Vladimír Horák

Contribution à la théorie des déformations projectives des congruences W

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 251–273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100514

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS PROJECTIVES DES CONGRUENCES W

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Reçu le 15 juin 1960)

L'auteur étudie les propriétés des transformations de l'espace à cinq dimensions de Klein (K-transformations) qui correspondent aux homographies tangentes (osculatrices) à la transformation développable des congruences W réalisant une déformation focale, ponctuelle (projective) de ces congruences.

L'étude du contact réalisé entre les variétés des images secondaires des complexes osculateurs par les K-transformations qui correspondent aux homographies osculatrices conduit à la déduction de certaines classes de couples de congruences W en déformation projective (entre autre aussi des couples de congruences R); on détermine l'existence et la généralité de ces classes.

1. Au Mémoire [1] on étudie une congruence non-parabolique L de l'espace projectif P_3 en faisant usage du repère

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \tag{1.1}$$

assujetti à la condition

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1 . \tag{1.2}$$

Le point A_1 (A_2) est le premier (second) foyer et le plan $[A_1A_2A_4]$ ($[A_1\ A_2\ A_3]$) est le premier (second) plan focal de la congruence L.

La congruence L est déterminée dans l'espace P_3 par le système d'équations différentielles

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 + \omega_{i4}A_4 , \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.3}$$

où

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0 , \quad \omega_{14} = \omega_{23} = 0 . \tag{1.4}$$

Posons

$$\omega_{13} = \omega_1 , \quad \omega_{24} = \omega_2 . \tag{1.5}$$

Si les points A_3 et A_4 sont situés sur les transformées de Laplace de la droite $[A_1A_2]$ de L, on a ([1], (1.11))

$$(1.6) \qquad \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{34} = \beta_2\omega_1\,, \quad \omega_{43} = \beta_1\omega_2\,.$$

Supposons que les nappes focales de la congruence L ne sont pas développables, alors

$$(1.7) \qquad \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0\,.$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1.6) sont ([1], (1.18))

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} [\omega_{32}\omega_1] + [\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\,\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] &= 0\,,\\ -[\omega_{41}\omega_1] + [\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33})\,\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0\,. \end{aligned}$$

Les formes

$$(1.9) \quad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\,\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2\,\frac{\omega_1^3}{\omega_2}\,,$$

liées par l'identité

$$(1.10) \qquad \varphi\,.\,\varphi^* = F_1\,.\,F_2$$

et les équations

$$(1.11) \qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,, \quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0$$

constituent *l'élément linéaire projectif* de la congruence L(v. [1], p. 263); la forme φ est appelée *forme ponctuelle*, φ^* – *forme planaire* et F_1 (F_2) – première (seconde) *forme focale*. L'équation $(1.11)_1$ ($(1.11)_2$) est l'équation différentielle des asymptotiques de la première (seconde) surface focale (A_1) ((A_2)).

Si Lest une congruence W, alors ([2], p. 403)

$$(1.12) \qquad \alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$$

et

$$(1.13) \qquad \varphi = \varphi^*\,;$$

les équations différentielles des asymptotiques des deux surfaces focales ne diffèrent que par un facteur non-nul.

D'après [4] *le complexe osculateur* Ω de la congruence L(toujours supposée W) le long de la génératrice $[A_1A_2]$ est déterminé par la relation

$$(1.14) \qquad \Omega = {}^1\sigma(\beta_1[A_1A_3] - \alpha_1[A_2A_4]) = {}^2\sigma(\alpha_2[A_1A_3] - \beta_2[A_2A_4])\,, \quad {}^1\sigma\,,\ {}^2\sigma \neq 0$$

et l'on a

$$(1.15) \qquad \mathrm{d}\Omega = a[A_1A_3] - b[A_2A_4] + c[A_1A_2]\,,$$

$$(1.16) \quad \mathrm{d}^2\Omega = (\mathrm{d}c + a\omega_{32} + b\omega_{41} + \overline{c\omega_{11} + \omega_{22}})[A_1A_2] + (\mathrm{d}a + \overline{a\omega_{11} + \omega_{33}})\,.\,[A_1A_3] + (\mathrm{d}b + \overline{b\omega_{22} + \omega_{44}})[A_2A_4] + (\overline{a\beta_2 - b\alpha_2}\omega_1 + c\omega_2)[A_1A_4] + (\overline{a\alpha_1 - b\beta_1}\omega_2 - c\omega_1)[A_2A_3]$$

où

$$a = \mathrm{d}({}^1\sigma\beta_1) + {}^1\sigma\beta_1(\omega_{11} + \omega_{33}), \quad b = \mathrm{d}({}^1\sigma\alpha_1) + {}^1\sigma\alpha_1(\omega_{22} + \omega_{44}),$$
$$c = {}^1\sigma(\beta_1\omega_{32} + \alpha_1\omega_{41}).$$

Les images secondaires de Klein des complexes osculateurs forment dans l'espace à cinq dimensions de Klein une variété (Ω) qui est une surface (courbe) si les nappes focales de la congruence L ne sont pas (sont) réglées es L n' appartient pas à un complexe linéaire. La surface (Ω) possède un réseau conjugué dont l'équation différentielle est identique à l'équation différentielle des asymptotiques ([4], ch. 4 et 6).

La surface (Φ), qui est l'image de Klein de la congruence L, est située sur l'hyperquadrique de Klein (K-quadrique) et possède aussi un réseau conjugué. L'espace tangent $\bar{P}_2^\Phi$, ou osculateur $\bar{P}_4^\Phi$, de la surface (Φ) est déterminé par les points $[A_1A_2]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$ ou $[A_1A_2]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, $\lambda[A_1A_3] + [A_2A_4]$, $\beta_1/\alpha_1 = \alpha_2/\beta_2 = \lambda$, comme il résulte des relations

$$\mathrm{d}[A_1A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3], \tag{1.17}$$
$$\mathrm{d}^2[A_1A_2] = (\mathrm{d}\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \overline{\omega_{11} + \omega}{}_{22}^2 + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2)[A_1A_2] + $$
$$+ (\mathrm{d}\omega_2 + \overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}}\omega_2)[A_1A_4] - (\mathrm{d}\omega_1 +$$
$$+ \overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}}\omega_1) \,.\, [A_2A_3] + (\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)[A_1A_3] +$$
$$+ (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)[A_2A_4] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4].$$

2. Outre la congruence L nous allons considérer une autre congruence L' non-parabolique dont les surfaces focales ne sont pas développables. Nous supposons pour la congruence L' les notations analogues à celles employées pour L, en indiquant avec des accents les expressions relatives à L'. Le repère de la congruence L' soit particularisé d'une manière analogue comme pour L.

Soient tout d'abord L et L' des congruences arbitraires.

La transformation développable T des congruences L et L' est déterminée par les équations

$$\omega_1 = \omega_1', \quad \omega_2 = \omega_2' \tag{2.1}$$

et *l'homographie* générale H *tangente* à cette transformation est donnée en coordonnées des droites par ([1], p. 268)

$$\begin{aligned} H[A_1A_2] &= [A_1'A_2'], \\ H[A_1A_3] &= \varrho^2[A_1'A_3'] + \varrho\,\mu_1[A_1'A_2'], \\ H[A_2A_4] &= \varrho^{-2}[A_2'A_4'] - \varrho^{-1}\,\mu_2[A_1'A_2'], \\ H[A_1A_4] &= [A_1'A_4'] + \lambda_2[A_1'A_2'], \\ H[A_2A_3] &= [A_2'A_3'] - \lambda_1[A_1'A_2'], \\ H[A_3A_4] &= [A_3'A_4'] + (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)[A_1'A_2'] + \lambda_1[A_1'A_4'] - \\ &\quad - \lambda_2[A_2'A_3'] - \varrho\,\mu_2[A_1'A_3'] + \varrho^{-1}\,\mu_1[A_2'A_4'], \\ &\quad \varrho \neq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

M. E. ČECH a introduit au Mémoire [1] les classes suivantes de transformations développables (de déformations projectives du premier ordre): *déformations ponctuelles* ou *planaires*, caracterisées par la relation $\varphi = \varphi'$ ou $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$, *déformations focales* de première resp. seconde espèce, caracterisées par la relation $F_1 = F'_1$ resp. $F_2 = F'_2$, et enfin *déformations asymptotiques* de la première resp. seconde espèce, les caracterisées par $\alpha_1\beta'_2 = \alpha'_1\beta_2$ resp. $\alpha_2\beta'_1 = \alpha'_2\beta_1$.

On obtient par un calcul simple d'après [1], p. 273, que les homographies tangentes relatives aux quatre premières des déformations mentionnées sont déterminées par les relations:

$$(2.3)_{1-4} \qquad \text{pour} \begin{pmatrix} \varphi = \varphi' \\ \varphi^* = \varphi^{*\prime} \\ F_1 = F'_1 \\ F_2 = F'_2 \end{pmatrix} \text{ on a } \begin{pmatrix} \varrho^2_\varphi = \dfrac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \dfrac{\alpha'_2}{\alpha_2} \\ \varrho^2_{\varphi^*} = \dfrac{\beta'_1}{\beta_1} = \dfrac{\beta_2}{\beta'_2} \\ \varrho^2_{F_1} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \dfrac{\beta'_1}{\beta_1} \\ \varrho^2_{F_2} = \dfrac{\alpha'_2}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_2}{\beta'_2} \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{arb.}$$

La transformation développable (2.1) est une déformation asymptotique de $1^{\text{ère}}$ (2^{e}) espèce si elle induit une transformation asymptotique des premières (secondes) surfaces focales des congruences L et L'.

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable (2.1) soit une *déformation projective* des congruences L et L' est l'existence d'une quantité ϱ^2 satisfaisant aux conditions

$$(2.4) \qquad \alpha'_1 = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha'_2 = \varrho^2\alpha_2\,, \quad \beta'_1 = \varrho^2\beta_1\,, \quad \beta'_2 = \varrho^{-2}\beta_2\,,$$

ou en d'autre termes l'invariance de l'élément linéaire projectif.

Si L et L' sont des congruences W, on obtient de ce qui précède les résultats suivants:

Si la transformation développable est une déformation asymptotique de la première espèce, elle est en même temps une déformation asymptotique de la seconde espèce et inversement. On peut alors introduire pour les congruences W la notion de déformation asymptotique (totale).

Si la transformation T est une déformation poctuelle, elle est en même temps une déformation planaire et inversement, comme il résulte de (1.13); mais les homographies relatives à ces déformations ne sont pas égales. S'il existe une homographie qui réalise une déformation ponctuelle et en même temps une déformation planaire alors elle réalise aussi les deux déformations focales et inversement; T est une déformation projective et en même temps une déformation asymptotique.

Si T est une déformation asymptotique, alors en général elle n'est ni déformation ponctuelle (et par suite elle n'est pas une déformation planaire) ni déformation focale.

Pourqu'une déformation asymptotique soit une déformation projective, il est nécessaire et il suffit qu'elle soit en même temps encore une des déformations (2.3).

3. Dans ce chapître on étudie les propriétés des déformations ponctuelles, planaires et focales des congruences L et L' en supposant que L et L' sont des congruences W.

Le plan tangent $\bar{P}_2^{\Phi}$ *à la surface* (Φ) *passe par la K-transformation relative à l'homographie* (2.2) (*tangente à la transformation développable* (2.1)) *dans le plan tangent à la surface* (Φ'), comme il résulte du chap. 1 *et les points* $[A_1A_2]$ *et* $[A'_1A'_2]$ *se transforment l'un dans l'autre.* Comme pour la surface $(\Phi) \equiv \{[A_1A_2]\}$ on a

$$(3.1) \qquad H\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = [(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)\,\varrho^2 - 2\varrho\mu_2\omega_1\omega_2][A'_1A'_3] + \\ + [(\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)\,\varrho^{-2} + 2\varrho^{-1}\mu_1\omega_1\omega_2][A'_2A'_4] + \\ + \text{comb. lin.}\,([A'_1, A'_2], \lambda[A'_1A'_4] + [A'_2A'_3], [A'_3A'_4])\,,$$

la K-transformation mentionnée ne convertit pas, en général, l'espace osculateur $\bar{P}_4^{\Phi}$ de la surface (Φ) dans l'espace osculateur $\bar{P}_4^{\Phi'}$ de (Φ'). Les espaces osculateurs $H\bar{P}_4^{\Phi}$ et $\bar{P}_4^{\Phi'}$ ont en commun l'espace

$$(3.2) \qquad \bar{P}_3 \equiv \{[A'_1A'_2], [A'_1A'_4], [A'_2A'_3], [A'_3A'_4]\}$$

à trois dimensions.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace osculateur $\bar{P}_4^{\Phi}$ *se transforme par l'homographie tangente dans l'espace* $\bar{P}_4^{\Phi'}$ *est*

$$(3.3) \qquad (\overline{\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2\varrho^2} - 2\varrho\mu_2\omega_1\omega_2) : (\overline{\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2\varrho^{-2}} + 2\varrho^{-1}\mu_1\omega_1\omega_2) = \\ = (\beta'_1\omega_2^2 - \alpha'_2\omega_1^2) : (\alpha'_1\omega_2^2 - \beta'_2\omega_1^2)\,.$$

Une comparaison des coefficients de $\omega_1^i\omega_2^k$ $(i, k = 1, 2, 3, 4;\ i + k = 4)$ dans cette relation donne 5 relations dont les deux suivantes sont seules indépendantes $(\mu_1\mu_2 \neq 0)$

$$(3.4) \qquad \varrho^4 = \frac{\alpha_1\beta'_1}{\alpha'_1\beta_1}\left(= \frac{\beta_2\alpha'_2}{\alpha_2\beta'_2} = \frac{\alpha_1\alpha'_2}{\beta_1\beta'_2} = \frac{\beta'_1\beta_2}{\alpha'_1\alpha_2}\right), \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\varrho^2\alpha_2}{\beta_2}\left(= \frac{\alpha'_2}{\varrho^2\beta'_2}\right).$$

L'homographie (2.2) tangente à la transformation développable (2.1) transforme les points Ω et $\mathrm{d}\Omega$ donnés par les relations (1.14) et (1.15) de manière que

$$(3.5) \quad H\Omega = {}^1\sigma\{\beta_1\varrho^2[A'_1A'_3] - \alpha_1\varrho^{-2}[A'_2A'_4] + (\beta_1\varrho\mu_1 + \varrho^{-1}\mu_2\alpha_1)[A'_1A'_2]\}\,,$$

$$(3.6) \qquad H\,\mathrm{d}\Omega = \varrho^2 b_1[A'_1A'_3] - \varrho^{-2}a_1[A'_2A'_4] + [b_1\varrho\mu_1 + a_1\varrho^{-1}\mu_2 + \\ + {}^1\sigma(\beta_1\omega_{32} + \alpha_1\omega_{41})][A'_1A'_2]\,,$$

où

$$(3.7) \qquad a_1 = \mathrm{d}({}^1\sigma\alpha_1) + {}^1\sigma\alpha_1(\omega_{22} + \omega_{44})\,, \quad b_1 = \mathrm{d}({}^1\sigma\beta_1) + {}^1\sigma\beta_1(\omega_{11} + \omega_{33})\,.$$

On voit des relations (3.5) et (3.6) que *les points* $H\Omega$ *et* $H\,\mathrm{d}\Omega$ *sont situés en général dans le plan tangent à la surface* (Ω') *au point* Ω' *et alors la K-transformation relative à l'homographie tangente porte le plan tangent* $\bar{P}_2^{\Omega}$ *dans le plan tangent* $\bar{P}_2^{\Omega'}$ *et on a* $H\Omega \not\equiv \Omega'$; pareillement on peut démontrer: *l'espace osculateur* $\bar{P}_4^{\Omega}$ *passe par la K-transformation mentionnée dans l'espace osculateur* $\bar{P}_4^{\Omega'}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les points géométriques $H\Omega$ et Ω' coïncident est

$$\beta_1\varrho^2 : \alpha_1\varrho^{-2} = \beta'_1 : \alpha'_1\,, \quad \beta_1\varrho\mu_1 + \varrho^{-1}\mu_2\alpha_1 = 0\,, \tag{3.8}$$

ce qui est justement la condition (3.4). On a alors le théorème suivant:

Il y a toujours des homographies tangentes à la transformation développable (2.1) *qui transforment les complex osculateurs Ω et Ω' des droites des congruences L et L' les uns dans les autres; en même temps les K-transformations relatives à ces homographies transforment les espaces osculateurs des surfaces* (Φ) *et* (Φ'), *qui sont les images de Klein des congruences L et L', les uns dans les autres; les K-transformations mentionnées réalisent le contact géométrique du premier ordre des surfaces* (Ω) *et* (Ω'), *mais les tangentes aux courbes du réseau conjugué de* (Ω) *et* (Ω') *ne se changent pas les unes dans les autres. Les quantités ϱ, μ_1, μ_2 ne sont pas fixées par les relations* (3.8) *univoquement, de sorte que pour chaque couple de génératrices qui se correspondent dans la transformation dévéloppable, il y a ∞^3 homographies tangentes ayant la propriété précitée.* Remarquons que la relation $(3.8)_2$ peut être satisfaite de la sorte que $\mu_1\mu_2 \neq 0$ ou $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Si seulement la condition $(3.8)_1$ ou $(3.8)_2$ est vraie, alors le point $H\Omega$ est situé sur la droite joignant les points Ω' et $[A'_1A'_2]$, ou bien les points $[A'_1A'_3]$ et $[A'_2A'_4]$.

Les K-transformations relatives aux homographies tangentes $(2.3)_{1-4}$ qui réalisent une déformation ponctuelle, planaire, et les déformations focales transforment le point Ω de la manière suivante:

$$\varphi = \varphi'\,, \quad H\Omega = {}^1\sigma\left\{\frac{F_1}{F'_1}\,\beta'_1[A'_1A'_3] - \alpha'_1[A'_2A'_4]\right\} = \tag{3.9}$$
$$= {}^2\sigma\left\{\alpha'_2[A'_1A'_3] - \frac{F_2}{F'_2}\,\beta'_2[A'_2A'_4]\right\},$$

$$\varphi^* = \varphi^{*\prime}\,, \quad H\Omega = {}^1\sigma\left\{\beta'_1[A'_1A'_3] - \alpha'_1\,\frac{F_1}{F'_1}\,[A'_2A'_4]\right\} =$$
$$= {}^2\sigma\left\{\alpha'_2\,\frac{F_2}{F'_2}\,[A'_1A'_3] - \beta'_2[A'_2A'_4]\right\},$$

$$F_1 = F'_1\,, \quad H\Omega = {}^1\sigma\,\{\beta'_1[A'_1A'_3] - \alpha'_1[A'_2A'_4]\} =$$
$$= {}^2\sigma\,\frac{\varphi}{\varphi'}\,\{\alpha'_2[A'_1A'_3] - \beta'_2[A'_2A'_4]\}\,,$$

$$F_2 = F'_2\,, \quad H\Omega = {}^1\sigma\,\frac{\varphi}{\varphi'}\,\{\beta'_1[A'_1A'_3] - \alpha'_1[A'_2A'_4]\} =$$
$$= {}^2\sigma\,\{\alpha'_2[A'_1A'_3] - \beta'_2[A'_2A'_3]\}\,.$$

Vu ces relations et les relations (2.3) on a: *la condition* $(3.4)_1$ *ou* $(3.8)_1$ *est une condition nécessaire pour que l'homographie tangente réalise au moins une des* *déformations focales entre les congruences L et L' qui sont W. Les homographies qui réalisent les déformations focales* (tant qu'elles existent), *se trouvent dans l'ensemble des homographies tangentes qui portent les complexes osculateurs l'un dans l'autre.*

Des relations $(3.4)_1$ il résulte

$$(3.10)\quad \varrho^2 = {}^1\lambda\frac{\beta_1'}{\beta_1} = \frac{1}{{}^1\lambda}\frac{\alpha_1}{\alpha_1'} = {}^2\lambda\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = \frac{1}{{}^2\lambda}\frac{\beta_2}{\beta_2'} = {}^3\lambda\frac{\beta_2'}{\beta_1} = \frac{1}{{}^3\lambda}\frac{\alpha_1}{\alpha_2'} = {}^4\lambda\frac{\beta_1'}{\alpha_2} = \frac{1}{{}^4\lambda}\frac{\beta_2}{\alpha_1'},$$

où

$$(3.11)\quad {}^1\lambda^2 = \frac{F_1}{F_1'},\quad {}^2\lambda^2 = \frac{F_2}{F_2'},\quad {}^3\lambda^2 = \frac{F_1}{F_2'},\quad {}^4\lambda^2 = \frac{F_2}{F_1'},\quad ({}^1\lambda{}^2\lambda)^2 = ({}^3\lambda{}^4\lambda)^2,$$

de sorte que

$$(3.12)\qquad {}^1\lambda^2 = 1\,,\quad \text{resp.}\quad {}^2\lambda^2 = 1$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T soit une déformation focale de la première ou seconde espèce.

Soient

$$(3.13)\qquad {}^1\Omega = \beta_1[A_1A_3] - \alpha_1[A_2A_4]\,,\quad {}^2\Omega = \alpha_2[A_1A_3] - \beta_2[A_2A_4]$$

les complexes arithmétiques relatifs au complexe géométrique osculateur Ω de la génératrice $[A_1A_2]$ de L, de sorte que d'après (1.14) on a

$$(3.14)\qquad \Omega = {}^1\sigma{}^1\Omega = {}^2\sigma{}^2\Omega\,.$$

L'homographie tangente déterminée par les relations (3.10) et $\mu_1 = \mu_2 = 0$ transforme les complexes arithmétiques (3.13) de façon que

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} H{}^1\Omega &= \sqrt{\frac{F_1}{F_1'}}\,{}^1\Omega' = \frac{\alpha_1}{\beta_2}\sqrt{\frac{F_2}{F_2'}}\,{}^2\Omega' = \frac{\alpha_1'}{\beta_2'}\sqrt{\frac{F_1}{F_1'}}\,{}^2\Omega'\,,\\ H{}^2\Omega &= \sqrt{\frac{F_2}{F_2'}}\,{}^2\Omega' = \frac{\alpha_2}{\beta_1}\sqrt{\frac{F_1}{F_1'}}\,{}^1\Omega' = \frac{\alpha_2'}{\beta_1'}\sqrt{\frac{F_2}{F_2'}}\,{}^1\Omega'\,. \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable (2.1) *soit une déformation focale de la première ou seconde espèce est: il existe une homographie tangente qui porte les complexes arithmétiques osculateurs ${}^1\Omega$ et ${}^1\Omega'$ ou bien ${}^2\Omega$ et ${}^2\Omega'$ l'un dans l'autre. L'homographie tangente qui réalise la transmation ${}^1\Omega \leftrightarrow {}^1\Omega'$ et l'homographie qui réalise la transformation ${}^2\Omega \leftrightarrow {}^2\Omega'$ ne coïncident pas en général. Si et seulement s'il existe une homographie tangente qui réalise en même temps les deux transformations ${}^1\Omega \leftrightarrow {}^1\Omega'$ et ${}^2\Omega \leftrightarrow {}^2\Omega'$, la transformation développable* (2.1) *est une déformation projective.*

On voit des relations $(3.9)_{1,2}$ que *l'homographie tangente qui réalise une déformation ponctuelle ou planaire ne transforme pas en général des complexes osculateurs l'un dans l'autre. Si, et seulement si, une de ces homographies tangentes réalise* *la transformation $\Omega \leftrightarrow \Omega'$, la transformation développable* (2.1) *est une déformation projective.*

4. Les congruences L et L' soient en déformation projective; alors d'après [1], chap. 7, on peut particulariser le repère (1.1) de telle façon que l'homographie H_0 osculatrice à la transformation développable (2.1) prenne la forme

$$H_0[A_iA_k] = [A'_iA'_k]\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4,\ i \neq k \tag{4.1}$$

et on a outre cela

$$\alpha_1 = \alpha'_1\,, \quad \beta_1 = \beta'_1\,, \quad \alpha_2 = \alpha'_2\,, \quad \beta_2 = \beta'_2\,. \tag{4.2}$$

La particularisation précédente du repère entraîne les relations ($\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$)

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0\,, \tag{4.3}$$

$$\tau_{11} - \tau_{33} = \tau_{22} - \tau_{44} = 0\,, \tag{4.4}$$

$$\tau_{22} - \tau_{11} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2\,, \quad \tau_{32} = \beta_2c_2\omega_1 + \alpha_1c_1\omega_2\,, \quad \tau_{41} = \alpha_2c_2\omega_1 + \beta_1c_1\omega_2\,. \tag{4.5}$$

Dorénavant, soient L et L' des congruences W en déformation projective; alors le repère peut être particularisé de telle façon que (cf. [2], ch. 6)

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha'_1 = \beta'_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = -\alpha'_2 = -\beta'_2 = 1\,, \tag{4.6}$$

et l'on a

$$\tau_{32} = \tau_{41}\,. \tag{4.7}$$

Vu la dernière particularisation, on obtient pour la congruence L (et pareillement pour L') les relations (v. [2], p. 406–408)

$$\omega_{11} + \omega_{44} = \omega_{22} + \omega_{33} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2\,, \tag{4.9}$$

$$\omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2\,, \tag{4.10}$$

$$\omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,, \quad \omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,, \tag{4.11}$$

$$[\mathrm{d}\omega_1] = -z_2[\omega_1\omega_2]\,, \quad [\mathrm{d}\omega_2] = z_1[\omega_1\omega_2]\,, \tag{4.12}$$

$$\omega_{31} = (p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2)\,\omega_1 + \tfrac{1}{2}(z_{21} - z_{12} - 2)\,\omega_2\,, \quad \omega_{42} = \tfrac{1}{2}(z_{12} - z_{21} - 2)\,\omega_1 + (p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2)\,\omega_1\,, \tag{4.13}$$

$$\mathrm{d}t_1 = (s - 3z_1t_1)\,\omega_1 + (r - z_2t_1)\,\omega_2\,, \quad \mathrm{d}t_2 = (r - z_1t_2)\,\omega_1 + (s - 3z_2t_2)\,\omega_2\,, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{d}z_1 = z_{11}\omega_1 + z_{12}\omega_2\,, \quad \mathrm{d}z_2 = z_{21}\omega_1 + z_{22}\omega_2\,, \tag{4.15}$$

$$\Omega = \sigma([A_1A_2] - [A_2A_4])\,, \quad ({}^1\sigma = {}^2\sigma = \sigma)\,,$$

$$\mathrm{d}\Omega = \sigma\{(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)([A_1A_3] + [A_2A_4]) - 2(t_2\omega_1 + t_1\omega_2)[A_1A_2]\} + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\Omega\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\Omega = \sigma\{&[-2\mathrm{d}(t_2\omega_1 + t_1\omega_2) + 2(t_1z_2 - t_2z_1)(\omega_1^2 - \omega_2^2)][A_1A_2] + \\ &+ [\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2) + (t_1\omega_1 + t_2\omega_2)^2][A_1A_3] + [\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2) - \\ &- (t_1\omega_1 + t_2\omega_2)^2][A_2A_4] - 2(t_1\omega_1^2 + 2t_2\omega_1\omega_2 + t_1\omega_2^2)[A_1A_4] + \\ &+ 2(t_2\omega_1^2 + 2t_1\omega_1\omega_2 + t_2\omega_2^2)[A_2A_3] + \\ &+ 2\mathrm{d}\sigma\{(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)\overline{[A_1A_3] + [A_2A_4]} - 2(t_2\omega_1 + t_1\omega_2)[A_1A_2]\} + \\ &+ \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\sigma}\Omega\,.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Supposons

$$(t_1^2 - t_2^2)(t_1'^2 - t_2'^2)\, t_1t_2t_1't_2' \neq 0\,, \tag{4.17}$$

c.-à-d., aucune des congruences L et L' n'est ni une congruence de Segre, ni sa dualisation (en tant que transformation développable) n'est une déformation projective demi-singulière.

La transformée de Laplace (Ω_{+1}) ou (Ω_{-1}) de la surface (Ω) au sens des courbes $\omega_1 + \omega_2 = 0$ ou $\omega_1 - \omega_2 = 0$ décrit le point (v. [4], ch. 6)

$$\begin{aligned}\Omega_{+1} = \tau_1\{&(t_1 + t_2)\overline{[A_1A_3] + [A_2A_4] + 2[A_1A_2]} + \\ &+ (z_1 + z_2)\overline{[A_1A_3] - [A_2A_4]}\}\,, \quad \tau_1 \neq 0\,,\end{aligned} \tag{4.18}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Omega_{-1} = \tau_{-1}\{&(t_1 - t_2)\overline{[A_1A_3] + [A_2A_4] - 2[A_1A_2]} + \\ &+ (z_1 - z_2)\overline{[A_1A_3] - [A_2A_4]}\}\,, \quad \tau_{-1} \neq 0\,,\end{aligned} \tag{4.19}$$

pour lequel on obtient par différentiation

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega_{+1} = \tau_1\{&[\mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_2 + 2(z_1 + z_2)(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)]([A_1A_3] + \\ &+ [A_2A_4] + 2[A_1A_2]) + [\mathrm{d}z_1 + \mathrm{d}z_2 + (t_1 + t_2)(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)]\,. \\ &.([A_1A_3] - [A_2A_4]) + 2(t_1 + t_2)(\omega_2 - \omega_1)([A_1A_4] + \\ &+ [A_2A_3])\} + \frac{\mathrm{d}\tau_1}{\tau_1}\Omega_{+1}\end{aligned} \tag{4.20}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega_{-1} = \tau_{-1}\{&[\mathrm{d}t_1 - \mathrm{d}t_2 + 2(z_1 - z_2)(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)]([A_1A_3] + \\ &+ [A_2A_4] - 2[A_1A_2]) + [\mathrm{d}z_1 - \mathrm{d}z_2 + (t_1 - t_2)(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)]\,. \\ &.([A_1A_3] - [A_2A_4]) + 2(t_1 - t_2)(\omega_1 + \omega_2)([A_2A_3] - \\ &- [A_1A_4])\} + \frac{\mathrm{d}\tau_{-1}}{\tau_{-1}}\Omega_{-1}\,,\end{aligned} \tag{4.21}$$

respectivement.

De (4.4) et (4.5) il résulte

$$z_1 = z'_1\,, \quad z_2 = z'_2\,, \tag{4.22}$$

$$c_1 = t_1 - t'_1\,, \quad c_2 = t'_2 - t_2\,. \tag{4.23}$$

Une *déformation projective* des congruences L et L' est une déformation *singulière* resp. *demi-singulière* de première (seconde) espèce si et seulement si $c_1 = c_2 = 0$, resp. $c_1 = 0 \neq c_2$ ($c_1 \neq 0 = c_2$). Si et seulement si T est une déformation singulière, L et L' sont des congruences R (v. [2], ch. 4).

Dans la suite, nous allons examiner des corrélations entre les surfaces (Ω) et (Ω') qui représentent dans l'espace de Klein des congruences L et L' en déformation projective.

Considérons sur la surface (Ω) une couche de courbes

$$\omega_2 = c\omega_1 \tag{4.24}$$

et sur la surface (Ω') une couche

$$\omega_2 = c'\omega_1\,. \tag{4.25}$$

Désignons par C ou C' la courbe de la couche (4.24), ou bien de (4.25), qui passe par le point Ω, ou Ω' respectivement. Soit H_0C la transformée de la courbe C par l'homographie osculatrice H_0 qui est déterminée par les relations (4.1). Les tangentes des courbes $H_0\,C$ et C' coïncident si et seulement si

$$\frac{t_2 + ct_1}{t'_2 + c't'_1} = \frac{t_1 + ct_2}{t'_1 + c't'_2} \quad (= j)\,, \tag{4.26}$$

et on a

$$H_0\Omega = \frac{\sigma}{\sigma'}\,\Omega'\,, \tag{4.27}$$

$$H_0\,\mathrm{d}\Omega = j\,\frac{\sigma}{\sigma'}\,\mathrm{d}\Omega' + \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} - j\,\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sigma'}\right)\Omega'\,, \tag{4.28}$$

ou j (déterminé par la relation (4.26)) est le coefficient de dilatation du contact géométrique du premier ordre des courbes $H_0\,C$ et C'.[1])

La K-transformation relative à l'homographie H_0 osculatrice à la transformation développable (2.1) *réalise entre les deux surface* (Ω) *et* (Ω') *au point* (4.27) *le contact géométrique du premier ordre et les tangentes aux courbes du réseau conjugué se transforment l'une dans l'autre* (cf. chap. 3, p. 256).

On peut donner à la condition (4.26) la forme

$$(1 - cc')(t'_1t_2 - t_1t'_2) + (c - c')(t_1t'_1 - t_2t'_2) = 0\,. \tag{4.26$'$}$$

[1]) Si (4.24) ou (4.25) est l'équation différentielle des courbes qui correspondent à la décomposition canonique relative à la dualisation en tant que déformation projective de la congruence L ou L' respectivement, alors $t_1 + ct_2 = t'_1 + c't'_2 = 0$; les tangentes des courbes H_0C et C' de la décomposition coïncident et le coefficient de dilatation est donné par $j = \dfrac{t_2^2 - t_1^2}{t_2'^2 - t_1'^2} \cdot \dfrac{t'_2}{t_2}$.

Avant tout, remarquons que la relation de ci-dessus ne peut pas être remplie identiquement, pour c et c' arbitraires. En effet s'il en était ainsi, on aurait nécessairement $t'_1t_2 - t_1t'_2 = t_1t'_1 - t_2t'_2 = 0$ et alors $t_1^2 - t_2^2 = t_1'^2 - t_2'^2 = 0$, ce qui est en contradiction avec la supposition (4.17).

Si l'on a

$$(4.29) \qquad t'_1t_2 - t_1t'_2 = 0 \neq t_1t'_1 - t_2t'_2\,,$$

alors $c = c'$ et les courbes ou leurs tangentes se correspondent par les mêmes valeurs de c et c'. Aucune des congruences L et L' n'est de Segre, car il résulte de $(4.29)_1$ que $t'_1 = \tau t_1$, $t'_2 = \tau t_2$ $(\tau \neq 0)$; en substituant dans la relation $(4.29)_1$ on obtient

$$t_1'^2 - t_2'^2 = \tau^2(t_1^2 - t_2^2) \neq 0\,.$$

Si l'on a

$$(4.30) \qquad t'_1t_2 - t_1t'_2 \neq 0 = t_1t'_1 - t_2t'_2\,,$$

alors $c = 1/c'$, et ni L, ni L' ne sont des congruences de Segre. Ce cas ne diffère qu' inessentiellement du cas précédent et nous allons l'exclure de nos considérations.

Si on a

$$(4.31) \qquad t'_1t_2 - t'_2t_1 \neq 0 \neq t_1t'_1 - t_2t'_2 \neq \pm\,(t'_1t_2 - t_1t'_2)\,,$$

alors $c \neq c'$, pourvu que $c^2 \neq 1 \neq c'^2$. Si $c = 1$ $(c = -1)$, alors $c' = 1$ $(c' = -1)$ et les tangentes aux courbes du réseau conjugué des surfaces (Ω) et (Ω') se changent les unes en les autres.

Finalement, si l'on a

$$(4.32) \quad t_1t'_1 - t_2t'_2 = t'_1t_2 - t_1t'_2 \neq 0\,, \quad \text{resp.} \quad t_1t'_1 - t_2t'_2 = -\,(t'_1t_2 - t_1t'_2) \neq 0\,,$$

on obtient, en se bornant au premier cas, $(t_1 - t_2)(t'_1 + t'_2) = 0$, et alors au moins une des congruences L et L' est de Segre, ce qui est en contradiction avec la supposition (4.17).

Si aucune des congruences L et L' n'est une congruence de Segre, les courbes (4.24) *et* (4.25) *ont le contact analytique si et seulement si*

$$(4.33) \quad c = \frac{t_2'^2 - t_1'^2 - t_2t'_2 + t_1t'_1}{t_1t'_2 - t_2t'_1}\,, \quad c' = \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_1t'_1 + t_2t'_2}{t_1t'_2 - t_2t'_1}\,, \quad t_1t'_2 - t_2t'_1 \neq 0$$

et alors sur chacune des surfaces (Ω) et (Ω') (tant qu'on a $t_1t'_2 - t_2t'_1 \neq 0$) il existe juste une couche de courbes entre lesquelles la K-transformation (4.1) *réalise le contact analytique du premier ordre.*

Si la transformation développable est une déformation projective demisingulière de 1ère ou 2e espèce (c.-à-d. $c_1 = 0 \neq c_2$ ou $c_1 \neq 0 = c_2$) alors la K-transformation (4.1) *réalise le contact analytique entre les courbes pour lesquelles on a*

$$(4.34) \qquad c = \frac{t'_2}{t'_1}\,, \quad c' = \frac{t_2}{t_1}\,, \quad ou \quad c = \frac{t'_1}{t'_2}\,, \quad c' = \frac{t_1}{t_2}\,.$$

Si

$$t_1 = \tau t'_1\,, \quad t_2 = \tau t'_2\,, \quad \tau^2 \neq 0, 1\,, \tag{4.35}$$

les surfaces (Ω) *et* (Ω') *ne possèdent pas des courbes entre lesquelles la K-transformation* (4.1) *réalise le contact analytique* (*du premier ordre*); *le coefficient de dilatation du contact géométrique des courbes* H_0C *et* C' *pour* $c = c'$ *arbitraire est donné par la relation*

$$j = \frac{1}{\tau}\,, \quad \tau = \text{const} \neq 0, 1 \tag{4.36}$$

et est alors constant pour toutes les courbes H_0C *et* C' ($c = c'$, *arb.*) *qui partent d'un même point.* (La preuve de ce que $\tau = \text{const} \neq 0$, voir p. 265).

Dans ce qui précède nous avons considéré les cas où la déformation projective n'était pas singulière. Avant de passer au cas de la déformation singulière, signalons:

(4.37)

$$\begin{aligned} H_0\,\mathrm{d}^2\Omega = {} & \frac{\sigma}{\sigma'} j^2\,\mathrm{d}^2\Omega' + \left[2j\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} - 2j^2\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sigma'} + \sigma\,\mathrm{d}j + \sigma j(j-1)\,\mathrm{d}\omega_1\right]\mathrm{d}\Omega' + (.)\,\Omega' + \\ & + 2\sigma\omega_1\{\omega_1[(t_1z_2 - t_2z_1)(1-c^2) - j^2(t'_1z_2 - t'_2z_1)(1-c'^2)] + \\ & + j(j-1)\,\mathrm{d}(t'_2 + c't'_1)\}[A'_1A'_2] + \sigma j(1-j)\,\omega_1\,\mathrm{d}(t'_1 + c't'_2)([A'_1A'_3] + \\ & + [A'_2A'_4]) + 2\sigma\omega_1^2[j^2(t'_1 + 2t'_2c' + t'_1c'^2) - (t_1 + 2t_2c + t_1c^2)][A'_1A'_4] + \\ & + 2\sigma\omega_1^2[(t_2 + 2t_1c + t_2c^2) - j^2(t'_2 + 2t'_1c' + t'_2c'^2)][A'_2A'_3]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0\Omega_{+1} = {} & \tau_1\{(t_1 + t_2)([A'_1A'_3] + [A'_2A'_4] + 2[A'_1A'_2]) + \\ & + (z_1 + z_2)([A'_1A'_3] - [A'_2A'_4])\}\,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} H_0\Omega_{-1} = {} & \tau_{-1}\{(t_1 - t_2)([A'_1A'_3] + [A'_2A'_4] - 2[A'_1A'_2]) + \\ & + (z_1 - z_2)([A'_1A'_3] - [A'_2A'_4])\}\,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Des relations (4.38) et (4.39), il résulte que la transformation (4.1) porte en général le point Ω_{+1} ou Ω_{-1} dans un point sur la droite $\{\Omega', \Omega'_{+1}\}$ ou $\{\Omega', \Omega'_{-1}\}$ respectivement. Si, et seulement si, pour les congruences L et L' on a $t_1 + t_2 = t'_1 + t'_2 \neq 0 \neq z_1 + z_2$ ou $t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2 \neq 0 \neq z_1 - z_2$, alors

$$H_0\Omega_{+1} = \frac{\tau_1}{\tau'_1}\,\Omega'_{+1} \quad \text{ou} \quad H_0\Omega_{-1} = \frac{\tau_{-1}}{\tau'_{-1}}\,\Omega'_{-1} \tag{4.40}$$

respectivement.

On peut, en raison de ce qui précède, énoncer pour les congruences R le théorème suivant: *Si et seulement si les congruences* L *et* L' *sont en déformation projective singulière* (*c.-à-d.* L *et* L' *sont des congruences* R), *la K-transformation* (4.1) *réalise le contact analytique du second ordre entre les surfaces* (Ω) *et* (Ω') *et en même temps le contact analytique du premier ordre des deux transformations de Laplace de ces surfaces.*

La dernière assertion résulte des relations (4.20) et (4.21) en supposant $t_1 = t'_1$, $t_2 = t'_2$.

Si on a $z_1 + z_2 = 0$, alors

$$H_0\Omega_{+1} = \frac{\tau_1(t_1 + t_2)}{\tau'_1(t'_1 + t'_2)}\,\Omega'_{+1}\,. \tag{4.41}$$

Soit $H_0\Gamma$ ou Γ' la courbe qui passe par le point $H_0\Omega_{+1}$ ou Ω'_{+1} de la surface $H_0(\Omega_{+1})$ ou (Ω'_{+1}) et qui est déterminée par l'équation différentielle $\omega_2 = \gamma\omega_1$ ou $\omega_2 = \gamma'\omega_1$ respectivement; les tangentes de ces deux courbes coïncident si et seulement si $(z_1 + z_2 = 0)$

$$\frac{t_1 + \gamma t_2}{t'_1 + \gamma' t'_2} = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma'} \quad (= j_1)\,, \tag{4.42}$$

et on a

$$H_0\,\mathrm{d}\Omega_{+1} = \frac{\tau_1(t_1 + t_2)}{\tau'_1(t'_1 + t'_2)}\,j_1\,\mathrm{d}\Omega'_{+1} + (\,.\,)\Omega'_{+1}\,. \tag{4.43}$$

En supposant $z_1 + z_2 = 0$, les surfaces $H_0(\Omega_{+1})$ et (Ω'_{+1}) ont le contact géométrique du premier ordre. Autant qu' on a $t_1 + t_2 \neq t'_1 + t'_2 \neq 0 = z_1 + z_2$, les surfaces $H_0(\Omega_{+1})$ et (Ω'_{+1}) ne possèdent pas le contact analytique du premier ordre. D'une manière analogue pour les surfaces (Ω_{-1}) et (Ω'_{-1}) en supposant $z_1 - z_2 = 0$.

On peut alors énoncer le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L' (pas de Segre) soient des congruences D $(z_1 = z_2 = 0)$ en déformation projective c.-à-d. des congruences qui réalisent l'applicabilité projective des deux nappes focales, est: les surfaces $H_0(\Omega_{+1})$ et (Ω'_{+1}) et en même temps les surfaces $H_0(\Omega_{-1})$ et (Ω'_{-1}) ont le contact géométrique $(j_1 \neq 1)$ du premier ordre.

D'après [4], chap. 6, la surface focale (A_1) ou (A_2) est réglée et ses génératrices sont déterminées par l'équation différentielle $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$ si et seulement si $z_1 \mp z_2 = t_1 \mp t_2$ ou $z_1 \mp z_2 = -(t_1 \mp t_2)$ respectivement. En raison des relations (4.22), on obtient le théorème suivant: *Si L et L' sont les congruences R $(t_1 = t'_1, t_2 = t'_2)$ en déformation projective et L possède juste une surface focale réglée, alors nécessairement L' possède aussi juste une surface focale réglée.*

La décomposition canonique des congruences L et L' relative à la déformation projective considérée (v. [1]) est donnée par l'équation $\tau_{11} - \tau_{22} = 0$ et par l'équation différentielle (4.24) ou (4.25) où

$$c = -\frac{t'_1 - t_1}{t'_2 - t_2} \quad \text{ou} \quad c' = -\frac{t'_1 - t_1}{t'_2 - t_2}$$

respectivement. Comme en général on n'a $c = c'$ que pour $c^2 = c'^2 = 1$, on voit que *les tangentes des courbes sur les surfaces (Ω) et (Ω') qui correspondent à la décomposition canonique mentionnée ne coïncident pas en général.* Pour que ces tangentes coïncident, il faut que $(t'_1 - t_1)/(t'_2 - t_2) = \pm 1$ ou $t'_i = \tau t_i\,(\tau^2 \neq 0, 1;\ i = 1, 2)$, de sorte que nous obtenons de nouveau des types de déformations déjà examinés. Remarquons encore, que, dans le premier des cas précédants, on a les relations $(4.40)_2$. Comme d'après [2], chap. 3, on peut effectuer la transformation

$$\begin{pmatrix} t_1, & t_2 \\ -t_1, & -t_2 \end{pmatrix},$$

il en résulte que les relations (4.40) sont vraies juste pour $(t'_1 + t_1)/(t'_2 + t_2) = \pm 1$. Si $\tau = 1$, la déformation T est singulière et alors la décomposition canonique n'est pas univoquement définie.

Les tangentes des courbes qui correspondent aux décompositions canoniques relatives à la dualisation en tant que déformation projective de chacune des congruences L et L' se transforment par la K-transformation (4.2) *l'une dans l'autre.*

Passons à déterminer *l'existence et la généralité* des couples de déformations projectives L et L' telles que $t'_1 = \tau t_1$, $t'_2 = \tau t_2$ $(\tau^2 \neq 0, 1)$. Cette couple – là est déterminée par le système suivant d'équations de Pfaff:

(4.44)
$$\omega_{14} = \omega_{23} = \omega_{11} + \omega_{44} = \omega_{22} + \omega_{33} = 0\,,$$
$$\omega_{13} = -\,\omega_{21} = -\,\omega_{34} = \omega_1\,, \quad \omega_{12} = \omega_{24} = \omega_{43} = \omega_2\,,$$

(4.45)
$$\tau_{13} = \tau_{14} = \tau_{23} = \tau_{24} = \tau_{11} - \tau_{33} = \tau_{22} - \tau_{44} = \tau_{11} + \tau_{44} =$$
$$= \tau_{22} + \tau_{33} = 0\,, \quad \tau_{32} = \tau_{41}\,,$$

(4.46)
$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0\,,$$

(4.47)
$$\tau_{32} = \tau_{41} = (t_2 - t'_2)\,\omega_1 + (t_1 - t'_1)\,\omega_2\,,$$

(4.48)
$$\tau_{31} = p_1\omega_1\,, \quad \tau_{42} = p_2\omega_2\,,$$

(4.49)
$$\tau_{11} - \tau_{22} = \tau_{33} - \tau_{44} = (t'_1 - t_1)\,\omega_1 + (t'_2 - t_2)\,\omega_2\,,$$

et encore (4.9), (4.10), (4.11), (4.13), (4.15) où

(4.50)
$$p_1 = p' - p + t'^2_1 - t^2_1\,, \quad p_2 = p' - p + t'^2_2 - t^2_2\,;$$

il en résulte

(4.51)
$$\tau_{11} = -\,\tau_{22} = \tau_{33} = -\,\tau_{44}\,.$$

Par différentiation extérieure de ce système on obtient

(4.10)*
$$[\mathrm{d}t_1\,\omega_1] + [\mathrm{d}t_2\,\omega_2] + (t_2 z_1 - t_1 z_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.11)*
$$[\mathrm{d}t_1\,\omega_2] + [\mathrm{d}t_2\,\omega_1] + 3(z_1 t_1 - z_2 t_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.13)*
$$[\mathrm{d}(p + z_{11} + t_1^2)\,\omega_1] + \tfrac{1}{2}[\mathrm{d}(z_{21} - z_{12})\,\omega_2] +$$
$$+ (z_{21} - 5z_{12} - 4z_1 - 2p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2 z_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

$$[\mathrm{d}(p + z_{22} + t_2^2)\,\omega_2] + \tfrac{1}{2}[\mathrm{d}(z_{12} - z_{21})\,\omega_1] +$$
$$+ (2p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2 z_1 - z_{12} - 5z_{21} - 4z_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.15)* $$[\mathrm{d}z_{11}\ \omega_1] + [\mathrm{d}z_{12}\ \omega_2] + (z_1 z_{12} - z_{11} z_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$
$$[\mathrm{d}z_{21}\ \omega_1] + [\mathrm{d}z_{22}\ \omega_2] + (z_1 z_{22} - z_2 z_{21})[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.48)* $$[\mathrm{d}p_1\ \omega_1] - 2p_1 z_2[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$
$$[\mathrm{d}p_2\ \omega_2] + 2p_2 z_1[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.47)* $$[\mathrm{d}t'_1\ \omega_2] + [\mathrm{d}t'_2\ \omega_1] + 3(z_1 t'_1 - z_2 t'_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$$

(4.49)* $$[\mathrm{d}t'_1\ \omega_1] + [\mathrm{d}t'_2\ \omega_2] + (t'_2 z_1 - t'_1 z_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,.$$

La différentiation extérieure de (4.9), (4.44), (4.45), (4.46) ne donne aucune relation extérieure et les deux relations (4.11) conduisent à une même relation extérieure.

En substituant dans les relations (4.47)* et (4.49)* $t'_i = \tau t_i\ (i = 1, 2)$ et en les modifiant d'après (4.10)* et (4.11)*, on obtient

(4.52) $$t_2[\mathrm{d}\tau\ \omega_1] + t_1[\mathrm{d}\tau\ \omega_2] = 0\,,\quad t_1[\mathrm{d}\tau\ \omega_1] + t_2[\mathrm{d}\tau\ \omega_2] = 0\,.$$

En y posant $\mathrm{d}\tau = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$, on obtient en vertu de (4.17) nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et alors

(4.53) $$\tau = \text{const} \neq 0\,.$$

Par là on a aussi démontré que le coefficient de dilatation (4.36) est constant.

Les relations (4.10)*, (4.11)*, (4.13)*, (4.15)* et (4.48)* qui forment la fermeture du système examiné peuvent être écrites sous la forme

(4.10)** $$[\Delta t_1\ \omega_1] + [\Delta t_2\ \omega_2] = 0\,,$$

(4.11)** $$[\Delta t_1\ \omega_2] + [\Delta t_2\ \omega_1] = 0\,,$$

(4.13)** $$2[\Delta P + \Delta z_{11} + 2t_1\,\Delta t_1\quad \omega_1] + [\mathrm{d}(z_{21} - z_{12})\quad \omega_2] = 0\,,$$
$$2[\Delta P + \Delta z_{22} + 2t_2\,\Delta t_2\quad \omega_2] + [\mathrm{d}(z_{12} - z_{21})\quad \omega_1] = 0\,,$$

(4.15)** $$[\Delta z_{11}\ \omega_1] + [\mathrm{d}z_{12}\ \omega_2] = 0\,,\quad [\mathrm{d}z_{21}\ \omega_1] + [\Delta z_{22}\ \omega_2] = 0\,,$$

(4.48)** $$[\Delta P' + 2t_1(\tau^2 - 1)\,\Delta t_1\quad \omega_1] = 0\,,\quad [\Delta P' + 2t_2(\tau^2 - 1)\,\Delta t_2\quad \omega_2] = 0\,,$$

et on a

(4.54) $$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \mathrm{d}t_1 + m\omega_1 - n\omega_2\,,\\ \Delta t_2 &= \mathrm{d}t_2 + n\omega_1 - m\omega_2\,,\\ \Delta P &= \mathrm{d}p + (2t_1 n + Z_1 - P_1)\,\omega_2 - (2t_2 n + Z_2 - P_2)\,\omega_1\,,\\ \Delta z_{11} &= \mathrm{d}z_{11} - Z_1\omega_2\,,\\ \Delta z_{22} &= \mathrm{d}z_{22} + Z_2\omega_1\,,\\ \Delta P' &= \mathrm{d}(p' - p) + (P_4 - n)\,\omega_1 + (P_3 + n)\,\omega_2\,, \end{aligned}$$

où

(4.55) $$m = \tfrac{3}{2}(z_1 t_1 - z_2 t_2)\,,\quad n = \tfrac{1}{2}(t_2 z_1 - t_1 z_2)\,,$$
$$Z_1 = z_1 z_{12} - z_{11} z_2\,,\quad Z_2 = z_1 z_{22} - z_2 z_{21}\,,$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (z_{21} - 5z_{12} - 4)\, z_1 - 2(p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2)\, z_2\,,\\
P_2 &= 2(p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2)\, z_1 - (z_{12} - 5z_{21} - 4)\, z_2\,,\\
P_3 &= 2(p' - p + t_1^2\overline{\tau^2 - 1})\, z_2\,,\\
P_4 &= 2(p' - p + t_2^2\overline{\tau^2 - 1})\, z_1\,.
\end{aligned}
$$

Le système considéré est en involution et nous arrivons au résultat suivant: *Les déformations projectives L et L' telles que $t'_i = \tau t_i$ $(\tau^2 \neq 0, 1;\ i = 1, 2)$ dépendent de huit fonctions arbitraires d'une variable.*

Soit donnée une des déformations projectives de ci-dessus (p. ex. L). Alors la congruence L' est déterminée par le système fermé (4.45) — (4.49) + (4.48)*. A l'aide du lemme de Cartan, on obtient de (4.10)* et (4.11)* la relation (4.14). En substituant dans (4.48)* pour $\mathrm{d}t_1$ et $\mathrm{d}t_2$, on a $(\tau^2 \neq 0, 1)$

$$
\text{(4.48)***} \qquad [\Delta p\, \omega_1] = 0\,, \quad [\Delta p\, \omega_2] = 0\,,
$$

où

$$
\text{(4.57)} \qquad \Delta p = \mathrm{d}(p' - p) + 2(\overline{p' - p}z_1 + \overline{\tau^2 - 1}t_2 r)\, \omega_1 + 2(\overline{p' - p}z_2 + \overline{\tau^2 - 1}t_1 r)\, \omega_2\,.
$$

Vu les relations (4.48)***, on a

$$
\text{(4.58)} \qquad \Delta p = 0\,.
$$

La différentiation extérieure et les relations (4.11)* et (4.15) donnent

$$
\text{(4.58)***} \qquad [(1 - \tau^2)\, \mathrm{d}r + 2(p' - p)(z_{21} - z_{12})\, \omega_1,\ \omega_1 + \omega_2] = 0
$$

et alors: *Si la congruence L est donnée, sa déformation projective L' $(t'_i = \tau t_i$, $\tau^2 \neq 0, 1;\ i = 1, 2)$ dépend d'une fonction arbitraire d'une variable.*

Si $\tau = 1$, voir [2], chap. 4. Pour $\tau = -1$, $p' - p \neq 0$ on obtient comme dans [2], chap. 4, que $z_{12} = z_{21}$, et donc L et L', sont des congruences R, mais parce que $p' \neq p$, ces congruences L et L' ne sont pas des dualisations l'une de l'autre. La transformation développable $L \to L'$ n'est pas une déformation singulière $(c_1 = 2t_1$, $c_2 = -2t_2)$ et alors les congruences R admettent aussi les déformations non-singulières. Or la transformation développable $L \to L^*$, resp. $L^* \to L'$ $(L^*(L'^*)$ est la dualisation de $L(L'))$ est une déformation projective singulière, parce que, p. ex., on obtient L^* de L par la substitution

$$
\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \omega_{31} & \omega_{42} \\ -t_1 & -t_2 & \omega_{31} & \omega_{42} \end{pmatrix}
$$

(v. [2], relation (3.4)). Les déformations projectives L et L' $(\tau^2 = 1)$ dépendent de huit fonctions arbitraires d'une variable. La congruence L étant donnée, la congruence L' (et aussi L'^*) dépend d'une constante arbitraire. (Le cas $\tau = -1$ $p = p'$, v. chap. 5.)

Passons à l'examination des cas ou au moins une des déformations projectives L et L' est une congruence de Segre.

Soit tout d'abord

$$(4.59) \qquad t_1 - t_2 = t_1' - t_2' = 0\,, \quad \text{ou} \quad t_1 + t_2 = t_1' + t_2' = 0\,, \quad t_1 t_2 \neq 0\,,$$

c.-à-d. L aussi bien que L' sont des congruences de Segre — d'une manière plus exacte deux congruences à dualisation asymptotique de première ou seconde espèce (v. [2]). Nous nous bornons au premier cas.

Comme les relations (4.27) et (4.28) sont vraies aussi sous la supposition (4.59), on voit que *les courbes $H_0(\Omega)$ et (Ω') qui représentent dans l'espace de Klein des congruences de Segre L et L' en déformation projective ont le contact géométrique du premier ordre dont le coefficient de dilatation est*

$$(4.60) \qquad j = \frac{t_1}{t_1'} = \frac{t_2}{t_2'}\,.$$

Si et seulement si $j = 1$, L et L' sont des congruences R de Segre, et les courbes $H_0(\Omega)$ et (Ω') ont le contact analytique du seconde ordre, comme il résulte de la relation (4.37) pour $j = 1$ et $c = c' = 1$.

Le cas où une des congruences L et L' est une dualisation asymptotique de la première espèce et l'autre une dualisation asymptotique de la seconde espèce, ne diffère que formellement du cas précédent.

Passons enfin au cas où juste une des congruences L et L' est de Segre. Soit p. ex.

$$(4.61) \qquad t_1 = t_2\,, \quad t_1'^2 - t_1'^2 \neq 0\,, \quad t_1 t_2 t_1' t_2' \neq 0\,.$$

La courbe $C \equiv H_0(\Omega)$ donnée par l'équation différentielle (4.24), où $c \neq 1$, a au point $H_0\Omega \equiv \Omega'$ la tangente commune avec la tangente de la courbe C' sur la surface (Ω') — l'équation différentielle de C' est (4.25) où on a nécessairement $c' = 1$. Le contact des courbes $H_0(\Omega)$ et C' est un contact géométrique du premier ordre dont le coefficient de dilatation est

$$(4.62) \qquad j = \frac{t_1(1 + c)}{t_1' + t_2'} \left(= \frac{t_2(1 + c)}{t_1' + t_2'} \right).$$

Comme c ($\neq -1$) est arbitraire, on peut le choisir d'une façon convenable[2]) (dans notre cas pour $c = (t_1' + t_2' - t_1)/t_1$) afin que le contact des courbes H_0C et C' soit analytique du premier ordre. (Cf. le résultat où (Ω) et (Ω') sont des surfaces, p. 261, relation (4.33).)

Si et seulement si

$$c = \frac{t_1' + t_2' - t_1}{t_1} = 1\,,$$

le contact des courbes $H_0(\Omega)$ et C' est analytique du second ordre, comme il résulte pour $j = 1$, $c = c' = 1$, $2t_1 = 2t_2 = t_1' + t_2'$ des relations (4.37).

---

[2]) Au changement du facteur c il correspond le changement du paramètre de la courbe C.

En vertu de (4.10)* et (4.11)*, on a

$$[dt_1\, \omega_1 + \omega_2] = 0\,, \quad z_1 = z_2\,. \tag{4.63}$$

Comme $2dt_1 = 2dt_2 = dt_1' + dt_2'$, on obtient par addition des relations (4.47)* et (4.49)*, en tenant compte de (4.63), que $t_1' = t_2'$ et alors L et L' sont des congruences R de Segre.

5. Les congruences W de Segre, certains types de congruences qui possèdent une surface focale développable et une courbe directrice non rectiligne et certains types de congruences paraboliques sont représentés dans l'espace de Klein par une courbe dont les points sont des images secondaires des complexes osculateurs coïncidant pour toutes les génératrices des surfaces qui appartiennet à une certaine couche à un paramètre de ces congruences (v. [4]). Si cette courbe-là est située sur la surface (Ω) qui représente dans l'espace de Klein une congruence L, alors à cette courbe il correspond dans l'espace P_3 (si l'on se borne aux congruences de Segre) une *congruence de Segre tangente à* L (v. [4], chap. 5).

Soient L et L' des congruences W en déformation projective et soit vrai (4.17). A la couche de courbes (4.24) sur la surface (Ω) qui correspondent aux asymptotiques des surfaces focales de L, c.-à-d. pour

$$c = \pm 1\,, \tag{5.1}$$

il correspond les congruences tangentes de Segre dont les surfaces focales sont engendrées par les droites ([4], p. 453)

$$\begin{aligned} X_1 &= 2\lambda\omega_1(t_1 \pm t_2)([A_1A_3] \mp [A_1A_2])\,, \\ X_2 &= 2\lambda\omega_1(t_1 \pm t_2)([A_2A_4] \mp [A_1A_2])\,, \quad \lambda \neq 0 \text{ arb.} \end{aligned} \tag{5.2}$$

qui sont tangentes aux surfaces focales de L. Les foyers correspondants des surfaces focales des congruences de Segre ci-dessus sont donnés par les relations

$$\bar{A}_1 = aA_1 + b(A_2 \mp A_3)\,, \quad \bar{A}_2 = aA_2 + b(A_4 \pm A_1)\,, \tag{5.3}$$

où a, b sont des paramètres arbitraires qui, naturellement, pour les cas $c = 1$ et $c = -1$ ne sont pas, en général, égaux. L'équation différentielle des surfaces développables dont les arêtes de rebroussement sont situées sur la surface focale $(\bar{A}_1)$ ou $(\bar{A}_2)$ est

$$\begin{aligned} b\, da - a\, db = [\mp a^2 - ab(z_1 \pm z_2) + b^2(2 + &\overline{\tfrac{1}{2}z_{21} - z_{12} \pm} \\ &\overline{\pm\, p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2})]\, \omega_1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

ou

$$\begin{aligned} b\, da - a\, db = [\pm a^2 - ab(z_1 \pm z_2) - b^2(2 + &\overline{\tfrac{1}{2}z_{21} - z_{12} \pm} \\ &\overline{\pm\, p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2})]\, \omega_1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

respectivement.

Pour la congruence L' on a sous la supposition $c' = \pm 1$ dans (4.25), les relations analogues aux relations (5.2)–(5.5).

Nous allons étudier des propriétés des congruences de Segre tangentes à L et L', que nous désignons $\bar{L}$ et $\bar{L}'$, en supposant que L et L' sont en déformation projective.

L'homographie osculatrice (4.1) porte la droite géométrique X_1 (X_2) dans la droite géométrique X'_1 (X'_2) et le point géométrique $\bar{A}_1$ $(\bar{A}_2)$ dans le point géométrique $\bar{A}'_1$ $(\bar{A}'_2)$.[3])

Les congruences de Segre $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ pour $c = c' = 1$ ou $c = c' = -1$ tangentes aux congruences L et L' ne sont pas, en général, en transformation développable. *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ soient en transformation développable est que, en même temps,*

$$p + t_1^2 = p' + t_1'^2 \quad \text{et} \quad p + t_2^2 = p' + t_2'^2 \tag{5.6}$$

ou

$$p - p' = t_1'^2 - t_1^2 = t_2'^2 - t_2^2 \tag{5.6'}$$

si $c = c' = 1$ ou $c = c' = -1$, et c'est pourquoi les congruences tangentes $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ de Segre pour $c = c' = 1$ ou $c = c' = -1$ sont ou ne sont pas en même temps en transformation développable qui est exprimée par les équations

$$a = a', \quad b = b', \quad \omega_1 = \omega'_1 = \pm\, \omega_2 = \pm\, \omega'_2 \tag{5.7}$$

ou le signe supérieur (inférieur) se rapporte à $c = c' = 1$ $(c = c' = -1)$. Le théorème résulte par une comparaison des équations différentielles (5.4) et (5.5) des surfaces développables avec des équations analogues pour la congruence $\bar{L}'$, parce qu'on a $\omega_1 = \omega'_1$, $\omega_2 = \omega'_2$, $z_j = z'_j$ $(j = 1, 2)$, $z_{ik} = z'_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$ et les formes différentielles $b\,\mathrm{d}a - a\,\mathrm{d}b$ et $b'\,\mathrm{d}a' - a'\,\mathrm{d}b'$ sont indépendantes.

Des relations (5.6) on obtient pour les congruences L et L'

$$t_1^2 - t_2^2 = t_1'^2 - t_2'^2 \quad (\neq 0) \tag{5.8}$$

et alors

$$\tau_{31} = \tau_{42} = 0\,, \quad \tau_{32} = \tau_{41} \quad (\neq 0)\,. \tag{5.9}$$

La transformation développable (5.7) *des congruences $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ est une déformation projective et les homographies osculatrices à la transformation développable* (2.1) *et à la transformation développable* (5.7) *coïncident.* Au Mémoire [3], l'auteur a démontré qu'une homographie osculatrice à une transformation développable des congruences de Segre réalise en même temps le contact analytique du second ordre le long de toutes les génératrices des demiquadriques (de ces congruences) qui se correspondent dans la transformation développable. Alors, il suffit, pour les congruences $\bar{L}$ et $\bar{L}'$, que l'homographie osculatrice (4.1) réalise le contact analytique du second ordre des génératrices $[\bar{A}_1\bar{A}_2]$ et $[\bar{A}'_1\bar{A}'_2]$; or, comme l'homographie (4.1) réalise le contact analytique du 2^e ordre des génératrices $[A_1A_2]$ et $[A'_1A'_2]$, elle réalise, en vertu de $(5.7)_3$, aussi le contact analytique du second ordre des génératrices $[\bar{A}_1\bar{A}_2]$ et $[\bar{A}'_1\bar{A}'_2]$.

[3]) En coordonnées ponctuelles, l'homographie osculatrice (4.1) est donnée par les relations $H_0A_i = A'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Les congruences de Segre tangentes aux congruences L et L' pour lesquelles $c \neq c'$, ne peuvent pas être des déformations projectives comme il résulte des relations (1.17); p. ex. si on exprime $H_0 \,\mathrm{d}^2[A_1A_2]$, alors pour $\omega_2 = c\omega_1$ le coefficient de $[A'_1A'_3]$ est $\omega_1^2(1 + c^2)$ et il est différent du coefficient $\omega_1^2(1 + c'^2)$ de $[A'_1A'_3]$ en $\mathrm{d}^2[A'_1A'_2]$ pour $\omega_2 = c'\omega_1$, tant que $c \neq c'$. Mais il est $c = c'$ $(\neq \pm 1)$ seulement quand on a (4.25) et alors $t'_1 = \tau t_1$, $t'_2 = \tau t_2$ $(\tau \neq 0)$. D'après (5.6)' il résulte $p - p' = (\tau^2 - 1)\, t_1^2 = (\tau^2 - 1)\, t_2^2$ ou $(\tau^2 - 1)(t_1^2 - t_2^2) = 0$ de sorte que soit $t_1^2 - t_2^2 = 0$, ce qui est en contradiction avec la supposition (4.17), soit $\tau^2 = 1$. Pour $\tau = 1$ il résulte $p = p'$ et alors les congruences L et L' sont projectivement équivalentes.

Soit $\tau = -1$. Les équations différentielles des surfaces développables des congruences tangentes de Segre sont pour $\omega_2 = c\omega_1$ $(c \neq \pm 1)$ (v. [4], (5.29), (5.30))

$$(5.10) \qquad T_1b_1\,\mathrm{d}a_1 - a_1\,\mathrm{d}(T_1b_1) = \\ = \left[a_1^2 - a_1b_1T_1(z_1 + cz_2) - (T_1b_1)^2\left(\omega_{31} + 2\frac{T_2}{T_1} + c\,\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]\omega_1\,,$$

$$(5.11) \qquad T_1b_2\,\mathrm{d}a_2 - a_2\,\mathrm{d}(T_1b_2) = \\ = \left[a_2^2c - a_2b_2T_1(z_1 + cz_2) + (T_1b_2)^2\left(\omega_{42} + 2\frac{T_2}{T_1}c + \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]\omega_1\,,$$

$$\omega_1T_1(T_1 + cT_2)(T_2 + cT_1) \neq 0$$

où les paramètres a_1, b_1, a_2, b_2 sont liés par la relation

$$(5.12) \qquad a_1b_1\omega_1(T_1 + cT_2) + b_2a_1\omega_1(T_2 + cT_1) + \\ + b_1b_2[(T_1^2Z_2 - T_1T_2Z_1)\,\omega_1 + (T_2\,\mathrm{d}T_1 - T_1\,\mathrm{d}T_2)] = 0$$

où

$$(5.13) \quad T_1 = t_1 + t_2c\,, \quad T_2 = t_2 + t_1c\,, \quad Z_1 = z_1 + z_2c\,, \quad Z_2 = z_2 + z_1c\,.$$

Pour les congruences tangentes $\bar{L}_c$ et $\bar{L}'_c$ de Segre dont les images sur les surfaces (Ω) et (Ω') sont déterminés par l'équation $\omega_2 = c\omega_1$ on obtient, sous supposition $t'_i = - t_i$,

$$(5.14) \qquad T'_i = - T_i\,, \quad Z'_i = Z_i\,, \quad p = p'\,, \quad i = 1, 2\,.$$

La transformation développable

$$(5.15) \qquad a_1 = a'_1\,, \quad b_1 = b'_1\,, \quad a_2 = a'_2\,, \quad b_2 = b'_2$$

des congruences $\bar{L}_c$ et $\bar{L}'_c$ est une déformation projective pour $c\,[\neq -(t_1/t_2), -(T_1/T_2), -(T_2/T_1), 0]$ arbitraire et son homographie osculatrice coïncide avec l'homographie osculatrice de la transformation développable des congruences L et L' qui sont des dualisations l'une de l'autre.

Passons à la détermination de *l'existence et* de *la généralité* des déformations projectives L et L' en supposant (5.6)'; ces déformations sont déterminées par le même système de Pfaff comme des déformations projectives pour lesquelles $t'_1 = \tau t_1$, $t'_2 = \tau t_2$ (v. p. 264), mais dans (4.48) on a $p_1 = p_2 = 0$.

La fermeture du système examiné est formée par les relations (4.10)**, (4.11)**, (4.13)**, (4.15)**, (4.47)*, (4.49)*, où on peut écrire les deux dernières sous la forme

$$(4.47)^{**} \qquad [\Delta t_1' \, \omega_2] + [\Delta t_2' \, \omega_1] = 0 \, ,$$

$$(4.49)^{**} \qquad [\Delta t_1' \, \omega_1] + [\Delta t_2' \, \omega_2] = 0 \, ,$$

où

$$\Delta t_1' = \mathrm{d}t_1' - \tfrac{1}{2}(t_2' z_1 - t_1' z_2)\, \omega_2 + \tfrac{3}{2}(z_1 t_1' - z_2 t_2')\, \omega_1 \, ,$$
$$\Delta t_2' = \mathrm{d}t_2' + \tfrac{1}{2}(t_2 z_1 - t_1 z_2)\, \omega_1 - \tfrac{3}{2}(z_1 t_1' - z_2 t_2')\, \omega_2 \, .$$

Le système envisagé est en involution et on a le théorème suivant: *Les déformations projectives qui satisfont aux relations* (5.6) *dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables.*

Si L et L' sont des dualisations l'une de l'autre ($\tau = -1$), alors chacune d'elles est déterminée par l'autre automatiquement. En vertu de (4.10)* et (4.11)* les relations (4.47)* et (4.49)* coïncident. La classe de couples de congruences L et L' ($\tau = -1$) dépend d'une fonction de deux variables, comme on pouvait prévoir, car cette classe est identique à la classe des congruences W et leurs dualisations.

Dans le premier cas, *si la congruence L est donnée*, la fermeture du système qui détermine la congruence L' est formée par les relations (4.47)** et (4.49)**, et alors *la congruence L' dépend de deux fonctions arbitraires d'une variable.*

Littérature

[1] *E. Čech*: Transformations développables des congruences des droites. Чехосл. мат. журнал, *6* (*81*), 1956, 260–286.

[2] *E. Čech*: Déformation projective des congruences *W*. Чехосл. мат. журнал *6* (*81*), 1956, 401–414.

[3] *V. Horák*: Projektive Deformation der Segreschen *W*-Kongruenzen und ihre Abbildung in Kleinschen fünfdimensionalen Raum. Чехосл. мат. журнал. *10* (*85*), 1960, 551–595.

[4] *V. Horák*: Les complexes osculateurs des congruences de droites. Чехосл. мат. журнал, *11* (*86*), 1961, 440–460.

Резюме

К ТЕОРИИ ПРОЕКТИВНЫХ ИЗГИБАНИЙ КОНГРУЭНЦИЙ *W*

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно

Вторичные образы соприкасающихся комплексов Ω лучей конгруэнции L, являющейся конгруэнцией W, заполняют в пятимерном пространстве Клейна многообразие (Ω), которое является поверхностью с сопряженной сетью в случае, когда обе фокальные поверхности не линейчатые, или кривой, касательные прямые и соприкасающиеся плоскости которой не являются касатель-

ными к гиперквадрике Клейна, в случае, когда обе фокальные поверхности линейчатые и, следовательно, L — конгруэнция Сегре.

Пусть L и L' — конгруэнции W в развертывающемся преобразовании T. Касательная коллинеация преобразует касательные и соприкасающиеся пространства многообразий (Ω) и (Ω') в себя, но не преобразует, вообще говоря, соприкасающиеся комплексы Ω и Ω' лучей, соответствующих друг другу в развертывающемся преобразовании T, в себя. Для каждой пары прямых, соответствующих друг другу в T, всегда существует ∞^2 касательных коллинеаций, преобразующих их соприкасающиеся комплексы (как геометрические образы) в себя. Для того, чтобы T было фокальным изгибанием 1-го (2-го) рода, необходимо и достаточно, чтобы существовала касательная коллинеация, переводящая некоторый арифметический соприкасающийся комплекс ${}^1\Omega$ или ${}^2\Omega$, соответствующий комплексу Ω конгруэнции L в некоторый арифметический соприкасающийся комплекс ${}^1\Omega'$ или ${}^2\Omega'$, соответствующий комплексу Ω' конгруэнции L. Указанные касательные коллинеации и арифметические комплексы различны для фокальных изгибаний 1-го и 2-го рода; если эти две касательные коллинеации совпадают, то T — проективное изгибание. Преобразования пятимерного пространства Клейна, соответствующие проективным преобразованиям трехмерного пространства, мы назовем K — преобразованиями.

Пусть L и L' — конгруэнции W, связанные проективным изгибанием. K — — преобразование H_0, соответствующее соприкасающейся коллинеации H_0 развертывающегося преобразования T конгруэнций L и L', осуществляет вообще между поверхностями (Ω) и (Ω') (это значит, что L и L' не являются конгруэнциями Сегре) геометрическое касание первого порядка и переводит касательные к кривым сопряженной сети в себя. Это касание является аналитическим и даже второго порядка, если и только если L и L' являются конгруэнциями R и, следовательно, T — особое проективное изгибание. Пусть (Ω_{+1}), (Ω_{-1}) и (Ω'_{+1}), (Ω'_{-1}) — преобразования Лапласа поверхностей (Ω) и (Ω'). Если и только если L и L' суть конгруэнции D (R), то указанное K — преобразование осуществляет геометрическое (аналитическое) касание первого порядка поверхностей (Ω_{+1}) и (Ω'_{+1}) и одновременно поверхностей (Ω_{-1}) и (Ω'_{-1}). Коэффициенты растяжения j касания, осуществляемого K — преобразованием H_0 между кривыми поверхностей (Ω) и (Ω'), будут вообще различны. Существует класс пар конгруэнций L и L' в проективном изгибании, зависящая от 8 функций одного переменного, для которых $j = \text{konst} \neq 1$ для всех кривых на поверхностях (Ω) и (Ω'), имеющих общие касательные. Если одна из конгруэнций указанной пары дана, то вторая зависит от одной функции одного переменного. Если $j = 1$, то мы получаем в точности пару конгруэнций R, общность которых известна. Автор исследует, аналогичным образом и случаи, когда одна или обе из конгруэнций L и L' являются конгруэнциями Сегре.

Кривой (за исключением некоторых случаев) на поверхности (Ω) соответствует т. наз. касательная конгруэнция Сегре $\bar{L}$ к конгруэнции L. Если L и L'

связаны проективным изгибанием, то касательные конгруэнции Сегре $\bar{L}$ и $\bar{L}'$ вообще не связаны даже развертывающимся преобразованием. Необходимым условием того, чтобы $\bar{L}$ и $\bar{L}'$ выли связаны развертывающимся преобразованием, является условие, чтобы кривые, которые их представляют на поверхностях (Ω) и (Ω'), были кривыми сопряженной сети и чтобы проективное изгибание конгруэнций L и L' не было особым. Существует класс пар конгруэнций L и L' в проективном изгибании, зависящий от одной функции двух переменных, у которых касательные конгруэнции Сегре $\bar{L}$ и $\bar{L}'$, соответствующие кривым сопряженной сети, связаны проективным изгибанием. Если дана одна из конгруэнций указанной пары, то другая зависит от двух функций одного переменного.