FONCTIONS ALÉATOIRES D'INTERVALLE, III

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 16 juillet 1960)

L'article forme la suite aux travaux [5] et [6] portant le même titre; on y poursuit l'étude des relations existant entre la dérivabilité et l'intégrabilité-(*BB*) des fonctions aléatoires d'intervalle.

1. INTRODUCTION

Dans cet article, les travaux [5], [6], [7], [8] sont supposés connus, c'est pourquoi nous employons sans autres explications les notions et les notations que l'on y a introduites; d'une façon analogue nous supposons aussi une connaissance de la théorie de l'intégrale de Burkill (voir [1], [4], [9]) dans la mesure où elle est nécessaire. Tout comme nos travaux antérieurs, le présent travail traite exclusivement des fonctions aléatoires d'intervalle *à accroissements indépendants*, il est étroitement lié surtout au travail [6]: son objet est de remplir certaines lacunes restées dans la théorie de l'intégrale-(*BB*), avant tout en connexion avec les notions de dérivée et de dérivabilité. Les idées fondamentales et les principes de démonstration sont en général les mêmes qu'en [5] et [6]; les théorèmes démontrés sont de nouveau des analogies des théorèmes valables pour l'intégrale de Burkill ordinaire. On peut considérer comme résultat principal le théorème 3 sur l'équivalence des dérivées de l'intégrale et de la fonction intégrée, et qui est une analogie ,,aléatoire" du théorème de Saks (cf. [4], 15.2) et à la fois une généralisation du théorème 12 de [6]. A la fin du travail, on y trouvera certaines remarques concernant les équations différentielles stochastiques prises au sens du travail [10].

Pour notre point de départ nous prenons cette fois-ci le suivant lemme, dont nous nous sommes servi, dans un cas spécial, déjà dans [6], mais qui vaut la peine d'être formulé explicitement.

Lemme 1. *Soit $f(I, x)$ une fonction complexe d'intervalle définie dans un intervalle K et dépendant d'un paramètre réel $x \in X \subset R$. Supposons que pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$ l'intégrale $\int_J f(I, x) = 0$ converge uniformément par rapport à $x \in X$. Alors pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$ l'intégrale $\int_J |f(I, x)| = 0$ converge uniformément par rapport à $x \in X$.*

Démonstration. Ecrivons $g(I, x) = |f(I, x)|$. En vertu du théorème 1 du travail [9] (cf. aussi [7]) et du fait que g est non-négative, il suffira de démontrer que l'intégrale $\int_K g(I, x) = 0$ converge uniformément par rapport à $x \in X$. Nous allons démontrer tout d'abord (cf. le lemme 3 de [6]) qu'à chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre positif δ tel que pour chaque figure $\mathscr{F}$ en K de norme $\nu(\mathscr{F}) < \delta$ on a $|f(\mathscr{F}, x)| < \frac{1}{4}\varepsilon$ pour tout $x \in X$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il devrait exister un $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'à chaque $\delta > 0$ on pût trouver une figure $\mathscr{F}$ de norme $\nu(\mathscr{F}) < \delta$ et un nombre réel $x \in X$ (dépendant de $\mathscr{F}$) tels que $|f(\mathscr{F}, x)| \geqq \frac{1}{4}\varepsilon_0$. Or, pour cet ε_0 il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour chaque partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta_0$ on a $|f(\mathscr{D}, x)| < \frac{1}{8}\varepsilon_0$ pour tout $x \in X$. Fixons donc une figure $\mathscr{F}_0$ de norme $\nu(\mathscr{F}_0) < \delta_0$ et un nombre $x_0 \in X$, tels que $|f(\mathscr{F}_0, x_0)| \geqq \frac{1}{4}\varepsilon_0$. En ajoutant à la figure $\mathscr{F}_0$ un nombre fini d'intervalles $J_1, J_2, \ldots, J_m$, on peut en former une partition de l'intervalle K. Or nous avons $\int_{J_k} f(I, x) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$; $x \in X$; il est donc possible de trouver pour chaque J_k une partition $\mathscr{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, telle que $|f(\mathscr{D}_k, x)| < \frac{1}{8}\varepsilon_0 m^{-1}$ pour tout $x \in X$. Nous pouvons supposer en même temps, sans restreindre la généralité de nos raisonnements, que $\nu(\mathscr{D}_k) < \delta_0$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$. Le système $\mathscr{F}_0 \cup \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{D}_m$ forme une partition $\mathscr{D}_0$ de l'intervalle K. On a $\nu(\mathscr{D}_0) < \delta_0$, donc aussi $|f(\mathscr{D}_0, x)| < \frac{1}{8}\varepsilon_0$ pour tout $x \in X$. Pour notre x_0 nous obtenons ainsi

$$|f(\mathscr{F}_0, x_0)| \leqq |f(\mathscr{D}_0, x_0)| + \sum_{k=1}^{m} |f(\mathscr{D}_k, x_0)| < \tfrac{1}{8}\varepsilon_0 + m\tfrac{1}{8}\varepsilon_0 m^{-1} = \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 ,$$

ce qui est en contradiction avec notre choix de $\mathscr{F}_0$ et x_0. Ayons donc deux nombres positifs ε et δ tels que $\nu(\mathscr{F}) \leq \delta$ entraîne $|f(\mathscr{F}, x)| < \frac{1}{4}\varepsilon$ pour tout $x \in X$; nous allons démontrer à présent que pour chaque partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, nous avons $g(\mathscr{D}, x) < \varepsilon$ pour tout $x \varepsilon X$. Fixons donc un $x \in X$ et posons pour chaque partition $\mathscr{D}$

$$\mathscr{F}_1 = \{I : I \in \mathscr{D},\ \operatorname{Re} f(I, x) \geqq 0\}\,, \quad \mathscr{F}_2 = \{I : I \in \mathscr{D},\ \operatorname{Re} f(I, x) < 0\}\,,$$
$$\mathscr{F}_3 = \{I : I \in \mathscr{D},\ \operatorname{Im} f(I, x) \geqq 0\}\,, \quad \mathscr{F}_4 = \{I : I \in \mathscr{D},\ \operatorname{Im} f(I, x) < 0\}\,.$$

Nous aurons d'une façon évidente $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 = \mathscr{D} = \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4$, $\nu(\mathscr{F}_j) \leqq \nu(\mathscr{D})$, pour $j = 1, 2, 3, 4$. Pour notre x fixé nous avons

$$g(\mathscr{D}, x) \leqq \operatorname{Re} f(\mathscr{F}_1, x) - \operatorname{Re} f(\mathscr{F}_2, x) + \operatorname{Im} f(\mathscr{F}_3, x) - \operatorname{Im} f(\mathscr{F}_4, x) \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{4} |f(\mathscr{F}_j, x)| < \varepsilon\,.$$

Comme notre x a été fixé arbitrairement, nous voyons que l'intégrale $\int_K g(I, x) = 0$ converge uniformément par rapport à $x \in X$, c. q. f. d.

2. LES INTÉGRALES ET LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS ALÉATOIRES

A l'aide de notre lemme 1 nous allons établir quelques théorèmes pour les fonctions d'intervalle aléatoires.

Théorème 1. *Soient $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ deux fonctions aléatoires d'intervalle, définies et intégrables-(BB) dans K, continues en $\emptyset$; soient φ_1 et φ_2 respectivement, leurs fonctions caractéristiques. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence*

$$(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X}_1 \sim (BB)\text{-}\int_J \mathbf{X}_2 \tag{2.1}$$

ait lieu pour tout $J \in \boldsymbol{K}$ est que l'intégrale

$$\int_K |\varphi_1(I, s) - \varphi_2(I, s)| = 0 \tag{2.2}$$

converge localement uniformément par rapport à $s \in R$.

Démonstration. I. Supposons tout d'abord que (2.1) ait lieu pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$. Les fonctions $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ étant continues en $\emptyset$, il existe pour tout $\sigma > 0$ un nombre positif η tel que pour $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \eta$ on ait $\varphi_1(I, s) \neq 0 \neq \varphi_2(I, s)$ pour $|s| \leqq \sigma$ au moins; pour ces valeurs-là de s, il est possible de définir les logarithmes $\psi_j(I, s) = \log \varphi_j(I, s)$, $j = 1, 2$, fonctions continues de s. Les inégalités $\operatorname{Re} \psi_j(I, s) \leqq$ $\leqq 0$, $j = 1, 2$, entraînent l'inégalité

$$|\varphi_1(I, s) - \varphi_2(I, s)| \leqq |\psi_1(I, s) - \psi_2(I, s)|\,, \tag{2.3}$$

de sorte qu'il suffit de démontrer la convergence localement uniforme de l'intégrale

$$\int_K |\psi_1(I, s) - \psi_2(I, s)| = 0\,. \tag{2.4}$$

Or, l'équivalence (2.1) implique l'égalité des intégrales

$$\int_J \psi_1(I, s) = \int_J \psi_2(I, s)\,, \tag{2.5}$$

de sorte que nous avons pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$

$$\int_J [\psi_1(I, s) - \psi_2(I, s)] = 0\,. \tag{2.6}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que les intégrales (2.6) convergent localement uniformément par rapport à $s \in R$, cela découle de la convergence localement uniforme des intégrales figurant dans (2.5). La fonction $f(I, s) = \psi_1(I, s) - \psi_2(I, s)$ remplit donc les conditions de notre lemme 1 où nous prenons pour X n'importe quel intervalle borné sur l'axe réel R. Il s'en ensuit (2.4), d'où (2.2).

II. Supposons maintenant par contre que l'intégrale (2.2) converge localement uniformément, nous en tirerons la validité de (2.1) pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. La fonction intégrée dans (2.2) étant non-négative, nous voyons que l'intégrale

$$\int_J |\varphi_1(I, s) - \varphi_2(I, s)| = 0 \tag{2.7}$$

converge localement uniformément quel soit $J \in \boldsymbol{K}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ il est donc possible de trouver $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\sum_{\mathscr{D}} |\varphi_1(I_j, s) - \varphi_2(I_j, s)| < \varepsilon$$

ait lieu pour toute partition $\mathscr{D} = \{I_1, \ldots, I_m\}$ de l'intervalle J en question, pourvu que $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, $|s| \leqq \sigma$. Or

$$\prod_{j=1}^{m} \varphi_1(I_j, s) - \prod_{j=1}^{m} \varphi_2(I_j, s) = \sum_{k=1}^{m} \{\prod_{j=1}^{k-1} \varphi_1(I_j, s) [\varphi_1(I_k, s) - \varphi_2(I_k, s)] \prod_{j=k+1}^{m} \varphi_2(I_j, s)\},$$

de sorte que pour $|s| \leqq \sigma$, $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ nous avons en vertu de $|\varphi(I, s)| \leqq 1$ l'inégalité

$$|\prod_{\mathscr{D}} \varphi_1(I_j, s) - \prod_{\mathscr{D}} \varphi_2(I_j, s)| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\varphi_1(I_j, s) - \varphi_2(I_j, s)| < \varepsilon . \tag{2.8}$$

L'existence des intégrales-(BB) des fonctions $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ dans l'intervalle J entraîne la convergence localement uniforme de

$$\lim_{\nu(\mathscr{D}) \to 0} \prod_{\mathscr{D}} \varphi_k(I_j, s) = \exp\left[\int_J \psi_k(I, s)\right], \quad k = 1, 2 .$$

De cela et de (2.8) nous obtenons (2.1), c. q. f. d.

Comme nous voyons de la seconde partie de la démonstration, la convergence localement uniforme de l'intégrale (2.4) est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour la convergence localement uniforme de l'intégrale (2.2). Nous voyons en même temps qu'il n'est pas nécessaire de supposer l'intégrabilité-(BB) des deux fonctions aléatoires $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$; on a en effet le

Corollaire 1. *Soient $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ deux fonctions aléatoires d'intervalle et supposons que $\boldsymbol{X}_1$ soit continue en $\emptyset$ et intégrable-(BB) dans K. Si l'intégrale (2.2) converge localement uniformément par rapport à $s \in R$, alors $\boldsymbol{X}_2$ est aussi intégrable-(BB) dans K et (2.1) a lieu pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.*

Ainsi avons-nous obtenu une nouvelle condition d'intégrabilité-(BB) des fonctions aléatoires: si $\boldsymbol{X}_1$ est additive-B, (2.2) sera la condition pour (BB)-$\int \boldsymbol{X}_2 \sim \boldsymbol{X}_1$.

Théorème 2. *Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire continue en $\emptyset$ et intégrable-(BB), soit $\boldsymbol{Z}$ son intégrale indéfinie. Si $\boldsymbol{X}^\circ$ est intégrable-(BB), alors $\boldsymbol{Z}^\circ$ l'est aussi et pour tout $J \in \boldsymbol{K}$ on a*

$$(BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}^\circ \sim (BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{Z}^\circ . \tag{2.9}$$

Par contre, si $\boldsymbol{Z}^\circ$ est intégrable-(BB), $\boldsymbol{X}^\circ$ l'est aussi et (2.9) a lieu. De plus

$$[(BB)\text{-}\textstyle\int_J \boldsymbol{X} \sim (BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}^\circ] \Leftrightarrow [(BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{Z}^\circ \sim Z(J)] . \tag{2.10}$$

Démonstration. D'après le théorème 6 de [5] et notre théorème 1 nous avons pour les fonctions caractéristiques

$$\int_K |\varphi_X(I, s) - \varphi_Z(I, s)| = 0 ,$$

l'intégrale convergeant localement uniformément, donc aussi

$$\int_K |\psi_X^\circ(I, s) - \psi_Z^\circ(I, s)| = 0 .$$

Les deux premières assertions de notre théorème 2 ainsi que l'équivalence (2.9) découlent de notre théorème 1 et de l'équivalence des conditions (2.2) et (2.4). La relation (2.10) est alors une conséquence immédiate de (2.9) et de la première partie du théorème.

Pour pouvoir démontrer notre théorème principal, nous aurons besoin du lemme suivant que nous allons citer sans démonstration (cf. [3], p. 190 sqq).

Lemme 2. *Si une suite de fonctions caractéristiques tend presque partout vers une fonction caractéristique, alors elle y tend partout, donc aussi localement uniformément.*

Théorème 3. *Soient* $\mathbf{X}_1$ *et* $\mathbf{X}_2$ *deux fonctions aléatoires intégrables-*(BB) *et vérifiant* (2.1) *pour tout* $J \in K$. *Supposons que* $\mathrm{D}X_1(t)$ *existe presque partout dans* K. *Alors* $\mathrm{D}X_2(t)$ *existe presque partout dans* K *et, tant qu'elles existent toutes les deux, l'équivalence* $\mathrm{D}X_1(t) \sim \mathrm{D}X_2(t)$ *a lieu.*

Démonstration. D'après notre théorème 1, (2.1) entraîne (2.7) pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. A l'aide du théorème 15.1 de [4], ou bien par des raisonnements analogues à sa démonstration, nous obtenons à partir de (2.7) pour tout $s \in R$ fixé l'égalité

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1}[\varphi_1(\langle t, t + h), s) - 1 - \varphi_2(\langle t, t + h), s) + 1] = 0 , \tag{2.11}$$

valable pour presque toutes les valeurs de $t \in K$. Désignons par N_s l'ensemble des $t \in K$ pour lesquels (2.11) n'a pas lieu. Soit μ la mesure de Lebesgue. Pour chaque $s \in R$ nous avons $\mu(N_s) = 0$. Ensuite, soit N l'ensemble des $t \in K$ pour lesquels $\mathrm{D}X_1(t)$ n'existe pas; d'après les hypothèses faites, $\mu(N) = 0$ également. Pour $s \in R$, $t \in K - (N \cup N_s)$, nous avons donc

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1}[\varphi_2(\langle t, t + h), s) - 1] = \psi'(t, s) \tag{2.12}$$

où $\psi'(t, s)$ est la seconde fonction caractéristique de $\mathrm{D}X_1(t)$. Désignons par E l'ensemble des paires (t, s), $t \in K$, $s \in R$, pour lesquelles le premier membre de (2.12) n'existe pas, ou bien diffère de $\psi'(t, s)$. Soit ensuite $E_s = \{t : (t, s) \in E\} \subset K$, $E^t = \{s : (t, s) \in E\} \subset$ $\subset R$. Pour chaque $s \in R$ nous avons $E_s = N \cup N_s$, donc $\mu(E_s) = 0$. L'ensemble E est donc de mesure nulle (mesure de Lebesgue dans le plan). Il en résulte alors que $\mu(E^t) = 0$ pour presque toutes les valeurs de t; soit N^* l'ensemble des valeurs exceptionnelles, $\mu(N^*) = 0$. Pour $t \in K - N^*$ nous avons (2.12) pour tout $s \in R - E^t$, donc aussi

$$\lim_{h \to 0+} \exp \{h^{-1}[\varphi_2(\langle t, t + h), s) - 1]\} = \exp \psi'(t, s) \tag{2.13}$$

pour tout $s \in R - E^t$, c'est-à-dire presque partout. Or, en vertu de notre lemme 2, les fonctions caractéristiques figurant au premier membre de (2.13) tendent vers exp $\psi'(t, s)$ partout (et localement uniformément). Il s'en ensuit donc que $\mathrm{D}X_2^\circ(t)$ existe pour $t \in K - N^*$. Il résulte du théorème 9 de [6] que $\mathrm{D}X_2(t)$ existe pour les mêmes valeurs de t, c'est-à-dire presque partout dans K, c. q. f. d.

Corollaire 2. *L'intégrale-(BB) d'une fonction aléatoire intégrable-(BB) et dérivable admet presque partout une dérivée équivalente $(\sim)$ à la dérivée de la fonction. Par contre, si l'intégrale-(BB) d'une fonction aléatoire intégrable-(BB) est dérivable, la fonction elle-même admet presque partout une dérivée équivalente à la dérivée de son intégrale.*

Nous verrons plus tard que les résultats du théorème 3 et du corollaire 2 ne peuvent plus être améliorés.

3. FONCTIONS ALÉATOIRES HOMOGENES

Nous allons montrer dans ce court paragraphe que pour les fonctions aléatoires homogènes l'intégrabilité-(BB) est en principe équivalente à la dérivabilité. Dans ce cas spécial, l'existence de la dérivée pour un seul $t \in K$ implique déjà la dérivabilité.

Théorème 4. *Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire homogène et dérivable dans K. Alors $\boldsymbol{X}$ est aussi intégrable-(BB) dans K et pour son intégrale-(BB) indéfinie $\boldsymbol{Z}$ on a partout dans K*

$$\mathrm{D}Z(t) \sim \mathrm{D}X(t) \in \mathfrak{X} . \tag{3.1}$$

Démonstration. Comme $\boldsymbol{X}$ est homogène, la loi de répartition de $\mathrm{D}X(t)$ ne dépend pas de t; la relation $\mathrm{D}X(t) \in \mathfrak{X}$ résulte des raisonnements cités dans [6], paragraphe 4. Soit $\psi(s)$ la seconde caractéristique de $\mathrm{D}X(t)$. A chaque $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, on peut donc associer un nombre positif δ tel que

$$\{I \in \boldsymbol{K},\ |I| < \delta,\ |s| \leqq \sigma\} \Rightarrow \{|\psi(I, s) - |I|\ \psi(s)| < \varepsilon|I|\} . \tag{3.2}$$

Soit $J \in \boldsymbol{K}$; pour chaque partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle J, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, on a alors pour $|s| \leqq \sigma$ l'inégalité

$$|\sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s) - |J|\ \psi(s)| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\psi(I, s) - |I|\ \psi(s)| < \varepsilon \sum_{\mathscr{D}} |I| = \varepsilon|J| \leqq \varepsilon|K| . \tag{3.3}$$

En raison de (3.3) il existe pour $\nu(\mathscr{D}) \to 0$ une limite (localement uniforme par rapport à $s \in R$)

$$\lim \sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s) = |J|\ \psi(s) ,$$

de sorte que l'intégrale (BB)-$\int_J \boldsymbol{X} \sim Z(J)$ existe; sa seconde caractéristique étant précisément égale à $|J|\ \psi(s)$. Comme J était quelconque, $\boldsymbol{X}$ est bien intégrable-(BB) dans K. L'équivalence (3.1) est évidente.

Théorème 5. *Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire homogène et intégrable-(BB) dans K, soit $\boldsymbol{Z}$ son intégrale-(BB) indéfinie. Alors $\boldsymbol{X}$, et donc aussi $\boldsymbol{Z}$, est dérivable dans K,* (3.1) *étant valable partout dans K.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $DZ(t)$ existe pour un $t \in K$ au moins. D'après le théorème 9 de [5] la fonction aléatoire $\boldsymbol{Z}$ est aussi homogène, de sorte que sa seconde caractéristique $\psi_Z(I, s)$ est, d'après les théorèmes 7 et 4 de [5], de la forme $\psi_Z(I, s) = |I| \psi(s)$. La fonction aléatoire $\boldsymbol{Z}$ est donc dérivable dans K, en vertu du corollaire 2 $DX(t)$ existe presque partout, or cela implique déjà la dérivabilité de $\boldsymbol{X}$ dans K; l'équivalence (3.1) est évidente.

4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Dans ce dernier paragraphe, nous allons montrer, en procédant plutôt par voie d'exemples, certaines conséquences que l'on peut déduire de la théorie des fonctions aléatoires d'intervalle et de leurs dérivées, pour la théorie des équations différentielles stochastiques, surtout en ce qui concerne les rapports mutuels qui existent entre les deux interprétations que nous avons développées dans nos travaux antérieurs [5] d'une part et [10] (équations ,,avec erreur") d'autre part.

Considérons, pour fixer les idées, l'intervalle $K = \langle 0, 1)$, et dans K une équation différentielle stochastique

$$\delta X(t) \sim F(t, \mathrm{d}t) . \tag{4.1}$$

Nous acceptons, comme d'habitude, la condition à l'origine $X(0) \sim V\{0\}$.

La situation initiale étant la même pour les deux interprétations en question, nous allons regarder maintenant de plus près le problème de l'intégrabilité de l'équation (4.1). Nous rappelons que (4.1) est intégrable au sens de [5], lorsqu'une fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ (additive) existe telle que

$$X(t) \sim (BB)\text{-}\int_{\langle 0\ t)} \boldsymbol{F} \tag{4.2}$$

pour chaque $t \in K$; (4.1) est intégrable au sens de [10], si $\boldsymbol{X}$ existe telle que pour tout $t \in K$ on ait

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_2\psi_X(t, s) = \lim_{h \to 0+} h^{-1} \psi_F(t, h; s) = \psi'_F(t, s) ; \tag{4.3}$$

(pour la notation voir [10]).

A) Supposons tout d'abord que nous nous bornons aux fonctions *dérivables* (au sens de [6]), c'est-à-dire telles que

$$\psi_F(t, h; s) = h\psi'_F(t, s) + h\omega_F(h, t, s) ,$$
$${}_3\psi_X(t, h; s) = h\psi'_X(t, s) + h\omega_X(h, t, s) ,$$

où $|\omega_X(h, t, s)| < \varepsilon$, resp. $|\omega_F(h, t, s)| < \varepsilon$, pourvu que $0 < h < \delta = \delta(\varepsilon, \sigma)$, $t \in K$, $|s| \leqq \sigma$. Sous ces conditions, le point de vue de [5] est effectivement plus général que celui de [10], c'est-à-dire:

(a) *si une équation* (4.1) *est intégrable au sens de* [10], *elle l'est aussi au sens de* [5];

(b) *il existe des équations intégrables au sens de* [5] *qui ne le sont pas au sens de* [10].

Pour établir la validité de la première partie (a), il suffit d'appliquer le théorème 11 de [6]; quant à la seconde (b), voici un exemple qui la prouve:

Soit T un ensemble fini non-vide, $T \subset K$. Posons

$$\psi_F(t, h; s) = -s^2 h \quad \text{pour} \quad t \in K - T,$$
$$\psi_F(t, h; s) = -|s|\, h \quad \text{pour} \quad t \in T.$$

Alors $\mathbf{F}$ est intégrable-(BB) dans K et pour les intégrales (4.2), solution de (4.1), nous avons ${}_3\psi_X(t, h; s) = -s^2 h$ pour tout $t \in K$. Or, (4.3) n'est pas vérifié, car $\psi_F'(t, s) = -|s|$ pour $t \in T$ et $\psi_F'(t, s) = -s^2$ pour $t \in K - T$, tandis que $\psi_X'(t, s) = -s^2$ partout dans K. Il est bien évident qu'il n'existe pas de fonction $\psi(t, s)$ telle que $\partial\psi(t, s)/\partial t = \psi_F'(t, s)$ partout.

Avant de passer à d'autres cas ajoutons encore une remarque. Nous savons déjà d'après notre théorème 3 que l'équivalence (au sens de $\sim$) des intégrales-(BB) de deux fonctions aléatoires d'intervalle entraîne l'équivalence presque partout de leurs dérivées (à condition que celles-ci existent). L'exemple précédent fait voir qu'on ne peut pas obtenir l'équivalence des dérivées *partout*, même en supposant la dérivabilité (au sens de [6]) des deux fonctions.

B) Supposons maintenant que $\mathbf{F}$ seule soit *dérivable*, mais que $\psi_F'(t, s)$ soit une fonction *continue* des deux variables $t \in K$, $s \in R$. Alors l'intégrale $\int_0^t \psi_F'(u, s)\, du$ existe pour chaque $t \in K$, et c'est une fonction continue de s. Donc, d'après le théorème de la seconde partie de [8], $\mathbf{F}$ est intégrable-(BB) dans K, donc (4.1) est intégrable au sens de [5]. De plus

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \psi_F'(u, s)\, du = \psi_F'(t, s)$$

pour tout $t \in K$, de sorte que (4.1) est intégrable aussi au sens de [10], avec la même solution.

Il est clair que la continuité de $\psi_F'(t, s)$ est une condition suffisante, mais non pas nécessaire. Par contre, il est impossible d'écarter l'hypothèse de la dérivabilité de $\mathbf{F}$, comme le montre l'exemple suivant. Soit

$$\psi_F(t, h; s) = -s^2 h + ish^{-1} \quad \text{si} \quad t < \tfrac{1}{2} < t + h,$$
$$\psi_F(t, h; s) = -s^2 h \quad \text{autrement.}$$

Alors

$$\psi_F'(t, s) = \lim_{h \to 0+} h^{-1} \psi_F(t, h; s) = -s^2$$

pour tout $t \in K$. Il en résulte que l'équation (4.1) correspondante est intégrable au sens de [10] avec la solution $\mathbf{X}$ telle que ${}_2\psi_X(t, s) = -s^2 t$. Cependant, $\mathbf{F}$ n'est pas intégrable-(BB) dans K: aucune intégrale (BB)-$\int_{\langle a,b)} \mathbf{F}$, $a < \frac{1}{2} < b$, ne peut exister.

Cet exemple nous fait voir également que, en général, il y a aussi des équations intégrables au sens de [10] qui ne le sont pas au sens de [5]. La proposition finale de [8] exige donc l'hypothèse (implicitement admise dans [8]) de *dérivabilité*.

Littérature

[1] *J. C. Burkill:* Functions of intervals. Proceedings London Math. Soc. Ser. II., *22* (1924), 275—310.

[2] *В. И. Гливенко:* Курс теории вероятностей. Москва-Ленинград, 1939.

[3] *M. Loève:* Probability Theory. New York 1955.

[4] *L. A. Ringenberg:* The theory of the Burkill integral. Duke Math. Journal, *15* (1948), 239—270.

[5] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle. Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 583—609.

[6] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle, II. Czechoslovak Math. Journal, *10* (1960), 457—473.

[7] *F. Zítek:* Poznámka k teorii (*BB*)-integrálu. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 83—89.

[8] *F. Zítek:* Sur certaines propriétés infinitésimales des fonctions aléatoires. Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Praha 1960, 837—843.

[9] *F. Zítek:* Burkillovy integrály závislé na parametru. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 165—176.

[10] *F. Zítek:* Equations différentielles stochastiques. Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 465—472.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА, III

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

Статья является продолжением одноименных статей [5] и [6]. Она начинается с одной леммы из теории интеграла Бэркилла. После этого продолжается исследование связи между производной случайной функции интервала и ее (*BB*)-интегралом. Главным результатом является теорема 3, которая представляет собой аналог известной теоремы Сакса (см. [4], теорема 15.2): когда все (*BB*)-интегралы двух функций совпадают, то совпадают почти всюду и их производные (если одна из них существует почти всюду). В третьем параграфе показано, что для однородных случайных функций существование производной и (*BB*)-интегрируемость эквивалентны. В последнем параграфе сделаны некоторые замечания по вопросам теории стохастических дифференциальных уравнений, рассматриваемой с точки зрения работ [5] и [10].