omega) && \text{для} \quad A \in \mathscr{B}\,,\\
Z_n^{(1)}(A, \omega) &= C(\Gamma_n, \omega)\,X^{(1)}(A, \omega) + C(\Gamma'_n, \omega)\,Y^{(1)}(A, \omega) && \text{для} \quad A \in \mathscr{A}\,,\\
Z_n(E) &= \iint C(E, a, \omega)\,Z_n^{(1)}(\mathrm{d}a, \omega)\,P(\mathrm{d}\omega) && \text{для} \quad E \in \mathscr{A} \times \mathscr{T}\,.
\end{aligned}$$

Так как $\Gamma_n \in \mathscr{T}$, то

$$\mathsf{E}(\zeta_n(A) \mid \mathscr{T}) = C(\Gamma_n)\,\mathsf{E}(\xi(A) \mid \mathscr{T}) + C(\Gamma'_n)\,\mathsf{E}(\eta(A) \mid \mathscr{T}) = 0 \tag{3.4.14}$$

и

$$\mathsf{E}(\zeta_n(A)\,\bar{\zeta}_n(B)\,|\mathscr{T}) = C(\Gamma_n)\,\mathsf{E}(\xi(A)\,\bar{\xi}(B)|\,\mathscr{T}) + C(\Gamma'_n)\,\mathsf{E}(\eta(A)\,\bar{\eta}(B)|\,\mathscr{T}) = Z_n^{(1)}\,(A \cap B)\,.$$

Из этого и из (3.4.14) легко следует, что ζ_n – случайная $\mathcal{T}$-ортогональная мера и, следовательно, $z_n(\varphi) = \int \mathcal{F}_\varphi(a)\, \zeta_n(\mathrm{d}a)$ есть $\mathcal{T}$-стационарный обобщенный процесс.

Из определения ζ_n и $\alpha_{m,n}$ следует

$$z_n = C(\Gamma_n)\, x + C(\Gamma'_n)\, y \,. \tag{3.4.15}$$

Определим характеристический многочлен f_n так же, как f, с тем различием что α_m заменим на $\alpha_{m,n}$, так что $f_n = C(\Gamma_n)\, f + C(\Gamma'_n)$.

Из (3.4.15) и определения $\alpha_{m,n}$ также следует, что x_n удовлетворяет уравнению (3.1), если в нем заменить α_m ограниченными коэффициентами $\alpha_{m,n}$. Соотношение 3.4.12 принимает тогда вид

$$\int C(E, a, \omega)\, |f_n(a, \omega)|^2\, Z_n(\mathrm{d}(a, \omega)) = Y(E)\,.$$

Учитывая опредление f_n и Z_n, мы видим, что

$$\int C(\Gamma_n, \omega)\, C(E, a, \omega)\, |f_n(a, \omega)|^2\, Z_n(\mathrm{d}(a, \omega)) = \int C(\Gamma_n, \omega)\, C(E\, a, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, \omega))$$

и при помощи предельного перехода убедимся в справедливости 3.4.12 для случая произвольных коэффициентов α_m. Мера Y в правой части σ-конечна и, значит, существует стохастический интеграл $\int C(A, a)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$, для которого

$$\mathsf{E}\left(\left|\int C(A, a)\, C(\Gamma)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a) - \int C(A, a)\, C(\Gamma)\, f_n(a)\, \xi(\mathrm{d}a)\right|^2\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\left|\int C(A, a)\, C(\Gamma - \Gamma_n)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a) - \int C(A, a)\, C(\Gamma - \Gamma_n)\, \eta(\mathrm{d}a)\right|^2\right) \leqq$$

$$\leqq \left[\left(\int_{A \times \Gamma' n} |f(a, \omega)|^2\, X(\mathrm{d}(a, \omega))\right)^{1/2} + \left(\int_{A \times \Gamma' n} Y(\mathrm{d}(a, \omega))\right)^{1/2}\right]^2.$$

В виду (3.4.13) сходятся оба последних интеграла к нулю; это доказывает справедливость (3.4.11) в общем случае. Из (3.4.10) и (3.4.12) следует 3.4.1. Так как $f(a, \omega) \neq 0$ для $(a, \omega) \in F_0$, то

$$X(E \cap F_0) = 0\,, \quad \text{если} \quad E \in \mathcal{A} \times \mathcal{T} \quad \text{и} \quad Y(E) = 0\,.$$

Из этого следует, что мера X^*, определенная на $\mathcal{A} \times \mathcal{T}$ соотношением $X^*(E) = X(E \cap F_0)$, абсолютно непрерывна по отношению к Y, и что существует поэтому $\mathcal{A} \times \mathcal{T}$-измеримая функция h такая, что

$$X^*(E) = \int_E h(a, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, \omega))\,. \tag{3.4.16}$$

Однако очевидно, что

$$Y(E) = \int_E |f(a, \omega)|^2 X(\mathrm{d}(a, \omega)) = \int_E |f(a, \omega)|^2 X^*(\mathrm{d}(a, \omega)) =$$
$$= \int_E |f(a, \omega)|^2 h(a, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, \omega))$$

и, следовательно, $h(a, \omega) = [f(a, \omega)]^{-2}$ P-почти всюду; значит, мы можем положить $h = |g|^2$. Из (3.4.16) следует

$$\int (1 + a^2)^{-l} |g(a, \omega)|^2 Y(\mathrm{d}(a, \omega)) = \int (1 + a^2)^{-l} X^*(\mathrm{d}(a, \omega)) \leqq$$
$$\leqq \int (1 + a^2)^{-l} X(\mathrm{d}(a, \omega)),$$

и так как интеграл в правой части по предположению конечный, 3.4.2 доказано. Из этого далее следует, что для $A \in \mathscr{B}$ существует интеграл

$$\int C(A, a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) \tag{3.4.17}$$

и в виду 1.16 имеем

$$\int C(A, a)\, C(F_0, a)\, \xi(\mathrm{d}a) = \int C(A, a) f(a)\, g(a)\, \xi(\mathrm{d}a) = \int C(A, a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a). \tag{3.4.18}$$

Положим

$$x_m(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(F_m, a)\, \xi(\mathrm{d}a) \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \ldots, r_0; \tag{3.4.19}$$

$$x_{-1}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(\Omega_{-1})\, \xi(\mathrm{d}a), \quad \text{так что}$$

$$\sum_{m=-1}^{r_0} x_m(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)[C(\Omega_{-1}) + \sum_{m=0}^{r_0} C(F_m, a)]\, \xi(\mathrm{d}a) = x(\varphi). \tag{3.4.20}$$

Учитывая 1.17, (3.3.3) и (3.4.20), имеем для $m > 0$

$$x_m(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,(1 + a^2)^{(1/2)l}\, C(F_m, a)\,(1 + a^2)^{-(1/2)l}\, \xi(\mathrm{d}a) =$$
$$= \mathscr{F}_\varphi(d_m)\,(1 + d_m^2)^{(1/2)l} \int C(F_m, a)\,(1 + a^2)^{-(1/2)l}\, \xi(\mathrm{d}a)$$

и, следовательно, если положим

$$\gamma_m = C(\Omega_m)\,(1 + d_m^2)^{(1/2)l} \int C(F_m, a)\,(1 + a^2)^{-(1/2)l}\, \xi(\mathrm{d}a), \tag{3.4.21}$$

то для $m > 0$ будет

$$x_m(\varphi) = \mathscr{F}_\varphi(d_m)\, \gamma_m. \tag{3.4.22}$$

Докажем, что эти γ_m удовлетворяют соотношениям 3.4.4–3.4.8. Очевидно, что имеет место 3.4.4, и если положим $\delta_m = \gamma_m(1 + d_m^2)^{-(1/2)l}$, то для $\Gamma \in \mathscr{T}$ получим – учитывая (3.4.21) –

$$\mathsf{E}(C(\Gamma)\,\delta_m\bar{\delta}_k) = \int C(\Gamma, \omega)\, C(F_k \cap F_m, a, \omega)\,(1 + a^2)^{-l}\, X(\mathrm{d}(a, \omega)) < \infty$$

согласно 3.4.2. Из этого следует для $m = k$ и $\Gamma = \Omega$ соотношение 3.4.6. Далее для $m \neq k$ отсюда следует $\mathsf{E}(C(\Gamma)\delta_m\bar{\delta}_k) = 0$, так как тогда $F_m \cap F_k = \emptyset$; значит имеет место соотношение 3.4.7. Подобным образом доказывалась бы соотношение 3.4.5 и при помощи (3.4.18) также 3.4.8. Наконец очевидно, что x_{-1} – $\mathscr{T}$-стационарный обобщенный процесс. Из (3.4.18)–(3.4.22) следует общий вид решения 3.4.3 и кореляционной обобщенной функции 3.4.9.

Пусть теперь, наоборот, выполнены условия 3.4.1–3.4.2 и пусть γ_m – случайные переменные, удовлетворяющие условиям (3.4.4)–(3.4.8), н, наконец, пусть x_{-1} – $\mathscr{T}$-стационарный обобщенный процесс такой, что $x_{-1}(\varphi, \omega) = 0$ для $\omega \notin \Omega_{-1}$. Без органичения общности можно предположить, что $l_1 = l_2 = l$ и также, что x_{-1} порядка не выше l. Положим опять $\delta_m = \gamma_m(1 + d_m^2)^{-(1/2)l}$. В виду 3.4.2 существует для $A \in \mathscr{B}$ интеграл $\xi_0(A) = \int C(A, a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a)$. Далее положим для $m = 1, \ldots, r_0$

$$\xi_m(A) = C(A, d_m)\,\gamma_m = C(A, d_m)\,(1 + d_m^2)^{(1/2)l}\,\delta_m\,,$$

и пусть ξ_{-1} спектральная случайная мера x_{-1}. Положим

$$X_0(A) = \int C(A, a)\,|g(a, \omega)|^2\, Y(\mathrm{d}(a, \omega))\,,$$

$$X_m(A) = \int C(A, d_m(\omega))\,|\gamma_m(\omega)|^2\, P(\mathrm{d}\omega) \quad (m = 1, \ldots, r_0)$$

в пусть X_{-1} – абсолютная спектральная мера процесса x_{-1}. Тогда

$$\int (1 + a^2)^{-1}\, X_m(\mathrm{d}a) < \infty \quad (m = -1, 0, 1, \ldots, r_0)\,. \tag{3.4.23}$$

Это вытекает для $m = -1$ из предположения, для $m = 0$ из 3.4.2 и для $m > 0$ из соотношения

$$\int (1 + a^2)^{-l}\, X_m(\mathrm{d}a) = \int (1 + d_m^2(\omega))^{-l}\,|\gamma_m(\omega)|^2\, P(\mathrm{d}\omega) = \mathsf{E}(|\delta_m|^2) < \infty$$

согласно 3.4.6. Процессы ξ_m являются $\mathscr{T}$-случайными ортогональными мерами и X_m из абсолютными мерами. Это вытекает для $m = -1$ из определения, для $m = 0$ из 1.16.1, и в случае $m > 0$ для $A, B \in \mathscr{B}$ имеет место

$$\mathsf{E}(\xi_m(A) \mid \mathscr{T}) = C(A, d_m)\,(1 + d_m^2)^{(1/2)l}\, \mathsf{E}(\delta_m \mid \mathscr{T}) = 0\,,$$

$$\mathsf{E}(\xi_m(A)\,\bar{\xi}_m(B) \mid \mathscr{T}) = C(A \cap B, d_m)\,(1 + d_m^2)^l\, \mathsf{E}(|\delta_m|^2 \mid \mathscr{T}) = 0 \quad \text{если} \quad A \cap B = \emptyset$$

и

$$\mathsf{E}(\xi_m(A)\,\bar{\xi}_m(B)) \qquad = \mathsf{E}(C(A \cap B, d_m)\,|\gamma_m|^2) = X_m(A \cap B)\,.$$

Далее, для $m \neq k$

$$\mathsf{E}(\xi_m(A)\,\bar{\xi}_k(B) \mid \mathscr{T}) = 0\,. \tag{3.4.24}$$

Это для $k = 0$ и $m > 0$ вытекает из 3.4.8, для $0 < k < m$ из 3.4.7 и для $k = -1$, $m \geqq 0$ из того, что

$$\xi_m(A) = C(\Omega - \Omega_{-1})\,\xi_m(A)\,(m \geqq 0) \quad \text{и} \quad \xi_{-1}(A) = C(\Omega_{-1})\,\xi_{-1}(A)\,.$$

Из (3.4.24) следует, что ξ_m взаимно ортогональны и, следовательно, $\xi = \sum_{m=-1}^{r_0} \xi_m$ есть случайная $\mathscr{T}$-ортогональная мера с абсолютной мерой

$$X = \sum_{m=-1}^{r_0} X_m\,. \tag{3.4.25}$$

Если положить

$$x(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,\xi(\mathrm{d}a),\ x_m(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,\xi_m(\mathrm{d}a) \quad (m = -1, 0, \ldots, r_0)\,,$$

то x и x_m являются $\mathscr{T}$-стационарными обобщенными процессами и

$$x = \sum_{m=-1}^{r_0} x_m,\ x_0(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,g(a)\,\eta(\mathrm{d}a),\ x_m(\varphi) = \mathscr{F}_\varphi(d_m)\,\gamma_m\,(m > 0)\,.$$

Достаточно поэтому показать, что x удовлетворяет данному уравнению. $\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_{-1}^{(m)}(\varphi) = 0$, ибо $\alpha_m(\omega) = 0$ для $\omega \in \Omega_{-1}$ и

$$x_{-1}^{(m)}(\varphi) = \int (-ia)^m\,\mathscr{F}_\varphi(a)\,\xi_{-1}(\mathrm{d}a) = 0 \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega - \Omega_{-1}\,.$$

Далее, для $k > 0$

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_k^{(m)}(\varphi) = \mathscr{F}_\varphi(d_k)\,f(d_k)\,\gamma_k = 0\,,$$

и достаточно поэтому доказать, что

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_0^{(m)}(\varphi) = y(\varphi)\,. \tag{3.4.26}$$

Определим Γ_n, Γ_n', $\alpha_{m,n}$, f_n, как в первой части доказательства, и аналогично положим

$$g_n = C(\Gamma_n)\,g + C(\Gamma_n') \quad \text{и} \quad x_{0,n}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,g_n(a)\,\eta(\mathrm{d}a) =$$

$$= C(\Gamma_n)\,x_{0,n}(\varphi) + C(\Gamma_n')\,y(\varphi)\,.$$

Так как $\alpha_{m,n}$ ограничены, то

$$\alpha_{m,n} x_{0,n}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,\alpha_{m,n} g_n(a)\,\eta(\mathrm{d}a)$$

и, значит,

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_{m,n} x_{0,n}^{(m)}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, f_n(a)\, g_n(a)\, \eta(\mathrm{d}a) =$$

$$= C(\Gamma_n) \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(F_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a) + C(\Gamma_n')\, y(\varphi)\,.$$

Предельным переходом отсюда получаем

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_0^{(m)}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(F_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a)\,. \tag{3.4.27}$$

Наконец,

$$\mathsf{E}\left(\left|\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(E_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a)\right|^2\right) = \int |\mathscr{F}_\varphi(a, \omega)|^2\, C(E_0, a, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, \omega)) = 0\,,$$

согласно 3.4.1. Значит, $\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, C(E_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a) = 0$, и (3.4.26) тогда вытекает из (3.4.27).

Если нас интересует только область непрерывных $\mathscr{T}$-стационарных процессов, то не только x должно быть непрерывным стационарным процессом, но и все производные до r-го порядка включительно. Теорема 3.4 тогда имеет место, если положить $l_1 = l_2 = -r$. Формула (3.4.3) имеет тогда вид

$$\int e^{ita} g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) + \sum_{m=1}^{r_0} e^{itd_m} \gamma_m + x_{-1}(t)\,, \tag{3.5.1}$$

причем x_{-1} — произвольный $\mathscr{T}$-стационарный непрерывный процесс порядка не выше $-r$ и такой, что $x_{-1}(t, \omega) = 0$ для $\omega \notin \Omega_{-1}$. Аналогично, 3.4.9 имеет вид

$$\int e^{ita} |g(a, \omega)|^2\, Y(\mathrm{d}(a, \omega)) + \sum_{m=1}^{r_0} \int e^{itd_m(\omega)} |\gamma_m(\omega)|^2\, P(\mathrm{d}\omega) + R_{-1}(t)\,, \tag{3.5.2}$$

где R_{-1} — корелационная функция процесса x_{-1}.

4. СЛУЧАЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ r-ГО ПОРЯДКА

Аналогично тому, как в абзаце 3, можно изучать решения разностного уравнения r-го порядка, которые являются стационарными случайными последовательностями (дискретными процессами). Укажем только необходимые изменения в определениях и приведем результаты без доказательств.

В настоящем абзаце будет T означать множество всех целых чисел, R полуоткрытый интервал $(-\pi, \pi\rangle$ и $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ систему всех борелевских подмножеств R.

4.1. (Определение). Комплексную функцию x, определенную на $T \times \Omega$ назовем *$\mathscr{T}$-стационарной случайной последовательностью,* если

4.1.1. $x(t) \in \mathscr{H}$ для каждого $t \in T$,

4.1.2. $\mathsf{E}(x(t) \mid \mathscr{T}) = 0$ для каждого $t \in T$,

4.1.3. $\mathsf{E}(x(t_1 + h)\, \bar{x}(t_2 + h)) = \mathsf{E}(x(t_1)\, \bar{x}(t_2))$ для произвольных $t_1, t_2, h \in T$.

Нас интересует решение разностного уравнения

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x(t + m) = y(t) \tag{4.2}$$

при тех же предположениях о α_m как в 3.2.1 и при предположении, что y — $\mathscr{T}$-стационарная случайная последовательность, если $\mathscr{T}$ определено по 3.2.1. Функция f определяется здесь соотношением $f(a, \omega) = \sum_{m=0}^{r} \alpha_m(\omega)\, e^{iam}$, и при помощи этой функции множества Ω_m, E_m, F_m и функции g, d_m определены формально таким же образом, как в абзаце 3.

При таких орпеделениях справедлива опять теорема 3.4, однако с той разницей, что x и y означают $\mathscr{T}$-стационарные случайные последовательности, удовлетворяющие уравнению (4.2), причем опять надо положить $l_1 = l_2 = 0$, так что тогда $\delta_m = \gamma_m$. Общий вид решения определен формулой (3.5.1) и соответствующая корреляционная функция формулой (3.5.2). При этом x_{-1} означает произвольную $\mathscr{T}$-стационарную случайную последовательноть такую, что $x_{-1}(t, \omega) = 0$ для $\omega \in \Omega_{-1}$, и R_{-1} — ее кореляционную функцию.

5. УРАВНЕНИЯ С НЕСЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предыдущие результаты справедливы и в случае, когда коэффициенты уравнений — неслучайные постоянные, если положить $\mathscr{T} = \{\emptyset, \Omega\}$. Понятие $\mathscr{T}$-стационарного обобщенного процесса (процесса, последовательности) совпадает тогда с понятием стационарного обобщенного процесса (процесса, последовательности). Очевидно, мы можем здесь без ограничения общности положить $\alpha_r \neq 0$; необходимым и достаточным условием для существования решения будет тогда одновременное выполнение следующих двух соотношений:

$$Y^{(0)}(A_0) = 0\,, \tag{5.1}$$

$$\int (1 + a^2)^{-l}\, |g(a)|^2\, Y^{(0)}(\mathrm{d}a) < \infty \quad \text{для некоторого } l, \tag{5.2}$$

причем $A_0 = \{a : f(a) = 0\}$. Это множество состоит самое больше из r точек; обозначим их $a_1, \ldots, a_{r_0}$. Общее решение описывается тогда формулой

$$\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) + \sum_{m=1}^{r_0} \mathscr{F}_\varphi(a_m)\, \gamma_m\,,$$

где γ_m — случайные переменные такие, что

$$\gamma_m \in \mathscr{H},\ \ \mathsf{E}(\gamma_m) = 0,\ \ \mathsf{E}(\gamma_m \bar{\gamma}_k) = 0\,.$$

Соответствующая корреляционная функция принимает здесь вид

$$\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, |g(a)|^2\, Y^{(0)}(\mathrm{d}a) + \sum_{m=1}^{r_0} \mathscr{F}_\varphi(d_m)\, \mathsf{E}(|\gamma_m|^2)\,.$$

Особым случаем „y = белому шуму“ занимаются в [3].

Литература

[1] *P. Halmos:* Measure theory, New York 1950.

[2] *K. Itô:* Stationary random distributions. Memoirs of the coll. of sci. Univ. of Kyoto. Ser. A-Math. *28*, 1954, 209—223.

[3] *U. Grenander-M. Rosenblatt:* Statistical analysis of stationary time series. New York 1957.

Summary

ORDINARY DIFFERENTIAL OR DIFFERENCE EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS AND RANDOM RIGHT-HAND SIDE

MILOSLAV JIŘINA, Praha

In the whole paper $\mathscr{A}$ denotes the σ-algebra of all Borel sets on the real line R, $\mathscr{D}$ the space of basic functions for Schwartz distributions and we shall write ${}_h\varphi(t) = \varphi(t - h)$ for $\varphi \in \mathscr{D}$. Let $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$ be random variables on a given probability space $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ and let $\mathscr{T}$ be the smallest σ-algebra generated by α_i $(i = 0, \ldots, r)$. A stationary random distribution (in the sense of Itô) will be called $\mathscr{T}$-stationary if it satisfies 2.1.3 and 2.1.4 for all $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ and real h. We consider the differential equation (3.1), where both the right-hand side y and the solution x are $\mathscr{T}$-stationary random distributions. Denote by η the random spectral measure of y. Since y is supposed to be $\mathscr{T}$-stationary, there exists a measure Y on $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$ such that $\mathsf{E}(|\eta(A)|^2\, C(\Gamma)) = Y(A \times \Gamma)$. Also, we may define for any $\mathscr{A} \times \mathscr{T}$-measurable function f a stochastic integral $\int f(a, \omega)\, \eta(\mathrm{d}a, \omega)$. We shall write

$$f(a, \omega) = \sum_{m=0}^{r} \alpha_m(\omega)\,(-ia)^m \quad (a \text{ real}),$$

$$\Omega_{-1} = \{\omega : \alpha_0(\omega) = \ldots = \alpha_r(\omega) = 0\}, \quad E_0 = \{(a, \omega) : f(a, \omega) = 0\},$$

$$g(a, \omega) = [f(a, \omega)]^{-1} \quad \text{if} \quad (a, \omega) \notin E_0 \quad \text{and} \quad g(a, \omega) = 0 \quad \text{if} \quad (a, \omega) \in E_0.$$

There exist $\mathscr{T}$-measurable functions d_m $(m = 1, \ldots, r_0,\ 0 \leqq r_0 \leqq r)$ such that a) their graphs F_m are disjoint, b) their domains of definition Ω_m are $\mathscr{T}$-measurable and non-increasing if m varies from 1 to r_0, c) $\bigcup_{m=1}^{r_0} F_m = E_0$. The main result (Theorem 3.4) can be expressed as follows:

In order that there may exist a $\mathscr{T}$-stationary distribution x satisfying (3.1), it is necessary and sufficient that both 3.4.1 and 3.4.2 (for some l_1) be fulfilled. The general form of x is described by 3.4.3, where γ_m are arbitrary random variables for which 3.4.4 to 3.4.8 hold (with $\delta_m = \gamma_m(1 + d_m^2)^{-(1/2)l_2}$) and x_{-1} is an arbitrary $\mathscr{T}$-stationary random distribution vanishing for $\omega \notin \Omega_{-1}$. The general form of the corresponding correlation distribution is given by 3.4.9.

Similar results can be proved for difference equations.