Miloslav Jůza

Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 243–250

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100513`

Чехословацкий математический журнал т. 12 (87) 1962, Прага

LIGNE DE STRICTION SUR UNE GÉNÉRALISATION À PLUSIEURS DIMENSIONS D'UNE SURFACE RÉGLÉE

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 3 juin 1960)

Dans cet article, l'auteur étudie des variétés formées par un système monoparamétrique d'espaces euclidiens $\mathbf{E}_k(t)$. Il montre que, pour ces variétés-là, la notion de ligne de striction peut être introduite d'une manière analogue au cas des surfaces réglées.

Dans un espace euclidien $\mathbf{E}_n$ soit donnée une variété formée par un système monoparamétrique d'espaces euclidiens $\mathbf{E}_k(t)$, $1 \leqq k \leqq n - 2$. Nous appellerons une telle variété brièvement *monosystème* de dimension $k + 1$, les espaces $\mathbf{E}_k(t)$ seront appelés *espaces générateur s*du monosystème. Un monosystème de dimension 2 est donc une surface réglée. Supposons que chacun des espaces $\mathbf{E}_k(t)$ soit donné par un point $A(t)$ et par des vecteurs $\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_k(t)$. Les vecteurs $\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_k(t)$ peuvent être choisis orthonormaux, c'est-à-dire tels que

$$\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = \delta_{ij} . \tag{1}$$

Les fonctions $A, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ seront supposées être de première classe, ce qui veut dire qu'elles ont des dérivées continues. La courbe $A(t)$ sera appelée *courbe directrice* du monosystème.

En différentiant les relations (1) nous obtenons

$$\mathbf{u}_i \dot{\mathbf{u}}_i = 0 , \quad \mathbf{u}_i \dot{\mathbf{u}}_j + \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_j = 0 . \tag{2}$$

Théorème 1. *Il est même possible de choisir les bases des espaces générateurs de façon à avoir*

$$\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = \delta_{ij} , \quad \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_j = 0 , \quad i, j = 1, \ldots, k . \tag{3}$$

Les conditions (3) *déterminent les bases d'une façon univoque, dès que la base initiale est fixée.*

Démonstration. Soit $\{\mathbf{u}_i(t)\}$ un système de bases vérifiant les relations (1). Définissons les fonctions a_j^h, $j, h = 1, \ldots, k$ comme solutions du système d'équations differentielles

$$\dot{a}_j^h + \sum_{i=1}^{k} a_j^i \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_h = 0 . \tag{4}$$

Soit ensuite $\bar{\boldsymbol{u}}_j = \sum_{i=1}^{k} a_j^i \boldsymbol{u}_i$, de sorte que l'on a

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j = \sum_{i=1}^{k} \dot{a}_j^i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{k} a_j^i \dot{\boldsymbol{u}}_i ,$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j \boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{k} \dot{a}_j^i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_h + \sum_{i=1}^{k} a_j^i \dot{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_h = \dot{a}_j^h + \sum_{i=1}^{k} a_j^i \dot{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_h = 0 ,$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j \bar{\boldsymbol{u}}_l = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_h \sum_{h=1}^{k} a_l^h \boldsymbol{u}_h = \sum_{h=1}^{k} a_l^h \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j \boldsymbol{u}_h = 0 .$$

Le système de bases $\{\bar{\boldsymbol{u}}_j\}$ satisfait donc au second groupe des relations (3). Nous avons ensuite

$$(\bar{\boldsymbol{u}}_j \bar{\boldsymbol{u}}_l)^\cdot = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j \bar{\boldsymbol{u}}_l + \bar{\boldsymbol{u}}_j \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_l = 0 ,$$

donc les produits scalaires $\bar{\boldsymbol{u}}_j \bar{\boldsymbol{u}}_l$ sont constants. Si nous prenons donc des solutions du système (4) telles que la matrice $(a_j^h(t_0))$ soit orthogonale pour une certaine valeur initiale t_0, la base $\{\bar{\boldsymbol{u}}_j(t_0)\}$ sera, pour la même valeur t_0, elle-aussi orthogonale, et le restera pour toutes les valeurs t. Donc, toutes les relations (3) seront satisfaites.

Pour montrer que, le choix de la base initiale étant fait, les bases $\{\bar{\boldsymbol{u}}_j(t)\}$ sont déterminées d'une manière univoque, nous avons à remarquer que les vecteurs $\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_j$ doivent être orthogonaux à tous les vecteurs $\bar{\boldsymbol{u}}_h$, donc aussi à tous les vecteurs $\boldsymbol{u}_h$, combinaisons linéaires des $\bar{\boldsymbol{u}}_h$. Il en résulte que les fonctions a_j^h doivent vérifier le système (4), or la solution de ce système est déterminée d'une manière univoque par les conditions initiales.

Tout système de bases jouissant des propriétés (3) sera appelé *système de bases naturel.*

Au lieu de la courbe directrice $A(t)$ une autre courbe

$$\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i(t)\, \boldsymbol{u}_i(t) \tag{5}$$

peut servir de courbe directrice pour déterminer le même monosystème, les fonctions α^i étant des fonctions de première classe, d'ailleurs quelconques. On a alors le

Théorème 2. *Soient $A(t)$, $\bar{A}(t)$ deux courbes directrices telles que $A(t_0) = \bar{A}(t_0)$, soit $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$ un système de bases naturel. Alors*

$$\dot{A}(t_0)\, \dot{\boldsymbol{u}}_i(t_0) = \dot{\bar{A}}(t_0)\, \dot{\boldsymbol{u}}_i(t_0) , \quad i = 1, \ldots, k .$$

Démonstration. Exprimons $\bar{A}(t)$ sous la forme (5). Comme $A(t_0) = \bar{A}(t_0)$, nous avons $\alpha^i(t_0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Donc

$$\dot{\bar{A}}(t_0) = \dot{A}(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \dot{\alpha}^j(t_0)\, \boldsymbol{u}_j(t_0) ,$$

d'où en vertu de (3) nous tirons l'énoncé de notre théorème.

Théorème 3. *Il est possible de choisir la courbe $A(t)$ de telle sorte qu'elle coupe les espaces générateurs d'une façon orthogonale, c'est-à-dire que*

$$\dot{A}\mathbf{u}_i = 0\,, \quad i = 1, \dots, k\,. \tag{6}$$

Si $A(t)$ est une courbe directrice qui coupe les espaces générateurs d'une façon orthogonale, si $\{\mathbf{u}_i(t)\}$ est un système de bases naturel et que

$$B(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i(t)\,\mathbf{u}_i(t)$$

soit une autre courbe directrice, alors $B(t)$ coupe tous les espaces générateurs d'une façon orthogonale si et seulement si tous les u^i sont constants. Par chaque point de la variété, il passe donc une et une seule courbe directrice orthogonale.

Démonstration. Soit $\{\mathbf{u}_i(t)\}$ un système de bases naturel, $A(t)$ une courbe directrice. Soit $B = A + \sum_{i=1}^{k} u^i\mathbf{u}_i$ une autre courbe directrice. Cherchons les conditions pour que $\dot{B}\mathbf{u}_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Nous avons

$$\dot{B} = \dot{A} + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}^i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{k} u^i\dot{\mathbf{u}}_i$$

donc les u^i doivent, en vertu de (3), vérifier les équations différentielles

$$\dot{A}\mathbf{u}_i + \dot{u}^i = 0\,, \tag{7}$$

qui ont toujours une solution. Si l'on a en même temps $\dot{A}\mathbf{u}_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$, alors toutes les solutions des équations (7) sont $u^i = \text{const.}$

Théorème 4. *Soit donné un monosystème de dimension $k + 1$ déterminé par sa courbe directrice $A(t)$, jointe à un système de bases $\{\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)\}$. Alors le rang de la matrice*

$$\mathbf{A} = (\dot{A}(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_k(t))$$

ne dépend pas du choix de la courbe directrice $A(t)$ et des bases $\{\mathbf{u}_i(t)\}$.

Démonstration. Soit

$$B(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i(t)\,\mathbf{u}_i(t)$$

une autre courbe directrice du même monosystème et

$$\mathbf{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} a_i^j(t)\,\mathbf{u}_j(t)\,, \quad i = 1, \dots, k\,,$$

un autre système de bases. En différentiant ces relations-là nous trouvons que les vecteurs $\dot{B}$, $\mathbf{v}_i$, $\dot{\mathbf{v}}_i$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\dot{A}$, $\mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_i$, de sorte que le rang de la matrice $\mathbf{B} = (\dot{B}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_1, \dots, \dot{\mathbf{v}}_k)$ ne peut être supérieur à celui de la matrice $\mathbf{A}$. Réciproquement, en partant du système $\{B, \mathbf{v}_i\}$ nous trouvons que le rang de la matrice $\mathbf{A}$ ne peut être supérieur à celui de $\mathbf{B}$.

Si la matrice $\boldsymbol{A}$ du théorème 4 est de rang $2k + 1$, le monosystème considéré sera dit *non-développable.*

Théorème 5. *Soit* $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)\}$ *un monosystème non-développable. Alors pour chaque* t *il existe un nombre* $\delta > 0$ *tel que pour tout* h, $0 < |h| < \delta$, *les espaces générateurs*

$$[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)]\,, \quad [A(t + h), \boldsymbol{u}_1(t + h), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t + h)]$$

ne se rencontrent pas et n'ont aucun vecteur commun.[1])

Démonstration. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait une suite de nombres $h_p \to 0$, $h_p \neq 0$, tels que la matrice

$$(A(t + h_p) - A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{u}_1(t + h_p), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t + h_p))\,,$$

donc aussi la matrice

$$\left(\frac{A(t + h_p) - A(t)}{h_p}, \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t), \frac{\boldsymbol{u}_1(t + h_p) - \boldsymbol{u}_1(t)}{h_p}, \ldots, \frac{\boldsymbol{u}_k(t + h_p) - \boldsymbol{u}_k(t)}{h_p}\right)$$

fût de rang plus petit que $2k + 1$. En passant à la limite pour $h_p \to 0$ nous obtenons la matrice

$$(\dot{A}(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t), \dot{\boldsymbol{u}}_1(t), \ldots, \dot{\boldsymbol{u}}_k(t))$$

dont le rang serait aussi plus petit que $2k + 1$; le monosystème considéré serait donc développable.

Supposons que nous ayons de nouveau un monosystème $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)\}$ de dimension $k + 1$. L'espace tangent au point $A(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i\, \boldsymbol{u}_i(t)$, c'est l'espace

$$[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t), \dot{A}(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i\, \dot{\boldsymbol{u}}_i(t)]\,.$$

Considérons les espaces tangents en deux points X_1, X_2 du même espace générateur. On voit aisément que ces deux espaces ne coïncident pas et qu'ils ont en commun l'espace $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)]$. Leur union, c'est donc un espace $\boldsymbol{E}_{k+2}$. Si les deux espaces en question, pris dans cet espace $\boldsymbol{E}_{k+2}$, sont orthogonaux l'un à l'autre (c'est-à-dire si chacun d'eux contient la direction orthogonale à l'autre dans l'espace $\boldsymbol{E}_{k+2}$), les points X_1, X_2 seront dits *conjugués.* Si A_1, A_2 sont deux courbes directrices orthogonales aux points X_1, X_2, alors les points X_1, X_2 sont conjugués si et seulement si $\dot{A}_1(t)\,\dot{A}_2(t) = 0$.

Théorème 6. *Soit* $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$ *un système naturel de bases d'un monosystème non-développable, soit* $A(t)$ *sa courbe directrice,* $X = A(t_0)$. *Si un au moins des nombres* $\dot{A}(t_0)\,\dot{\boldsymbol{u}}_i(t_0) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, *alors les points de l'espace* $[X, \boldsymbol{u}_1(t_0), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t_0)]$

[1]) Deux sous-espaces $[A, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$ et $[B, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s]$ de l'espace euclidien $\boldsymbol{E}_n$ ne se recontrent pas et n'ont aucun vecteur commun si la matrice $(B - A, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$ est de rang $k + s + 1$.

conjugués au point X remplissent un espace $\mathbf{E}_{k-1}$. *Si tous les nombres* $\dot{A}(t_0)\,\dot{\mathbf{u}}_i(t_0)$ *sont nuls, il n'existe pas de point conjugué au point X. Dans ce cas-là, nous appellerons le point X point central de l'espace générateur.*

Démonstration. Soit

$$Y = X + \sum_{i=1}^{k} u^i\,\mathbf{u}_i(t_0)\,;$$

cherchons les conditions pour que Y soit conjugué à X. Pour la courbe $A(t)$ nous prenons d'abord la courbe directrice orthogonale passant par le point X. Alors

$$B(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i\,\mathbf{u}_i(t)\,, \quad u^i = \text{const}\,,$$

est une courbe directrice orthogonale passant par le point Y, et X est conjugué à Y si et seulement si $\dot{A}(t_0)\,\dot{B}(t_0) = 0$, c'est-à-dire si

$$\dot{A}^2 + u^1\dot{A}\dot{\mathbf{u}}_1 + \ldots + u^k\dot{A}\dot{\mathbf{u}}_k = 0\,.$$

Si un au moins des nombres $\dot{A}\dot{\mathbf{u}}_i$ est non-nul, les solutions de cette équation engendreront un hyperplan dans l'espace $[X, \mathbf{u}_1(t_0), \ldots, \mathbf{u}_k(t_0)]$; dans le cas contraire l'équation n'a pas de solution.

Supposons maintenant que la courbe directrice $A(t)$ ne soit pas orthogonale. Alors, d'après notre théorème 3, il passe par le point X une courbe directrice orthogonale $\bar{A}(t)$ et, d'après notre théorème 2, nous avons $\dot{\bar{A}}(t_0)\,\dot{\mathbf{u}}_i(t_0) = \dot{A}(t_0)\,\dot{\mathbf{u}}_i(t_0)$.

Théorème 7. *Dans chaque espace générateur d'un monosystème non-développable il y a un et un seul point central.*

Démonstration. Soit $A(t)$ une courbe directrice, soit $\{\mathbf{u}_i(t)\}$ un système naturel de bases. Soit

$$B(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} u^i\,\mathbf{u}_i(t)\,;$$

nous cherchons les conditions pour que

$$\dot{B}(t_0)\,\dot{\mathbf{u}}_i(t_0) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, k\,.$$

Nous obtenons le système d'équations

$$\begin{gathered}
\dot{A}\dot{\mathbf{u}}_1 + u^1\dot{\mathbf{u}}_1\dot{\mathbf{u}}_1 + u^2\dot{\mathbf{u}}_2\dot{\mathbf{u}}_1 + \ldots + u^k\dot{\mathbf{u}}_k\dot{\mathbf{u}}_1 = 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{A}\dot{\mathbf{u}}_k + u^1\dot{\mathbf{u}}_1\dot{\mathbf{u}}_k + u^2\dot{\mathbf{u}}_2\dot{\mathbf{u}}_k + \ldots + u^k\dot{\mathbf{u}}_k\dot{\mathbf{u}}_k = 0\,.
\end{gathered}$$

Ce système a une et une seule solution $(u^1, \ldots, u^k)$, car son déterminant est le carré de la matrice $(\dot{\mathbf{u}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{u}}_k)$ qui est régulière, puisque le monosystème est non-développable.

Les points centraux d'un monosystème non-développable forment donc une courbe que nous appellerons *ligne de striction.*

Théorème 8. *Supposons que nous ayons, sur un monosystème non développable de dimension $k + 1$, des espaces générateurs $\sigma = [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)]$, $\sigma_k = [A(t+h), \boldsymbol{u}_1(t + h), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t + h)]$. Soit S le point central de l'espace σ. Pour tout h choisissons deux points $P(h) \in \sigma$, $Q(h) \in \sigma_h$ tels que la droite $P(h)\, Q(h)$ soit perpendiculaire aux espaces σ et σ_h à la fois. Alors*

$$\lim_{h\to 0} P(h) = \lim_{h\to 0} Q(h) = S\,.$$

Démonstration. Lorsque h est suffisamment petit, les espaces σ, σ_h ne se rencontrent pas et n'ont aucun vecteur commun; cela découle de notre théorème 5. Les points $P(h)$, $Q(h)$ sont donc déterminés sans ambiguïté. Soit A la ligne de striction, $\{\boldsymbol{u}_i\}$ un système naturel de bases. Nous avons

$$P(h) = A(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i(h)\, \boldsymbol{u}_i(t)\,,$$

$$Q(h) = A(t + h) + \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h)\, \boldsymbol{u}_i(t + h)\,,$$

$$Q(h) - P(h) = (A(t + h) - A(t)) + \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h)(\boldsymbol{u}_i(t + h) - \boldsymbol{u}_i(t)) + {} + \sum_{i=1}^{k} (\beta^i(h) - \alpha^i(h))\, \boldsymbol{u}_i(t)\,.$$

Le vecteur $Q(h) - P(h)$, donc aussi le vecteur $(Q(h) - P(h))/h$ doit être orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{u}_j(t)$, $\boldsymbol{u}_j(t + h)$, donc aussi aux vecteurs

$$\frac{1}{h}(\boldsymbol{u}_j(t + h) - \boldsymbol{u}_j(t))\,, \quad j = 1, \ldots, k\,.$$

En exploitant les relations (3) nous obtenons les équations

$$\frac{A(t + h) - A(t)}{h}\, \boldsymbol{u}_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h)\, \frac{\boldsymbol{u}_i(t + h) - \boldsymbol{u}_i(t)}{h}\, \boldsymbol{u}_j(t) + {} + \frac{\beta^j(h) - \alpha^j(h)}{h} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, k\,; \tag{8}$$

$$\frac{A(t + h) - A(t)}{h}\, \frac{\boldsymbol{u}_j(t + h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} + \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h)\, \frac{\boldsymbol{u}_i(t + h) - \boldsymbol{u}_i(t)}{h} \cdot {} \cdot \frac{\boldsymbol{u}_j(t + h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta^i(h) - \alpha^i(h)}{h}\, \boldsymbol{u}_i(t)\, \frac{\boldsymbol{u}_j(t + h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, k\,. \tag{9}$$

Nous multiplions la l-ème équation (8) par l'expression

$$\boldsymbol{u}_l(t)\, \frac{1}{h}(\boldsymbol{u}_j(t + h) - \boldsymbol{u}_j(t))\,;$$

et retranchons toutes les équations ainsi obtenues ($l = 1, \ldots, k$) de la j-ème équation (9). En appliquant ce procédé à toutes les équations (9) (c. à d. pour $j = 1, \ldots, k$), nous obtenons

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} + \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h) \frac{\boldsymbol{u}_i(t+h) - \boldsymbol{u}_i(t)}{h} \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \boldsymbol{u}_i(t) \right) \left(\boldsymbol{u}_i(t) \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \sum_{q=1}^{k} \beta^q(h) \left(\frac{\boldsymbol{u}_q(t+h) - \boldsymbol{u}_q(t)}{h} \boldsymbol{u}_i(t) \right) \left(\boldsymbol{u}_i(t) \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} \right) = 0 ,$$

ce que nous pouvons écrire comme

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{k} \beta^i(h) \left\{ \frac{\boldsymbol{u}_i(t+h) - \boldsymbol{u}_i(t)}{h} \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} - \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{\boldsymbol{u}_i(t+h) - \boldsymbol{u}_i(t)}{h} \boldsymbol{u}_l(t) \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\boldsymbol{u}_l(t) \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} \right) \right\} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \boldsymbol{u}_l(t) \right) \left(\boldsymbol{u}_l(t) \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} \right) -$$

$$- \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \frac{\boldsymbol{u}_j(t+h) - \boldsymbol{u}_j(t)}{h} , \quad j = 1, \ldots, k .$$

C'est un système d'équations linéaires en $\beta^i(h)$. Désignons par $D(h)$ le déterminant de ce système. En vertu de (3), nous voyons aisément que

$$\lim_{h \to 0} D(h) = \det \left(\dot{\boldsymbol{u}}_i(t) \, \dot{\boldsymbol{u}}_j(t) \right) .$$

Ce dernier déterminant est le carré de la matrice $(\dot{\boldsymbol{u}}_1(t), \ldots, \dot{\boldsymbol{u}}_k(t))$, donc non-nul, car le monosystème est non-développable. Il s'en ensuit $D(h) \neq 0$ pour tout h suffisamment petit. A partir des équations (10) nous pouvons donc calculer les $\beta^i(h)$ en nous servant du procédé de Cramér. Comme les seconds membres des équations (10) ont des limites (finies) lorsque $h \to 0$, nous trouvons qu'il en va de même pour

$$\lim_{h \to 0} \beta^i(h) = \beta_0^i .$$

En passant à la limite dans les équations (10) nous obtenons pour les β_0^i le système d'équations

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{k} \beta_0^i \dot{\boldsymbol{u}}_i \dot{\boldsymbol{u}}_j = 0 , \quad j = 1, \ldots, k ,$$

(nous avons $\dot{A}(t) \, \dot{\boldsymbol{u}}_j(t) = 0$, car A est la ligne de striction). Le système (11) n'a que la solution triviale, donc

$$\lim_{h \to 0} \beta^i(h) = 0 , \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{d'où} \quad \lim_{h \to 0} Q(h) = A(t) = S .$$

Considérons maintenant les équations (8) et passons à la limite pour $h \to 0$; nous obtenons

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta^j(h) - \alpha^j(h)}{h} = \dot{A}(t)\, \mathbf{u}_j(t)\,, \quad j = 1, \dots, k\,,$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \alpha^j(h) = \lim_{h \to 0} \beta^j(h) = 0\,, \quad j = 1, 2, \dots, k\,,$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} P(h) = A(t) = S\,.$$

Резюме

СТРИКЦИОННАЯ КРИВАЯ НА МНОГОМЕРНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbf{E}_n$ дано многообразие, образованное однопараметрической системой евклидовых пространств $\mathbf{E}_k(t)$, $1 \leqq k \leqq n - 2$. Такое многообразие мы будем называть *моносистемой* размерности $k + 1$, пространства $\mathbf{E}_k(t)$ – *образующими пространствами* моносистемы. Пусть каждое пространство $\mathbf{E}_k(t)$ задано точкой $A(t)$ и векторами $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)$. Эти векторы можно выбрать так, что справедливо (3). Систему базисов $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)$, удовлетворяющую соотношениям (3), мы будем называть *натуральной системой базисов*. Кривую $A(t)$ мы будем называть *направляющей кривой* моносистемы. Моносистему мы назовем *неразвертывающейся,* если ранг матрицы $(\dot{A}(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_k(t))$ равен $2k + 1$.

Если $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)\}$ – неразвертывающаяся моносистема, то для достаточно малых h пространства $[A(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)]$, $[A(t + h), \mathbf{u}_1(t + h), \dots, \mathbf{u}_k(t + h)]$ не имеют общей точки ни общего вектора. Направляющую кривую $A(t)$ можно выбрать в точности одним способом так, что $\dot{A}(t) \,.\, \dot{\mathbf{u}}_i(t) = 0$ для $i = 1, \dots, k$. Кривую с таким свойством мы будем называть *стрикционной кривой,* точки стрикционной кривой – *центральными точками* соответственных образующих пространств. Оказывается, что центральная точка пространства $[A(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)]$ является предельным положением (для $h \to 0$) основания перпендикуляра, опущенного из этого пространства на образующее пространство $[A(t + h), \mathbf{u}_1(t + h), \dots, \mathbf{u}_k(t + h)]$.