Jindřich Nečas

Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 4, 632–633

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961 Прага

SUR UNE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE, VOISINE DE LA VARIATIONNELLE

(Communication préalable)

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 27 septembre 1961)

Soit Ω un domaine borné avec la frontière lipschitzienne. On désigne par $\varrho(P)$ la distance du point P de Ω de la frontière du domaine considéré. Soit $\mathscr{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes, indéfiniment différentiables sur Ω, continues avec toutes leurs dérivées dans la fermeture de Ω. Soit $D(\Omega)$ le sousespace de $\mathscr{E}(\Omega)$ constitué des fonctions à support compact. On désigne par $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes qui sont avec toutes leurs dérivées (prises au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k de p$^{-\text{ième}}$ puissance sommable avec le poids $\varrho^\alpha(P)$. On munit $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ de la norme

$$|u| = \left[\sum_{i=i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{k} \int_\Omega \left|\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right|^p \varrho^\alpha\,\mathrm{d}\Omega\right]^{1/p}$$

et pour $p = 2$ du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{i=i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{k} \int_\Omega \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\,\frac{\partial^i \bar{v}}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\,\varrho^\alpha\,\mathrm{d}\Omega\,.$$

On désigne par $\overset{\circ}{W}{}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ définie moyennant la norme mentionnée ci-dessus.

On peut maintenant démontrer différents théorèmes de la densité et de l'immersion dont les plus importants sont:

Théorème. *Soit* $\alpha \geqq 0$. *Alors* $\overline{\mathscr{E}(\Omega)} = W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. (*La fermeture est définie moyennant la norme de* $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$.)

Dans la démonstration de ce théorème, on suit à peu près les mêmes idées que pour $\alpha = 0$.

Théorème. *Soit* $\alpha < p - 1$. *Alors* $\overset{\circ}{W}{}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_{p,\alpha-ip}^{(k-i)}(\Omega)$ *et la transformation identique de* $\overset{\circ}{W}{}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ *dans* $\overset{\circ}{W}{}_{p,\alpha-ip}^{(k-i)}(\Omega)$ *est continue.*

Pour démontrer ce théorème, on s'appuie sur l'inégalité de Hardy.

Soit

$$Du = (-1)^{|i|}\, D^i(a_{ij}D^j u)\,,$$

l'opérateur différentiel de l'ordre $2k$, $k \geqq 1$, ou i, j sont les vecteurs $i = [i_1, i_2, \ldots, i_n]$, $j = [j_1, j_2, \ldots, j_n]$ avec composantes $0, 1, \ldots k$, $|i| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, $|j| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$, $|i| \leqq k$, $|j| \leqq k$, $D^j u = \partial^{|j|}u/\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2} \ldots \partial x_n^{j_n}$, a_{ij} sont des fonctions mesurables, bornées; la convention usuelle de la sommation est utilisée. Posons

$$B(v, u) = \int_\Omega \bar{a}_{ij} D^i v D^j \bar{u} \; \mathrm{d}\Omega\,.$$

On suppose de D qu'il soit elliptique:

$$\varphi \in D(\Omega) \Rightarrow |B(\varphi, \varphi)| \geqq C|\varphi|^2_{W^{(k)}_{2,0}(\Omega)}\,.$$

Soit f une fonctionnelle définie sur $\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,-\alpha}$, u_0 une fonction de $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$. Alors on démontre le

Théorème. *Il existe précisément une solution faible u de l'équation $Du = f$, appartenant à $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$, telle que $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$, sous la condition que $|\alpha|$ est assez petit. On a*

$$|u|_{W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)} \leqq c\,\left[|u_0|_{W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)} + |f|\right].$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème précédent et l'on généralise le théorème de P. D. Lax, A. Milgram sur les formes bilinéaires.

Резюме

О МЕТОДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, БЛИЗКОГО К ВАРИАЦИОННОМУ

(Предварительное сообщение)

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

Для областей с границей, удовлетворяющей условию Липшица и для эллиптических дифференциальных операторов порядка $2k$ обобщается вариационный метод.

Вместо пространств Соболева $W_2^{(k)}(\Omega)$ изучаются пространства $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$, где $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ – пространство функций, у которых существуют обобщенные частные производные до порядка k и суммируемые с овторой степенью и с весом $\varrho^\alpha(P)$. Здесь $\varrho(P)$ – расстояние точки от границы; α должно быть достаточно малым.