Czechoslovak Mathematical Journal

Bohumil Cenkl

Homographies conservant l'élément du troisième ordre d'une surface dans un espace à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 288–293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100516

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

HOMOGRAPHIES CONSERVANT L'ÉLÉMENT DU TROISIÈME ORDRE D'UNE SURFACE DANS UN ESPACE À CONNEXION PROJECTIVE

BOHUMIL CENKL, Praha

(Reçu le 29 juin 1960)

Dans ce travail, on étudie deux types d'homographies conservant l'élément du troisième ordre d'une surface d'une manière analogue au cas de l'espace projectif. On trouve cependant qu'un seul de ces deux types peut être généralisé a l'espace à connexion projective, tandis que l'autre type ne peut être généralisé que dans le cas d'un espace sans torsion. Sont aussi étudiées certaines propriétés des homographies du second type.

1. Dans un espace P_3 à trois dimensions à connexion projective, soit donnée une surface π avec deux couches différentes d'asymptotiques. Nous pouvons choisir le repère sur la surface d'une telle façon que la connexion soit donnée par les équations (voir A. ŠVEC [5])

$$\begin{aligned}
(1)\qquad \mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 A_0 + \mathrm{d}u\, A_1 + \mathrm{d}v\, A_2\,,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta\, \mathrm{d}u\, A_2 + (1-h)\,\mathrm{d}v\, A_3\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma\, \mathrm{d}v\, A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\,\mathrm{d}u\, A_3\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3\,,\\
\omega_i^j &= a_{i1}^j\,\mathrm{d}u + a_{i2}^j\,\mathrm{d}v\,,\quad [\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] \neq 0\,,\quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0\,.
\end{aligned}$$

Les changements admissibles des paramètres asymptotiques u, v et des bases locales sont

$$(2)\qquad u = u(\bar{u})\,,\quad v = v(\bar{v})\,,$$

où

$$\begin{aligned}
(3)\qquad &\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}\bar{u}\,,\quad \mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}\bar{v}\left(\text{c.-à-d. } r = u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\,,\quad s = v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right),\\
&A_0 = \alpha_0^0 \bar{A}_0\,,\quad A_1 = \alpha_1^0 \bar{A}_0 + r^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_1\,,\quad A_2 = \alpha_2^0 \bar{A}_0 + s^{-1}\alpha_0^0 A_2\,,\\
&A_3 = \alpha_3^0 \bar{A}_0 + \alpha_3^1 \bar{A}_1 + \alpha_3^2 \bar{A}_2 + r^{-1}s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_3\,,\quad (\alpha_0^0)^4 = r^2 s^2\,,\\
&\alpha_1^0 = (1-h)\, s\alpha_3^2\,,\quad \alpha_2^0 = (1+h)\, r\alpha_3^1\,.
\end{aligned}$$

Dans la suite nous emploierons la notation

$$(4)\qquad a = a_{01}^0 - a_{11}^1 - a_{21}^2 + a_{31}^3\,,\quad b = a_{02}^0 - a_{12}^1 - a_{22}^2 + a_{32}^3\,.$$

2. Considérons, en un point A_0 de la surface π, l'espace projectif local à trois dimensions $P_3(A)_0$. Soit

$$v = v(u) \tag{5}$$

une courbe γ sur la surface π, passant par le point A_0, Désignons par $A_0(u, v(u))$ son point mobile, soit $A_0 = A_0(0, v(0))$. Soit γ^* son développement dans l'espace local $\mathrm{P}_3(A_0)$; γ^* sera formée de points que nous dénoterons par $A(u, v(u))$, soit $A = A(0, v(0))$. Les développements de toutes les courbes γ de la surface π qui passent par le point A_0 forment dans l'espace $P_3(A_0)$ un système de courbes passant par le point A, toutes les courbes de ce système ayant au point A un plant tangent commun. Désignons par $\mathfrak{A}$ le système en question. Nous allons chercher maintenant une homographie H de l'espace $P_3(A_0)$ sur lui-même telle qu'il existe pour chaque courbe $\gamma^* \in \mathfrak{A}$ une autre courbe $\gamma_1^* \in \mathfrak{A}$ telle que $H\gamma^*$ et γ_1^* aient un contact géométrique du troisième ordre au point A. La courbe γ_1^* est formée de points $A(u, \bar{v}(u))$; elle est développement d'une courbe $A_0(u, \bar{v}(u))$ passant par le point A_0 sur la surface π. Pour que $H\gamma^*$ et γ_1^* aient un contact géométrique du troisième ordre il faut et il suffit qu'il existe des fonctions $\varrho(u)$ et $w(u)$ telles que l'on ait

$$H\,\frac{\mathrm{d}^k A(u, v(u))}{\mathrm{d}u^k} = \frac{\mathrm{d}^k\{\varrho(u)\, A[w(u), \bar{v}(w(u))]\}}{\mathrm{d}u^k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

pour $u = 0$. Si l'homographie H est données par les équations

$$HA_i = \sum_{k=0}^{3} \alpha_{ik} A_k \quad (i = 0, 1, 2, 3)\,, \tag{6}$$

nous pouvons écrire évidemment

$$H\,\frac{\mathrm{d}^k A_0(u, v(u))}{\mathrm{d}u^k} = \frac{\mathrm{d}^k\{\varrho(u)\, A_0[w(u), \bar{v}(w(u))]\}}{\mathrm{d}u^k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{7}$$

Cela signifie que les surfaces π et $H\pi$ ont un contact géométrique du troisième ordre. En posant $k = 0$ dans l'équation (7) nous obtenons

$$w(0) = 0\,, \quad \alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = 0\,, \tag{8}$$

et si nous choisissons

$$\alpha_{00} = 1\,, \tag{9}$$

nous avons $\varrho(0) = 1$. Si nous demandons que la seconde des équations (7) soit vérifiée, nous obtenons (avec la notation

$$\varrho' = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u}\,, \quad w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\,, \quad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\,, \quad \bar{v}' = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}w}\Big)$$

les conditions

$$\begin{gathered} \varrho' = a_{01}^0(1 - w') + a_{02}^0(v' - \bar{v}'w') + \alpha_{10} + v'\alpha_{20}\,, \\ w' = \alpha_{11} + v'\alpha_{21}\,, \quad \bar{v}'w' = \alpha_{12} + v'\alpha_{22}\,, \quad \alpha_{13} = \alpha_{13} = 0\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Pour que les surfaces π et $H\pi$ aient un contact géométrique du second ordre il faut que l'on ait (en comparant le coefficient de A_3 dans (7) pour $k = 2$)

$$v'\alpha_{33} = \alpha_{12}\alpha_{11} + v'(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + v'^2\alpha_{22}\alpha_{21} . \tag{11}$$

Or, cette équation doit être vérifiée identiquement pour toutes les valeurs de v', c'est pourquoi nous avons

$$\alpha_{11}\alpha_{12} = \alpha_{22}\alpha_{21} = 0 , \quad \alpha_{33} = \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} . \tag{12}$$

Maintenant, nous distinguons deux cas:

a) soit $\alpha_{11} \neq 0$, alors en vertu de (7) pour $k = 2$, nous obtenons à l'aide de (12)

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 , \quad \alpha_{33} = \alpha_{11}\alpha_{22} , \tag{13}$$

$$\begin{aligned} w'' = {} & a_{11}^1\alpha_{11} + a_{12}^1v'\alpha_{11} + \gamma v'^2\alpha_{11} + 2v'\alpha_{31} - a_{11}^1\alpha_{11}^2 - a_{12}^1v'\alpha_{11}\alpha_{22} - \gamma\alpha_{22}^2v'^2 - \\ & - \alpha_{11}\alpha_{10} - v'\alpha_{20}\alpha_{11} - \alpha_{11}(a_{01}^0 + a_{02}^0v' - a_{01}^0\alpha_{11} - a_{02}^0\alpha_{22}v' + \alpha_{10} + v'\alpha_{20}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}''\alpha_{11}^2 = {} & \beta\alpha_{22} + v''\alpha_{22} + a_{21}^2v'\alpha_{22} + a_{22}^2v'^2\alpha_{22} + 2v'\alpha_{32} - 2v'^2\frac{\alpha_{31}\alpha_{22}}{\alpha_{11}} + \\ & + \gamma\frac{v'^3\alpha_{22}^3}{\alpha_{11}} - v'\alpha_{22}a_{11}^1 - v'^2a_{12}^1\alpha_{22} - \gamma\alpha_{22}v'^3 + a_{11}^1\alpha_{11}\alpha_{22}v' + a_{12}^1v'^2\alpha_{22}^2 - \\ & - \beta\alpha_{11}^2 - \alpha_{11}a_{21}^2v'\alpha_{22} - a_{22}^2\alpha_{22}^2v'^2 . \end{aligned}$$

Ensuite on a évidemment

(14)

$$\frac{d^3\varrho A_0}{du^3} = \varrho'''A_0 + (3\varrho''w' + 3\varrho'w'' + w''')\frac{dA_0}{dw} + 3(\varrho'w'^2 + w'w'')\frac{d^2A_0}{dw^2} + (w')^3\frac{d^3A_0}{dw^3} ;$$

$$\begin{aligned} H\frac{d^3A_0}{du^3} \equiv {} & \{(1 - h)\,v'(a_{01}^0 + a_{02}^0v' + a_{11}^1 + a_{12}^1v' + \gamma v'^2) + 2v'' + \\ & + (1 + h)(a_{01}^0v' + a_{02}^0v'^2 + \beta + v'' + a_{21}^2v' + a_{22}^2v'^2) + 2v'a_{31}^3 + \\ & + 2v'^2a_{32}^3\}\,\alpha_{33}A_3 , \quad \operatorname{mod}(A_0A_1A_2) . \end{aligned} \tag{15}$$

En comparant les coefficients de A_3 dans (14) et (15) nous obtenons la condition pour le contact géométrique au troisième ordre des surfaces π et $H\pi$. Dans l'expression qui en résulte, comparons les coefficients de v', v'^2, v'^3, v'' et du terme absolu, d'une manière analogue aux cas précedents. Nous arrivons aux relations suivantes

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = \varepsilon , \quad \alpha_{22} = \varepsilon^2 , \quad \alpha_{33} = 1 , \quad \varepsilon^3 = 1 ; \\ 3(\alpha_{20} - \alpha_{31}\varepsilon^2) + h\alpha_{31}\varepsilon^2 = b(\varepsilon^2 - 1); \quad 3(\alpha_{10} - \alpha_{32}\varepsilon) - h\alpha_{32}\varepsilon = a(\varepsilon - 1) . \end{gathered} \tag{16}$$

a) Les homographies les plus générales telles que les surfaces π et $H\pi$ aient un contact géométrique du troisième ordre peuvent donc être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} HA_0 &= A_0 ; \\ HA_1 &= \{\alpha_{32}\varepsilon + \tfrac{1}{3}h\alpha_{32}\varepsilon + \tfrac{1}{3}a(\varepsilon - 1)\}\,A_0 + \varepsilon A_1 ; \\ HA_2 &= \{\alpha_{31}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{3}h\alpha_{31}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}b(\varepsilon^2 - 1)\}\,A_0 + \varepsilon^2A_2 ; \\ HA_3 &= \alpha_{30}A_0 + \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + A_3 . \end{aligned} \tag{17}$$

Dans ce cas-ci ($\alpha_{11} \neq 0$), nous avons donc ∞^3 d'homographies jouissant de la propriété en question — nous les appellerons *homographies du premier type.*

b) Si nous supposons maintenant $\alpha_{12} \neq 0$, nous trouvons en vertu de (12)

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0 , \quad \alpha_{33} = \alpha_{12}\alpha_{21} , \tag{18}$$

et ensuite en vertu de (7_2)

$$w'' = \beta\alpha_{21} + v''\alpha_{21} + a^2_{21}v'\alpha_{21} + a^2_{22}v'^2\alpha_{21} + 2v'\alpha_{31} - a^0_{01}v'\alpha_{21} - a^0_{02}v'^2\alpha_{21} + + a^0_{01}v'^2\alpha^2_{21} + a^0_{02}\alpha_{12}v'\alpha_{21} - 2\alpha_{10}v'\alpha_{21} - 2\alpha_{20}v'^2\alpha_{21} - a^1_{11}v'^2\alpha^2_{21} - v'\alpha_{21}a^1_{12}\alpha_{12} ;$$

$$\bar{v}''v'^2\alpha^2_{21} = a^1_{11}\alpha_{12} + a^1_{12}v'\alpha_{12} + \gamma v'^2\alpha_{12} + 2v'\alpha_{32} - a^0_{01}\alpha_{12} - a^0_{02}\alpha_{12}v' - a^2_{21}\alpha_{12} - - a^2_{22}\alpha_{12}v' + a^0_{01}\alpha_{12} + a^0_{02}\alpha_{12}v' + a^1_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}v' + a^1_{12}\alpha^2_{12} - \beta v'^2\alpha^2_{21} - - a^2_{21}\alpha_{12}\alpha_{21}v' - a^2_{22}\alpha^2_{12} - \frac{v''\alpha_{12}}{v'} - 2\alpha_{31}\alpha^2_{12} .$$

Après les substitutions correspondantes comparons les coefficients de A_3 dans les expressions (14) et (15). Une nouvelle comparison des coefficients de v', v'^2, v'^3, v'' dans l'équation ainsi obtenue nous donne (dans la notation $(\beta/\gamma)^{1/3} = k$, $k^{-1} = l$)

$$\begin{gathered} \alpha_{12} = \varepsilon k , \quad \alpha_{21} = \varepsilon^2 l , \quad \alpha_{33} = 1 , \quad h = 0 , \quad \varepsilon^3 = 1 ; \\ 3(\varepsilon k\alpha_{31} - \alpha_{10}) = a - k\varepsilon b ; \quad 3(\varepsilon^2 l\alpha_{32} - \alpha_{20}) = b - \varepsilon^2 la . \end{gathered} \tag{19}$$

L'homographie la plus générale *du second type* peut donc être écrite comme

$$\begin{aligned} HA_0 &= A_0 , \\ HA_1 &= \{\tfrac{1}{3}k\varepsilon b - \tfrac{1}{3}a + \varepsilon k\alpha_{31}\} A_0 + \varepsilon kA_2 , \\ HA_2 &= \{\tfrac{1}{3}l\varepsilon^2 a - \tfrac{1}{3}b + \varepsilon^2 l\alpha_{32}\} A_0 + \varepsilon^2 lA_1 , \\ HA_3 &= \alpha_{30}A_0 + \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + A_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

On voit — cf. (19_1) — que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe und homographie régulière du second type est que l'on ait $h = 0$, c'est-à-dire que la surface se trouve dans un espace sans torsion.*

En effet, nous obtenons la condition $h = 0$ à partir de l'équation $h\alpha_{12}\alpha_{21} = 0$ qui résulte à son tour d'une comparaison des coefficients de v'' dans l'équation

$$H \frac{d^3A_0}{du^3} \equiv \frac{d^3\varrho A_0}{du^3} , \quad \text{mod}\,(A_0A_1A_2) .$$

Nous pouvons introduir les coordonnées locales des points analytiques dans $P_3(A_0)$ par rapport à la base locale dans l'espace $P_3(A_0)$ d'une telle manière que nous ayons

$$X = x_0A_0 + x^1A_1 + x^2A_2 + x^3A_3 . \tag{21}$$

Si nous cherchons les points doubles de l'homographie (20) nous trouvons le point donné par les équations

$$x^3 = 0 , \quad 2x^0 + (\alpha_{20} - \alpha_{10}\alpha_{21})\,x^3 = 0 , \quad 2\alpha_{21}x^0 + (\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{20})\,x^1 = 0 \tag{22}$$

et d'autres points

$$\begin{gathered} \alpha_{10}x^1 + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{30}x^3 = 0 , \quad - x^1 + \alpha_{21}x^2 + \alpha_{31}x^3 = 0 , \\ \alpha_{12}x^1 - x^2 + \alpha_{32}x^3 = 0 . \end{gathered} \tag{23}$$

Posons-nous le question de l'existence d'une homographie perspective (20). Il faut évidemment que l'on ait

$$\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{32} = 0\,, \quad \alpha_{30} + \alpha_{31}\alpha_{10} = 0\,. \tag{24}$$

Nous trouvons ainsi le point double $X = (\varepsilon k\alpha_{20}, 1, -\varepsilon k, (0)$, qui se trouve sur la tangente de Darboux, et le plan double τ déterminé par l'équation

$$3x^1 - 3\varepsilon^2 l x^2 - (\varepsilon^2 la - b - 3\alpha_{20})\, x^3 = 0\,. \tag{25}$$

Considérons maintenant le faisceau monoparamétrique de quadriques osculatrices de Darboux [1]

$$x^0x^3 - x^1x^2 - \tfrac{1}{3}ax^1x^3 - \tfrac{1}{3}bx^2x^3 = \tfrac{1}{2}c_{33}(x^3)^2\,. \tag{26}$$

Nous voyons que le plan τ est le plan polaire du point X par rapport à n'importe quelle quadrique du faisceau (26). Nous en tirons l'énoncé:

Parmi les ∞^3 homographies (20) il existe ∞^1 homographies perspectives K dont le point double X est un point de la tangente de Darboux et dont le plan double τ est le plan polaire du point X par rapport à chacune des ∞^1 quadriques osculatrices de Darboux.

Considérons maintenant les quadriques que nous obtenons en généralisant la définition de Čech de la quadrique de Lie [2], c'est-à-dire les quadriques Q', Q''

$$\begin{gathered} 2x^0x^3 - 2x^1x^2 - ax^1x^3 + \alpha_3(x^3)^2 = 0\,, \\ 2x^0x^3 - 2x^1x^2 - bx^2x^3 + \alpha_3'(x^3)^2 = 0\,, \\ \alpha_3 = \varrho_{21} + \tfrac{1}{2}b(a^2_{21} + a^3_{31} - a^0_{01} - a^3_{31} + \tfrac{1}{2}a) + a^1_{31} - a^0_{21}\,, \\ \alpha_3' = \varrho_{12} + \tfrac{1}{2}a(a^1_{12} + a^3_{32} - a^0_{02} - a^3_{32} + \tfrac{1}{2}b) + a^2_{32} - a^0_{12}\,, \\ 2\varrho_1 = -a\,, \quad 2\varrho_2 = -b\,, \quad \mathrm{d}\varrho_\alpha = \varrho_{\alpha 1}\,du + \varrho_{\alpha 2}\,\mathrm{d}v \quad (\alpha = 1, 2)\,. \end{gathered} \tag{27}$$

Les plans polaires du point double X de l'homographie perspective K par rapport aux quadriques Q', Q'' sont les plans τ', τ'' données par les équations

$$\begin{gathered} 2x^1 - 2\varepsilon^2 lx^2 + (2\alpha_{20} - a\varepsilon^2 l)\, x^3 = 0\,, \\ 2x^1 - 2\varepsilon^2 lx^2 + (2\alpha_{20} + b)\, x^3 = 0\,. \end{gathered} \tag{28}$$

Tous les trois plans τ, τ', τ'' forment un faisceau S dont l'axe est la droite p : $x^3 = 0$, $x^1 - \varepsilon^2 lx^2 = 0$. C'est la tangente de Segre conjugée à la tangente de Darboux sur laquelle se trouve le point double X de l'homographie K. Tous les plans polaires du point X par rapport aux quadriques $Qs = \mu' Q' + \mu'' Q''$ appartiennent manifestement au faisceau S. Il est aisé de voir que *les plans polaires du point X par rapport aux quadriques régulières $Q(v, \lambda)$*

$$(1 + \lambda)\, x^1x^2 - (1 + \lambda)\, x^0x^3 + \tfrac{1}{2}ax^1x^3 + \tfrac{1}{2}\lambda bx^2x^3 + (.)\,(x^3)^2 = 0 \tag{29}$$

et par rapport à la quadrique de Lie généralisée par G. F. Laptev [3] *appartiennent également au faisceau S.*

Litérature

[1] *A. Švec:* Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimension à connexion projective. Czech. Math. Journal, *11* (*86*) 1961, 386—397.

[2] *A. Švec:* Les quadriques de Lie d'une surface plongée dans un espace tridimensionel à connexion projective. Czech. Math. Journal, *11* (*85*) 1961, 134—142.

[3] *Г. Ф. Лаптев:* Гиперповерхность в пространстве проективной связности. ДАН СССР, (1958), 41 — 44.

[4] *E. Čech:* Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in S_3. Reale Accad. Naz. Lincei, *31*, 5, 1°s, fasc. 12° (1922), 469 — 499.

[5] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czech. Math. Journal, *10* (*85*) 1960, 523—550.

Резюме

КОЛЛИНЕАЦИИ, СОХРОНЯЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

БОГУМИЛ ЦЕНКЛ (Bohumil Cenkl), Прага

В работе найдены два типа коллинеаций, сохраняющих элемент третьего порядка поверхности в пространстве с проективной связностью — коллинеации первого и второго рода. Коллинеация первого рода сохраняет асимптотические касательные, в то время как при коллинеации второго рода первой асимптотической касательной соответствует вторая и наоборот. Оказывается, что, в то время как коллинеация первого рода существует и в том случае, когда для изучаемой поверхности не имеет места $h = 0$ (т. е. кручение равно нулю), условие $h = 0$ является необходимым и достаточным для существования коллинеации второго рода. Имеется ∞^3 этих коллинеаций второго рода, среди них существует ∞^1 перспективных коллинеаций $\pi(a)$. Если принять точку A за центр, а плоскость τ за самосопряженную плоскость некоторой перспективной коллинеации λ, то $\lambda = \pi(a)$ для некоторых a, если и только если A есть точка на касательной Дарбу и τ есть полярная плоскость точки A по отношению к произвольной соприкасающейся квадрике Дарбу (26) (к любой из однопараметрической связки этих квадрик).

Пусть A — самосопряженная точка, а τ — самосопряженная плоскость перспективной коллинеации $\pi(a)$. Полярные плоскости точки A по отношению к квадрикам Q', Q'' (27), а, следовательно, и по отношению к квадрике $Q_s = \sigma'Q' + \sigma''Q''$, к квадрике $Q(v, \lambda)$ (29 и к (30), лежат в одной связке, ось которой — касательная Сегре, сопряженная с касательной Дарбу, на которой лежит точка A.