Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Procházka

О расщепляемости факторгрупп Абелевых групп без кручения конечного ранга

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 4, 521–557

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100483

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ ФАКТОРГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 29/X 1959 г.)

В предлагаемой статье изучается структура факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, прежде всего с точки зрения их расщепляемости. В этом направлении приведено здесь несколько теорем. Кроме этих структурных теорем в работе найдены некоторые условия, достаточные для того, чтобы всякая факторгруппа данной абелевой группы без кручения конечного ранга была расщепляемой. Абелевы группы без кручения, обладающие именно описанными свойствами, будем называть факторно расщепляемыми.

ВВЕДЕНИЕ

Так как в этой статье будут рассматриваться только группы абелевы, то на протяжении всей статьи мы будем под словом группа всегда понимать аддитивно записанную абелеву группу. Нулевой элемент группы мы будем обозначать символом O.

Теперь напомним некоторые основные понятия и договоримся об обозначениях, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Множество всех элементов конечного порядка смешанной группы G является её максимальной периодической подгруппой, которую условимся называть периодической частью группы G. Периодическая часть смешанной группы может иногда служить для неё прямым слагаемым, и тогда мы говорим о расщепляемой группе.

Если $a, b, c, \ldots$ — некоторые элементы данной группы G, то символом $\{a, b, c, \ldots\}$ будем всегда обозначать подгруппу группы G, порожденную элементами $a, b, c, \ldots$. Аналогично символом $\{M\}$ будем обозначать подгруппу, порожденную всеми элементами множества M. Для обозначения прямой суммы групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, или групп $G_\iota (\iota \in \mathbf{I})$, мы будем пользоваться символом $G_1 \dotplus G_2 \dotplus \ldots \dotplus G_n$, или символом $\sum_{\iota \in \mathbf{I}}{}_d \, G_\iota$. Если k — натуральное число и p — простое (положительное) число, то знаком $\mathscr{C}(k)$ будем обозначать циклическую группу порядка k и знаком $\mathscr{C}(p^\infty)$ – p-примарную полную группу Прюфера. Наконец, для обозначения порядка элемента g мы сохраним символ $O(g)$.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА, НЕЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ФАКТОРНО РАСЩЕПЛЯЕМОЙ

Прежде всего введём следующее определение:

Определение 1. Группу без кручения будем называть факторно расщепляемой, если всякая её факторгруппа является расщепляемой группой.

Так как произвольную группу можно представить в виде факторгруппы некоторой свободной абелевой группы, то из существования счётных нерасщепляемых смешанных групп непосредственно вытекает, что каждая свободная абелева группа бесконечного ранга U обладает такой подгруппой V, что факторгруппа U/V является нерасщепляемой группой. С другой стороны, легко видеть, что всякая группа без кручения ранга 1 является факторно расщепляемой. И если ещё заметим, что периодическая часть какой-либо фактогруппы произвольной группы без кручения конечного ранга обладает очень простой структурой (смотри [3]), возникнет очевидно, вопрос, не все ли такие группы факторно расщепляемы. Но в этом абзаце мы дадим пример, который покажет, что такого рода утверждение неправильно. Этот пример будет, в сущности, каким-то приспособлением построения, которым пользуется А. Г. Курош в [1] на стр. 188–189, когда доказывает существование нерасщепляемой группы.

Соответственный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Существует группа без кручения ранга 2, неявляющаяся факторно расщепляемой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{R}$ означает аддитивную группу рациональных чисел и пусть $(p_i)_{i=1}^\infty$ – последовательность всех простых (положительных) чисел. Определим группу $\tilde{U}$ формулой

$$(1,1)\qquad \tilde{U} = \mathscr{R} \dotplus \sum_{i=1}^{\infty}{}_d\, \mathscr{C}(p_i^\infty)\,.$$

В каждой группе $\mathscr{C}(p_i^\infty)$ мы выбираем какой-то элемент x_i порядка p_i,

$$(1,2)\qquad x_i \in \mathscr{C}(p_i^\infty)\,,\quad O(x_i) = p_i\quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и в группе $\mathscr{R}$ произвольный ненулевой элемент y_0:

$$(1,3)\qquad y_0 \in \mathscr{R}\,,\quad y_0 \neq O\,.$$

По формуле (1,1) $\tilde{U}$ является полной группой. Поэтому можно в $\tilde{U}$ найти элементы y_i $(i = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие соотношениям

$$(1,4)\qquad p_i y_i = y_0 + x_i\quad (i = 1, 2, \ldots)\,.$$

Теперь символом $\tilde{G}$ обозначим подгруппу группы $\tilde{U}$, определенную равенством

$$(1,5) \qquad \tilde{G} = \{y_0, x_i, y_i(i = 1, 2, \ldots)\} .$$

Из (1,5) следует, что группа $\tilde{G}$ содержит в качестве своей подгруппы группу

$$(1,6) \qquad \tilde{P} = \{x_i(i = 1, 2, \ldots)\} = \sum_{i=1}^{\infty}{}_d \{x_i\} .$$

Прежде всего мы покажем, что группа $\tilde{P}$ является уже периодической частью группы $\tilde{G}$.

По определению (1,5) каждый элемент $g \in \tilde{G}$ можно выразить в виде суммы

$$(1,7) \qquad g = k_0 y_0 + k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n + x ,$$

где $k_i(i = 0, 1, \ldots, n)$ – целые (рациональные) числа и $x \in \tilde{P}$. Если элемент g вида (1,7) конечного порядка, то элемент

$$(1,8) \qquad g' = k_0 y_0 + k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n$$

тоже должен быть конечного порядка. Это значит, что для определения всех элементов группы $\tilde{G}$ конечного порядка нужно определить все элементы конечного порядка вида (1,8). Этой цели служит следующее вспомогательное предложение: Пусть элемент $g' \in \tilde{G}$ вида (1,8) является нулевым элементом. Тогда, если $n = 0$, то $k_0 = 0$, и если $n \geqq 1$, то $p_i | k_i(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В самом деле, если $n = 0$, то $g' = k_0 y_0 = \boldsymbol{O}$, и это значит, что $k_0 = 0$, так как по (1,3) должно быть $O(y_0) = \infty$.

Пусть теперь $n \geqq 1$ и пусть символ h представляет число

$$(1,9) \qquad h = p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_n .$$

Кроме того, положим

$$(1,10) \qquad h_i = h \,.\, p_i^{-1} \,(i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Так как $g' = \boldsymbol{O}$, то будет также $hg' = \boldsymbol{O}$, или

$$hk_0 y_0 + hk_1 y_1 + \ldots + hk_n y_n = \boldsymbol{O} ;$$

откуда по (1,10) получаем равенство

$$(1,11) \qquad hk_0 y_0 + h_1 k_1 (p_1 y_1) + \ldots + h_n k_n (p_n y_n) = \boldsymbol{O} .$$

Если воспользоваться соотношениями (1,4), можно формулу (1,11) записать в виде

$$hk_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i k_i (y_0 + x_i) = \boldsymbol{O} ,$$

или тоже в виде

$$(1,12) \qquad \Bigl(hk_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i k_i\Bigr) y_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i k_i x_i = \boldsymbol{O} .$$

Из прямого разложения (1,1) и последней формулы (1,12) следует, что $h_i k_i x_i = O$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, или по (1,2)

$$p_i | h_i k_i \, (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{1,13}$$

Из определения чисел $h_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ формулами (1,9) и (1,10) вытекает, что $(h_i, p_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; итак, из (1,13) следуют уже соотношения $p_i | k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, чем утверждение доказано.

Пусть теперь g — произвольный элемент конечного порядка группы $\tilde{G}$ вида (1,7). Если $n = 0$, т. е. если $g = k_0 y_0 + x$, то элемент $k_0 y_0$ тоже должен быть конечного порядка, или $k_0 y_0 = O$ и $g = x \in \tilde{P}$.

Теперь предположим, что $n \geqq 1$ и что $p_i | k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. $k_i = p_i k_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда по (1,4) должно быть

$$g = \left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i'\right) y_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i' x_i + x ,$$

и так как по предположению элемент g конечного порядка, то необходимо будет $\left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i'\right) y_0 = O$. Но это значит, что и в этом случае имеем $g = \sum_{i=1}^{n} k_i' x_i + x \in P$.

Если удастся нам теперь показать, что другой возможности уже нет, то тем будет доказано, что каждый элемент конечного порядка группы $\tilde{G}$ содержится в подгруппе $\tilde{P}$. Но так как группа $\tilde{P}$ — уже периодическая, то тем будет полностью доказано, что $\tilde{P}$ является периодической частью группы $\tilde{G}$.

Итак, пусть $n \geqq 1$ и пусть наоборот существуют индексы $i (1 \leqq i \leqq n)$, для которых $p_i \nmid k_i$. Пусть это именно индексы $i_1 \leqq \ldots \leqq i_s$, $s \geqq 1$. Для остальных индексов $i (1 \leqq i \leqq n)$ будет $k_i = p_i k_i'$, или по формулам (1,4)

$$k_i y_i = k_i'(p_i y_i) = k_i'(y_0 + x_i) .$$

Это значит, что элемент g можно выразить в виде

$$g = \bar{k}_0 y_0 + \sum_{j=1}^{s} k_{i_j} y_{i_j} + \bar{x} ,$$

где $\bar{k}_0$ — удобное целое число и $\bar{x} \in \tilde{P}$. Так как элемент g — конечного порядка, то элемент

$$g' = \bar{k}_0 y_0 + \sum_{j=1}^{s} k_{i_j} y_{i_j}$$

тоже должен быть конечного порядка. Если положим $m = O(g')$, то будет

$$mg' = m\bar{k}_0 y_0 + \sum_{j=1}^{s} (m k_{i_j}) \, y_{i_j} = O . \tag{1,14}$$

Из вспомогательного предложения, доказанного в течение доказательства, следует, что $p_{i_j}|mk_{i_j}\,(j = 1, \ldots, s)$, и так как $(p_{i_j}, k_{i_j}) = 1\,(j = 1, \ldots, s)$, то должно быть $p_{i_j}|m\,(j = 1, \ldots, s)$. Число m будем писать в виде

$$(1,15)\qquad \begin{cases} m = p_{i_j} m_j\,(j = 1, \ldots, s - 1)\,, \\ m = p_{i_s}^k m_s\,, \quad k \geqq 1\,, \quad (p_{i_s}, m_s) = 1\,. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулами (1,15) и (1,4), равенство (1,14) перепишем в виде

$$mg' = m\bar{k}_0 y_0 + \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j}(y_0 + x_{i_j}) + p_{i_s}^{k-1} m_s(y_0 + x_{i_s}) = \boldsymbol{O}\,,$$

или, наконец, в виде

$$(1,16)\qquad mg' = \left(m\bar{k}_0 + \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j} + p_{i_s}^{k-1} m_s\right) y_0 + x' = \boldsymbol{O}\,,$$

где для упрощения полагаем

$$x' = \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j} x_{i_j} + p_{i_s}^{k-1} m_s x_{i_s} \in \tilde{\boldsymbol{P}}\,.$$

Из прямого разложения (1,1) и из равенства (1,16) следует равенство $\left(m\bar{k}_0 + \right.$ $\left. + \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j} + p_{i_s}^{k-1} m_s\right) y_0 = \boldsymbol{O}$, или также

$$m\bar{k}_0 + \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j} + p_{i_s}^{k-1} m_s = O\,.$$

Последнее равенство можно писать в ещё удобнейшем виде

$$(1,17)\qquad m\bar{k}_0 + \sum_{j=1}^{s-1} m_j k_{i_j} = - p_{i_s}^{k-1} m_s\,.$$

Из соотношений (1,15) вытекает, что

$$p_{i_s}^k|m\,, \quad p_{i_s}^k|m_j\,(j = 1, \ldots, s - 1)\,,$$

и это значит, что левую часть равенства (1,17) можно разделить на $p_{i_s}^k$. Но из тех же соотношений (1,15) вытекает, что правую часть равенства (1,17) можно разделить только на $p_{i_s}^{k-1}$; итак, мы пришли к противоречию.

Этим мы полностью доказали, что $\tilde{P}$ является периодической частью группы $\tilde{G}$.

Теперь мы убедимся в том, что группа $\tilde{G}$ является нерасщепляемой.

Пусть, наоборот, группа $\tilde{G}$ расщепляема и пусть $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$ — какое-нибудь её прямое разложение. Тогда можно каждый элемент $y_i \in \tilde{G}\,(i = 0, 1, 2, \ldots)$ однозначно выразить в виде суммы

$$(1,18)\qquad y_i = a_i + b_i\,(i = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

где $a_i \in \tilde{A}$, $b_i \in \tilde{P}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. По (1,18) можно соотношения (1,4) переписать в виде

$$p_i(a_i + b_i) = (a_0 + b_0) + x_i\,(i = 1, 2, \ldots)\,;$$

откуда, в частности, получим соотношения

$$p_i b_i = b_0 + x_i \left(i = 1, 2, \ldots\right). \tag{1,19}$$

Так как $b_0 \in \tilde{P}$, следует из прямого разложения (1,6) группы $\tilde{P}$, что элемент b_0 можно выразить в виде суммы

$$b_0 = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j , \tag{1,20}$$

где n – какое-то натуральное число и $m_j \left(j = 1, \ldots, n\right)$ – подходящие целые числа. Пусть теперь i – произвольный зафиксированный индекс, $i > n$. Так как $b_i \in \tilde{P}$, в силу (1,6) можно писать

$$b_i = \sum_{j=1}^{N} k_j x_j ; \tag{1,21}$$

здесь опять N – какое-то натуральное число и $k_j \left(j = 1, \ldots, N\right)$ – целые числа. Если воспользоваться формулами (1,20) и (1,21), можно равенство (1,19) записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} p_i k_j x_j = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j + x_i . \tag{1,22}$$

Таким образом мы получили два различных представления одного и того же элемента группы $\tilde{P}$. Но так как разложение (1,6) группы $\tilde{P}$ является прямым, то из равенства (1,22) вытекает, что для всякого индекса j коэффициент элемента x_j в левой части равенства (1,22) сравним по модулю p_j с коэффициентом элемента x_j в правой части того же равенства. Однако, очевидно, что это последнее условие не выполнено для $j = i$, и мы получили противоречие. Итак, тем самым мы доказали, что группа $\tilde{G}$ нерасщепляема.

Пусть теперь $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ – два экземпляра аддитивной группы рациональных чисел и пусть C' – подгруппа всех целых чисел группы $\mathscr{R}'$. Легко видеть, что

$$\mathscr{R}'/C' \cong \sum_{i=1}^{\infty}{}_d \mathscr{C}(p_i^{\infty}) ;$$

итак, если положим $\mathscr{R}^{(2)} = \mathscr{R} \dotplus \mathscr{R}'$, то будет

$$\mathscr{R}^{(2)}/C' \cong \mathscr{R} \dotplus \sum_{i=1}^{\infty}{}_d \mathscr{C}(p_i^{\infty}) = \tilde{U} .$$

Пусть теперь G – такая подгруппа группы $\mathscr{R}^{(2)}$, что $C' \subseteq G$ и одновременно

$$G/C' \cong \tilde{G} \subseteq \tilde{U} . \tag{1,23}$$

Очевидно, G является группой без кручения ранга 2. Так как группа G нерасщепляема, из изоморфизма (1,23) следует, что группа G факторно нерасщепляема.

Теорема полностью доказана.

2. НЕСКОЛЬКО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Прежде, чем перейти к собственному изучению структуры факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, нужно напомнить некоторые понятия и вывести несколько лемм, которые окажутся для нас полезными.

Начнём со следующего определения.

Определение 2. Пусть G — группа без кручения и пусть M — произвольное множество её элементов. Тогда через $\mathscr{S}(M)$ обозначим минимальную сервантную подгруппу группы G, содержащую множество M, и назовем её сервантной оболочкой множества M. Если $M = (g)$, то будем просто писать $\mathscr{S}(g)$.

Как хорошо известно, сервантная оболочка $\mathscr{S}(M)$ множества M в группе G состоит именно из всех элементов группы G, линейно зависящых от множества M, т. е. из тех элементов $g \in G$, для которых существуют целые числа $m(m \neq 0)$, $k_1, \ldots, k_n$ и элементы $a_i \in M$ $(i = 1, \ldots, n)$ так, что $mg = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$.

Определение 3. Пусть G — группа без кручения, g — произвольный её элемент и p — данное простое число. Тогда верхнюю грань множества всех целых неотрицательных чисел k, для которых в группе G разрешимо уравнение $p^kx = g$, будем называть p-высотой элемента g в группе G и обозначать символом $\chi(g; p, G)$.

В заключение введём ещё следующее обозначение: Если G — группа без кручения и g — произвольный её элемент, то символом $\mathscr{R}(g; G)$ обозначим подгруппу аддитивной группы рациональных чисел $\mathscr{R}$, порожденную всеми дробьями вида $1/p^k$, где p — какое-нибудь простое число и k — целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $k \leqq \chi(g; p, G)$.

Теперь выведём ряд элементарных лемм.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа без кручения и пусть g — произвольный её ненулевой элемент. Пусть, далее, m, n — целые числа, $n \neq 0$. В таком случае уравнение*

$$nx = mg \tag{2,1}$$

в группе G разрешимо тогда и только тогда, если $m/n \in \mathscr{R}(g; G)$.

Доказательство. Пусть сначала для целых чисел $m, n(n \neq 0)$ уравнение (2,1) в G разрешимо и пусть $\bar{g} \in G$ является его решением. Очевидно, что можно ограничиться только тем случаем, когда $n > 0$ и $(m, n) = 1$.

Если $n = 1$, то, конечно, $m/n = m \in \mathscr{R}(g; G)$. Итак, пусть $n > 1$; в этом случае пишем

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}, \tag{2,2}$$

где $e_j(j = 1, \ldots, k)$ — натуральные числа и $p_j(j = 1, \ldots, k)$ — отличные друг от друга простые числа. Если положим

$$n_j = n \cdot p_j^{-e_j} \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{2,3}$$

и далее $\bar{g}_j = n_j\bar{g}$ $(j = 1, \dots, k)$, то имеем

$$(2,4) \qquad p_j^{e_j}\bar{g}_j = n\bar{g} = mg \quad (j = 1, \dots, k).$$

По предположению $(m, n) = 1$, или же, в частности, $(p_j^{e_j}, m) = 1$ $(j = 1, \dots, k)$. Итак, существуют целые числа h_j, l_j $(j = 1, \dots, k)$, для которых имеют место равенства

$$(2,5) \qquad h_jm + l_jp_j^{e_j} = 1 \quad (j = 1, \dots, k).$$

Воспользовавшись соотношениями (2,4) и (2,5), получим равенства

$$(2,6) \qquad p_j^{e_j}h_j\bar{g}_j = h_jmg = (1 - l_jp_j^{e_j})\, g \quad (j = 1, \dots, k).$$

Если (2,6) перепишем, то получим

$$p_j^{e_j}(h_j\bar{g}_j + l_jg) = g \quad (j = 1, \dots, k),$$

но это значит, что

$$(2,7) \qquad e_j \leqq \chi(g; p_j, G) \quad (j = 1, \dots, k).$$

Из соотношений (2,2) и (2,7) уже следует, что $m/n \in \mathcal{R}(g; G)$.

Пусть теперь наоборот $m/n \in \mathcal{R}(g; G)$; опять можно предполагать, что $(m, n) = 1$ и $n > 0$. Если $n = 1$, то уравнение (2,1) в группе G тривиально разрешимо. Итак, путсь $n > 1$. Натуральное число n представим в виде произведения (2,2), и так как $m/n \in \mathcal{R}(g; G)$ и $(m, n) = 1$, то числа e_j $(j = 1, \dots, k)$ удовлетворяют неравенствам (2,7). Это влечёт за собой существование таких элементов $g_j \in G$, что справедливы равенства

$$(2,8) \qquad p_j^{e_j}g_j = g \quad (j = 1, \dots, k).$$

Если числа n_j $(j = 1, \dots, k)$ определены соотношениями (2,3), то, очевидно, $(n_1, \dots, n_k) = 1$ и можхо найти целые числа l_j $(j = 1, \dots, k)$ так, что будет

$$(2,9) \qquad l_1n_1 + \dots + l_kn_k = 1.$$

Из (2,8) и (2,3) следует, что $n_jg = ng_j$ $(j = 1, \dots, k)$, и точно также

$$(2,10) \qquad nl_jg_j = l_jn_jg \quad (j = 1, \dots, k).$$

По (2,10) и (2,9) можно писать

$$n\sum_{j=1}^{k} l_jg_j = \Big(\sum_{j=1}^{k} l_jn_j\Big)\, g = g,$$

или, наконец,

$$n\Big(m\sum_{j=1}^{k} l_jg_j\Big) = mg.$$

Таким образом мы доказали, что уравнение (2,1) имеет в группе G решение.

Лемма полностью доказана.

Для упрощения записи введём ещё следующее обозначение: Пусть G — группа без кручения и пусть m, $n(n \neq 0)$ — целые числа; если элемент $g' \in G$ удовлетворяет уравнению $ng' = mg$, где g — какой-то элемент группы G, то элемент g' будем записывать в виде $g' = (m/n)\, g$. Легко видеть, что если $g_1 = (m_1/n_1)\, g$ и $g_2 = (m_2/n_2)\, g$, то $g_1 + g_2 = (m_1/n_1 + m_2/n_2)\, g$. Так же просто можно убедиться в том, что если $g' = (m/n)\, g$ и $g'' = (s/t)\, g'$, то будет $g'' = (s/t \,.\, m/n)\, g$.

Если воспользоваться только что введённым обозначением, то лемму 2.1 можно высказать следующим образом.

Лемма 2.2. *Пусть G — группа без кручения и пусть g — произвольный её ненулевой элемент. Тогда сервантную оболочку множества (g) в группе G можно представить в виде*

$$\mathscr{S}(g) = E(x;\, x \in G,\, x = \varrho g,\, \varrho \in \mathscr{R}(g;\, G))\,.$$

Доказательство. Группа $\mathscr{S}(g)$ состоит из тех и только тех элементов $x \in G$, для которых существуют целые числа m, $n(n \neq 0)$, удовлетворяющие равенству $nx = mg$. Теперь лемма 2.2 является следствием леммы 2.1.

В дальнейшем мы будем просто писать $\mathscr{S}(g) = \mathscr{R}(g;\, G)\, g$.

Лемма 2.3. *Пусть G — группа без кручения и пусть $G = G_1 \dotplus G_2$ — какое-то её прямое разложение. Пусть g — элемент группы G, представленный в виде суммы*

$$g = g_1 + g_2\,, \quad g_i \in G_i \quad (i = 1, 2)\,. \tag{2,11}$$

Тогда

$$\mathscr{R}(g;\, G) = \mathscr{R}(g_1;\, G) \cap \mathscr{R}(g_2;\, G)\,. \tag{2,12}$$

Доказательство. В силу прямого разложения группы G и формулы (2,11) имеет место равенство

$$\chi(g;\, p,\, G) = \min_{i=1,2} \chi(g_i;\, p,\, G)\,, \tag{2,13}$$

где p — произвольное простое число. Из (2,13) и определения групп $\mathscr{R}(g;\, G)$, $\mathscr{R}(g_i;\, G)\,(i = 1, 2)$ непосредственно следует (2,12).

Замечание. Методом полной индукции можно предшествующую лемму перенести на случай произвольного конечного числа прямых слагаемых.

Лемма 2.4. *Пусть G — расщепляемая группа с периодической частью P. Если H — такая подгруппа группы G, что $H \subseteq P$, то факторгруппа G/H является тоже расщепляемой.*

Доказательство. По предположению $G = A \dotplus P$, где A — группа без кручения. Так как $H \subseteq P$, то будет

$$G/H \cong A \dotplus P/H\,,$$

и лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — её произвольная подгруппа, $H \neq (O)$. Если существует такая свободная* *подгруппа U группы H того же ранга, как H, что факторгруппа G/U расщепляема, то факторгруппа G/H тоже будет расщепляемой.*

Доказательство. По предположению ранги $r(H)$ и $r(U)$ групп H и U равны, и это значит, что $\mathscr{S}(H) = \mathscr{S}(U)$. Итак, имеем

$$H \subseteq \mathscr{S}(H) = \mathscr{S}(U)\,. \tag{2,14}$$

Если теперь положим $\tilde{G} = G/U$ и $\tilde{H} = H/U$, то по второй теореме об изоморфизме будет

$$G/H \cong \tilde{G}/\tilde{H}\,. \tag{2,15}$$

По предположению группа $\tilde{G} = G/U$ является расщепляемой. Притом легко видеть, что её периодической частью $\tilde{P}$ является в точности группа $\tilde{P} = \mathscr{S}(U)/U$. Значит, из (2,14) следует

$$H/U = \tilde{H} \subseteq \tilde{P} = \mathscr{S}(U)/U\,.$$

Если теперь применим лемму 2.4 к группе $\tilde{G}$ и её подгруппе $\tilde{H}$, то факторгруппа $\tilde{G}/\tilde{H}$ должна быть расщепляема и такой же будет по (2,15) и факторгруппа G/H.

Лемма 2.6. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга. Группа G тогда и только тогда факторно расщепляема, если расщепляема всякая факторгруппа G/U, где U — произвольная свободная подгруппа группы G.*

Доказательство. Справедливость этой леммы следует непосредственно из определения факторной расщепляемости и из леммы 2.5.

Определение 4. Если G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и если она разложима в прямую сумму r своих подгрупп $I_j\ (j = 1, \ldots, r)$ ранга 1, $G = \sum_{j=1}^{r}{}_d\, I_j$, то группу G будем называть тотально разложимой, и всякое её такое разложение в подгруппы ранга 1 будем просто называть тотальным разложением группы G.

Лемма 2.7. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 2$ и пусть*

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r \tag{2,16}$$

какое-то её тотальное разложение. Пусть H — произвольная подгруппа группы G ранга s, $1 \leqq s \leqq r$. Если $H \cap I_1 \neq (O)$, то в подгруппе H существует s линейно независимых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_s$, которые можно представить в виде сумм

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_{11}\,, \\ y_2 = \quad x_{22} + \ldots + x_{2r}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_s = \quad x_{s2} + \ldots + x_{sr}\,, \end{array}\right. \tag{2,17}$$

где

$$x_{ik} \in I_k \quad (i = 2, \ldots, s; k = 2, \ldots, r), \quad x_{11} \in I_1, \quad x_{11} \neq O.$$

Доказательство. По предположению $I_1 \cap H \neq (O)$; следовательно, можно выбрать элемент $z_1 \in I_1 \cap H$, $z_1 \neq O$. Теперь найдём в подгруппе H s линейно независимых элементов так, чтобы элемент z_1 был одним из них. Пусть это элементы $z_1, z_2, \ldots, z_s$. По прямому разложению (2,16) элементы z_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ можно представить в виде

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= z_1 , \\ z_2 &= z_{21} + z_{22} + \ldots + z_{2r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_s &= z_{s1} + z_{s2} + \ldots + z_{sr}, \end{aligned}\right. \tag{2,18}$$

где $z_{ik} \in I_k$ $(i = 2, \ldots, s; k = 1, 2, \ldots, r)$ и $z_1 \in I_1$. Если $z_{i1} = O$ $(i = 2, \ldots, s)$, то уже элементы (2,18) удовлетворяют условиям леммы, и лемма доказана. Итак, пусть среди элементов z_{i1} $(i = 2, \ldots, s)$ можно найти ненулевые элементы и пусть это в точности элементы z_{i1} $(i = 2, \ldots, k; k \leqq s)$. Но так как $z_{i1} \in I_1$ $(i = 2, \ldots, k)$ и $z_1 \in I_1$, $z_1 \neq O$, то элементы z_{i1} $(i = 2, \ldots, k)$ зависят линейно от элемента z_1, или же существуют целые ненулевые числа n, m_i $(i = 2, \ldots, k)$ так, что

$$n z_1 = m_i z_{i1} \quad (i = 2, \ldots, k). \tag{2,19}$$

Если теперь положим

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \quad y_i = z_i \quad (i = k + 1, \ldots, s), \\ y_i &= m_i z_i - n z_1 \quad (i = 2, \ldots, k), \end{aligned}$$

то, очевидно, элементы y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ будут опять линейно независимыми и, как следует из (2,18) и (2,19), можно для них воспользоваться записью (2,17). Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть дано какое-нибудь её тотальное разложение вида* (2,16). *Если H — подгруппа группы G того же ранга r, как группа G, то*

$$I_k \cap H \neq (O) \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2,20}$$

Доказательство. Пусть наоборот для какогото индекса k, $1 \leqq k \leqq r$, будет $I_k \cap H = (O)$. В таком случае подгруппа $H' = \{I_k, H\} = I_k \dotplus H$ является подгруппой ранга $r + 1$, что невозможно, и лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 2$ и пусть дано какое-то её тотальное разложение вида* (2,16). *Пусть H — такая подгруппа группы G ранга $r - 1$, что*

$$H \cap I_k = (O) \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2,21}$$

Тогда в подгруппе H можно найти $r-1$ линейно независимых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$, которые можно представить в виде сумм

(2,22)
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_r, \\ y_2 = x_2 + x_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{r-1} = x_{r-1} + x_r, \end{cases}$$

где $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Доказательство. Лемму докажем методом полной индукции по рангу группы G.

Пусть сначала $r = 2$ и пусть $G = I_1 \dotplus I_2$, тогда подгруппа H должна иметь ранг 1. Если теперь y_1 – произвольный ненулевой элемент группы H, то можно его выразить в виде суммы $y_1 = x_1 + x_2$, где $x_k \in I_k$ $(k = 1, 2)$. Но так как выполнены соотношения (2,21), то необходимо $x_k \neq O$ $(k = 1, 2)$. Таким образом, в этом случае справедливость леммы полностью доказана.

Пусть теперь $r > 2$ и пусть утверждение леммы справедливо для групп ранга $r-1$. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ – $r-1$ произвольно выбранных линейно независимых элементов группы H. Так как G обладает прямым разложением вида (2,16), то элементы z_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ можно выразить в виде сумм

(2,23)
$$z_i = z_{i1} + z_{i2} + \ldots + z_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

где $z_{ik} \in I_k$ $(i = 1, \ldots, r-1;\ k = 1, 2, \ldots, r)$. Невозможно, чтобы $z_{i1} = O$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, так как в таком случае группа U ранга $r-1$, определенная формулой

$$U = \sum_{i=1}^{r=1}{}_d \{z_i\} \subseteq H,$$

была бы подгруппой тотально разложимой группы $G' = \sum_{k=2}^{r}{}_d I_k$ того же ранга $r-1$, и по лемме 2.8 должно было бы быть

$$(O) \neq U \cap I_k \subseteq H \cap I_k \quad (k = 2, \ldots, r),$$

что противоречит соотношениям (2,21). Итак, по крайней мере один из элементов z_{i1} $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ является ненулевым; пусть это элемент $z_{11} : z_{11} \neq O$. Тогда методом аналогичным тому, которым мы воспользовались в течение доказательства леммы 2.7, можно в группе H найти $r-1$ линейно независимых элементов $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{r-1}$, которые можно записать в виде сумм

(2,24)
$$\begin{aligned} z'_1 &= z'_{11} + z'_{12} + \ldots + z'_{1r}, \\ z'_i &= \phantom{z'_{11} + {}} z'_{i2} + \ldots + z'_{ir} \quad (i = 2, \ldots, r-1), \end{aligned}$$

где $z'_{ik} \in I_k$ $(i = 2, \ldots, r-1;\ k = 2, \ldots, r)$ и $z'_{11} \in I_1$, $z'_{11} \neq O$. Если теперь определим группу U' формулой

$$U' = \sum_{i=2}^{r-1}{}_d \{z'_i\},$$

то, имея в виду соотношения (2,24), можем утверждать, что группа U' будет подгруппой ранга $r-2$ тотально разложимой группы $G' = \sum_{d\, k=2}^{r} I_k$ ранга $r-1$. Так как $U' \subseteq H$, то из соотношений (2,21) следует, что $U' \cap I_k = (O)$ $(k = 2, \dots, r)$, или же по индуктивному предположению можно в подгруппе U' найти $r-2$ линейно независимых элементов y'_i $(i = 2, \dots, r-1)$, которые можно записать в виде сумм

$$(2{,}25)\qquad \begin{cases} y'_2 = x'_2 + x'_r, \\ y'_3 = x'_3 + x'_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_{r-1} = x'_{r-1} + x'_r, \end{cases}$$

где $x'_i \in I_i$ и $x'_i \neq O$ $(i = 2, \dots, r)$. В силу того, что $z'_{11} \neq O$, можно утверждать, что элементы

$$z'_1, y'_2, \dots, y'_{r-1}$$

являются линейно независимыми элементами группы H. Так как $z'_{1k} \in I_k$, $x'_k \in I_k$, $x'_k \neq O$ и так как I_k — подгруппа ранга 1 $(k = 2, \dots, r-1)$, то каждый елемент z'_{1k} зависит линейно от элемента x'_k $(k = 2, \dots, r-1)$, или же существуют такие целые числа $n (n \neq 0)$ и m_k $(k = 2, \dots, r-1)$, что

$$(2{,}26)\qquad nz'_{1k} = m_k x'_k \quad (k = 2, \dots, r-1).$$

Итак, если теперь определим элементы $\bar{y}_i$ $(i = 1, \dots, r-1)$ формулами

$$\bar{y}_1 = nz'_1 - \sum_{k=2}^{r-1} m_k y'_k, \quad \bar{y}_i = y'_i \quad (i = 2, \dots, r-1),$$

то по формулам (2,25) и (2,26) можно элементы $\bar{y}_i$ $(i = 1, \dots, r-1)$ представить в виде сумм

$$(2{,}27)\qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = x'_1 + x'_{1r}, \\ \bar{y}_2 = x'_2 + x'_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}_{r-1} = x'_{r-1} + x'_r, \end{cases}$$

где для простоты пишем

$$x'_1 = nz'_{11}, \quad x'_{1r} = nz'_{1r} - \Big(\sum_{k=2}^{r-1} m_k\Big) x'_r.$$

Об элементах x'_{1r} и x'_r можно ещё в силу (2,21) утверждать, что $x'_{1r} \neq O$, $x'_r \neq O$ и $x'_{1r} \in I_r$, $x'_r \in I_r$. Отсюда следует существование двух таких ненулевых целых чисел u_1, u, что $u_1 x'_{1r} = u x'_r$. Следовательно, если положим

$$y_1 = u_1 \bar{y}_1, \quad y_i = u \bar{y}_i \quad (i = 2, \dots, r-1),$$

то в силу последнего равенства из соотношений (2,27) непосредственно вытекает, что y_i $(i = 1, 2, \dots, r-1)$ являются искомыми элементами подгруппы H.

Лемма полностью доказана.

Пусть G — произвольная группа без кручения и пусть I — какая-нибудь её сервантная подгруппа ранга 1. Если x — ненулевой элемент группы I, то будет в точности $I = \mathscr{S}(x)$. Итак, по лемме 2.2 можно писать $I = \mathscr{R}(x; G)\,x$. Это значит, что если, в частности, G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, если, далее, $G = \sum_{k=1}^{r}{}_d I_k$ — какое-то её тотальное разложение и если $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, то группу G можно выразить в виде

$$G = \sum_{k=1}^{r}{}_d \mathscr{R}(x_k; G)\,x_k\,. \tag{2,28}$$

В силу прямого разложения (2,28) группы G можно каждый её элемент g писать, как сумму элементов вида

$$g = \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_r x_r\,,$$

где $\varrho_k \in \mathscr{R}(x_k; G)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Лемма 2.10. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть дано какое-то её тотальное разложение вида* (2,16). *Пусть, далее, $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ — линейно независимые элементы группы G, записанные в виде сумм* (2,22), *где $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Тогда сервантная подгруппа $S = \mathscr{S}((y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}))$ группы G является в точности множеством всех элементов $g \in G$ вида*

$$g = \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_r x_r\,, \quad \varrho_k \in \mathscr{R}(x_k; G)\,(k = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

для которых справедливо равенство

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{r-1} = \varrho_r\,.$$

Доказательство. Пусть сначала g — произвольный элемент подгруппы S. По определению группы S существуют такие целые числа $m (m \neq 0)$, $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$, что имеет место равенство

$$mg = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_{r-1} y_{r-1}\,. \tag{2,29}$$

Но так как элементы y_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ можно записать в виде (2,22), то вместо (2,29) можно писать равенство

$$mg = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_{r-1} x_{r-1} + \Big(\sum_{i=1}^{r-1} b_i\Big)\,x_r\,. \tag{2,30}$$

Как мы заметили, элемент g можно выразить тоже в виде

$$g = \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_{r-1} x_{r-1} + \varrho_r x_r\,, \tag{2,31}$$

где $\varrho_k \in \mathscr{R}(x_k; G)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Если записать все рациональные числа ϱ_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ как числа с тем же общим знаменателем n, то вместо (2,31) можно писать

$$g = \frac{a_1}{n}\,x_1 + \frac{a_2}{n}\,x_2 + \ldots + \frac{a_{r-1}}{n}\,x_{r-1} + \frac{a_r}{n}\,x_r\,,$$

или же после умножения на число n

$$ng = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{r-1}x_{r-1} + a_rx_r\,. \tag{2,32}$$

Сравнив соотношения (2,30) и (2,32), мы получим равенства

$$\frac{b_i}{m} = \frac{a_i}{n} = \varrho_i \quad (i = 1,\ldots, r-1)\,, \quad \sum_{i=1}^{r-1} \frac{b_i}{m} = \frac{a_r}{n} = \varrho_r\,,$$

или рациональные числа ϱ_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют соотношению

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{r-1} = \varrho_r\,. \tag{2,33}$$

Пусть теперь наоборот для элемента $g \in G$, записанного в виде (2,31), выполнено равенство (2,33). Если рациональные числа ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ запишем как числа с тем же обшим знаменателем n, $\varrho_i = a_i/n$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то элемент g удовлетворяет соотношению вида (2,32). По предположению выполнено равенство (2,33), или $\frac{a_r}{n} = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{a_i}{n}$. Отсюда получим в частности равенство

$$a_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i\,. \tag{2,34}$$

В силу формулы (2,34) можно соотношение (2,32) переписать в виде

$$ng = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(x_i + x_r)\,,$$

или по (2,22)

$$ng = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_{r-1}y_{r-1}\,.$$

Но из последнего равенства уже следует, что $g \in \mathscr{S}((y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})) = S$.

Этим лемма полностью доказана.

3. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ

Главной целью этого отдела будет формулировка и доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — произвольная её подгруппа ранга $r - 1$. Тогда фактор-группа G/H является расщепляемой.*

Доказательство. Применим полную индукцию по рангу r группы G.

Если G — группа ранга 1, $r = 1$, то единственной подгруппой ранга $r - 1 = 0$ группы G является нулевая подгруппа: $H = (O)$. Очевидно, что в этом случае теорема справедлива.

Итак, пусть G — тотально разложимая группа ранга $r > 1$ и пусть теорема уже справедлива для всех групп ранга $r - 1$. Пусть

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r \tag{3,1}$$

какое-то тотальное разложение группы G и пусть H — данная её подгруппа ранга $r-1$. В дальнейшем окажется полезным различать два случая.

а) Пусть для какого-то индекса k $(1 \leqq k \leqq r)$ $H \cap I_k \neq (O)$. Для простоты можно предполагать, что это именно $k = 1$, или

$$(3,2) \qquad H \cap I_1 \neq (O) .$$

На основании леммы 2.7 можно из (3,2) вывести, что в подгруппе H существует $r-1$ линейно независимых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$, имеющих вид (2,17), где только $s = r - 1$. Если положим

$$(3,3) \qquad U = \sum_{i=1}^{r-1}{}_d \{y_i\}, \quad U' = \sum_{i=2}^{r-1}{}_d \{y_i\},$$

то по (2,17) будет

$$(3,4) \qquad \{y_1\} \subseteq I_1, \quad U' \subseteq G' = \sum_{k=2}^{r}{}_d I_k .$$

Если построим факторгруппу

$$G/U = (I_1 \dotplus G')/(\{y_1\} \dotplus U'),$$

то по (3,4) имеет место изоморфизм

$$(3,5) \qquad G/U \cong I_1/\{y_1\} \dotplus G'/U' .$$

Группа G' является тотально разложимой группой ранга $r - 1$ и U' — её подгруппой ранга $r - 2$, следовательно по индуктивному предположению факторгруппа G'/U' уже расщепляема. Но так как факторгруппа $I_1/\{y_1\}$ периодична, то из (3,5) следует расщепляемость группы G/U. Отсюда, применением леммы 2.5 к группе G и её подгруппам H, U, получим расщепляемость группы G/H.

в) Теперь будем предполагать, что

$$(3,6) \qquad H \cap I_k = (O) \quad (k = 1, 2, \ldots, r) .$$

Как показано в лемме 2.9, можно в таком случае найти в подгруппе H $r - 1$ линейно независимых элементов

$$(3,7) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{r-1},$$

которые можно представить в виде сумм (2,22), где $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Теперь разобьём множество всех простых (положительных) чисел $\prod$ в r попарно непересекающихся подмножеств $\prod_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ следующим образом: В $\prod_i$ входят все простые (положительные) числа p, удовлетворяющие условиям:

$$(3,8) \qquad \begin{cases} 1)\ \chi(x_i; p, G) = \max\limits_{k=1,\ldots,r} \chi(x_k; p, G), \\ 2)\ \text{если } k < i, \ \text{ то } \ \chi(x_k; p, G) < \chi(x_i; p, G) . \end{cases}$$

Кроме того, символом Q_i обозначим множество, содержащее число 1 и все натуральные числа, которые можно делить на степени простых чисел из множества $\prod_i (i = 1, 2, \ldots, r)$, и никакие другие.

Из определения множеств $Q_i\ (i = 1, 2, \ldots, r)$ вытекает прежде всего, что

$$m \in Q_i\,, \quad n \in Q_j\,, \quad i \neq j \Rightarrow (m, n) = 1\,. \tag{3,9}$$

Далее легко видеть, что всякое натуральное число n можно выразить единственным образом в виде произведения

$$n = \varphi_1(n)\,.\,\varphi_2(n)\,.\,\ldots\,.\,\varphi_r(n)\,, \tag{3,10}$$

где $\varphi_i(n) \in Q_i\ (i = 1, 2, \ldots, r)$.

Теперь символом U обозначим свободную подгруппу группы H, определенную формулой

$$U = \sum_{i=1}^{r-1}{}_d\ \{y_i\}\,, \tag{3,11}$$

где $y_i\ (i = 1, 2, \ldots, r-1)$ – элементы (3,7). Как следует из леммы 2.5, для доказательства расщепляемости группы G/H достаточно убедиться в том, что расщепляема факторгруппа G/U, и это будет нашей ближащей целью.

Доказательство расщепляемости группы G/U проведем при помощи конструкции. Именно, найдём прямое разложение группы $\tilde{G} = G/U$, $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$, где $\tilde{P}$ – периодическая часть группы $\tilde{G}$ и $\tilde{A}$ – какая-то группа без кручения, в этом случае ранга 1.

Если символом $\mathscr{S}(U)$ обозначим сервантную оболочку подгруппы U в группе G, то, очевидно, периодической частью $\tilde{P}$ факторгруппы $\tilde{G} = G/U$ является факторгруппа

$$\tilde{P} = \mathscr{S}(U)/U\,. \tag{3,12}$$

Притом имеет место равенство

$$\mathscr{S}(U) = \mathscr{S}((y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}))\,;$$

итак, в силу формулы (3,12) и леммы 2.10 периодическая часть $\tilde{P}$ группы $\tilde{G}$ является в точности множеством всех элементов $\tilde{g} \in \tilde{G}$ вида

$$\tilde{g} = g + U = (\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_{r-1} x_{r-1} + \varrho_r x_r) + U\,,$$

где $\varrho_i \in \mathscr{R}(x_i; G)\ (i = 1, 2, \ldots, r)$ и одновременно

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{r-1} = \varrho_r\,. \tag{3,13}$$

Подгруппу $\tilde{A}$ теперь определим как множество всех элементов $\tilde{g} \in \tilde{G}$, имеющих вид

$$\tilde{g} = g + U = \left(\frac{u_1}{n_1}\,x_1 + \frac{u_2}{n_2}\,x_2 + \ldots + \frac{u_r}{n_r}\,x_r\right) + U\,, \tag{3,14}$$

где u_i, n_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ – целые числа и рациональные числа u_i/n_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{u_i}{n_i} \in \mathscr{R}(x_i; G), \quad n_i \in Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Легко видеть, что множество $\tilde{A}$ является подгруппой группы $\tilde{G}$.

Теперь рассмотрим пересечение $\tilde{A} \cap \tilde{P}$.

Для того, чтобы элемент $\tilde{g} \in \tilde{A}$ вида (3,14) принадлежал одновременно подгруппе $\tilde{P}$, по (3,13) необходимо, чтобы имело место равенство

$$\frac{u_1}{n_1} + \frac{u_2}{n_2} + \dots + \frac{u_{r-1}}{n_{r-1}} = \frac{u_r}{n_r}. \tag{3,15}$$

По предположению $n_i \in Q_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. Отсюда и из соотношения (3,9) уже следует, что в формуле (3,15) все рациональные числа $u_i/n_i = a_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ должны быть целыми числами. Итак, по (3,15) можно писать

$$g = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{r-1}x_{r-1} + \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_i\right) x_r,$$

или, имея в виду соотношения (2,22), которым удовлетворяют элементы (3,7), получим равенство

$$g = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{r-1}y_{r-1}. \tag{3,16}$$

Так как числа a_i $(i = 1,2, \dots, r - 1)$ – целые, из соотношений (3,16) и (3,11) следует, что $g \in U$, или $\tilde{g} = \boldsymbol{O}$. Таким образом мы доказали, что $\tilde{A} \cap \tilde{P} = (\boldsymbol{O})$, и отсюда $\{\tilde{A}, \tilde{P}\} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$.

Теперь остаётся только показать, что имеет место даже равенство

$$\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}, \tag{3,17}$$

или, что всякий элемент $\tilde{g} \in G$ принадлежит уже подгруппе $\{\tilde{A}, \tilde{P}\} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$.

Итак, пусть $\tilde{g}$ – произвольный элемент группы $\tilde{G}$. Тогда элемент $\tilde{g}$ можно записать в виде

$$\tilde{g} = g + U = (\varrho_1x_1 + \varrho_2x_2 + \dots + \varrho_rx_r) + U, \tag{3,18}$$

где $\varrho_ix_i \in I_i$, т. е. $\varrho_i \in \mathscr{R}(x_i; G)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. Очевидно, для доказательства того, что элемент $\tilde{g}$ вида (3,18) принадлежит подгруппе $\{\tilde{A}, \tilde{P}\}$, достаточно убедиться в том, что справедливы уже соотношения

$$\tilde{g}_i = \varrho_ix_i + U \in \{\tilde{A}, \tilde{P}\} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \tag{3,19}$$

где $\varrho_i \in \mathscr{R}(x_i; G)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. Для этой цели нужно осуществить несколько предварительных рассуждений. Прежде всего докажем следующее вспомогательное предложение: Пусть для какого-то индекса i $(1 \leqq i \leqq r)$ $\varrho_i = (a_i/n) \in \mathscr{R}(x_i; G)$, где a_i, $n(n > 0)$ – целые числа. Если число $\varrho_i = a_i/n$ выразим в виде

$$\frac{a_i}{n} = \frac{u_1}{\varphi_1(n)} + \frac{u_2}{\varphi_2(n)} + \dots + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}, \tag{3,20}$$

где $u_j\,(j = 1, 2, \ldots, r)$ – целые числа и $\varphi_j(n) \in Q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, то будет также

$$(3,21) \qquad \frac{u_j}{\varphi_j(n)} \in \mathscr{R}(x_i;\, G) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Доказывая это предложение, можно ограничиться только тем случаем, когда $\varrho_i = a_i/n > 0$, или когда $a_i > 0$.

Итак, если $\varrho_i = a_i/n \in \mathscr{R}(x_i;\, G)$, $a_i > 0$, $n > 0$ и если пишем

$$\frac{a_i}{n} = \frac{\varphi_1(a_i)}{\varphi_1(n)} \cdot \frac{\varphi_2(a_i)}{\varphi_2(n)} \cdot \ldots \cdot \frac{\varphi_r(a_i)}{\varphi_r(n)}\,,$$

где – $\varphi_j(a_i) \in Q_j\,(j = 1, 2, \ldots, r)$, то из определения группы $\mathscr{R}(x_i;\, G)$ и из определения множеств $Q_j\,(j = 1, 2, \ldots, r)$ (смотри, в частности, соотношения (3,9)) вытекает, что должно быть тоже

$$\frac{\varphi_j(a_i)}{\varphi_j(n)} \in \mathscr{R}(x_i;\, G) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Если ещё положим

$$(3,22) \qquad d_j = (\varphi_j(a_i), \varphi_j(n)) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

то даже должно быть

$$(3,23) \qquad \frac{d_j}{\varphi_j(n)} \in \mathscr{R}(x_i;\, G) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Для простоты определим

$$(3,24) \qquad \psi_j(n) = \frac{n}{\varphi_j(n)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Отсюда и из соотношения (3,20) следует, что имеет место равенство

$$(3,25) \qquad a_i = u_1\psi_1(n) + u_2\psi_2(n) + \ldots + u_r\psi_r(n)\,.$$

По формулам (3,22) $d_j | a_i\,(j = 1, 2, \ldots, r)$. Из соотношений (3,22) и (3,24) вытекает, что

$$d_j | \psi_k(n) \quad (j \neq k;\, j, k = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

но $(d_j, \psi_j(n)) = 1\,(j = 1, 2, \ldots, r)$. Итак, по (3,25) можно утверждать, что $d_j | u_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, или

$$u_j = u'_j d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Но это значит, что можно писать

$$\frac{u_j}{\varphi_j(n)} = u'_j \cdot \frac{d_j}{\varphi_j(n)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

где $u'_j\,(j = 1, 2, \ldots, r)$ – целые числа, или по (3,23) справедливы соотношения (3,21). Этим предложение полностью доказано.

Теперь можно уже легко вывести следующее утверждение: Пусть для какого-нибудь индекса $i(1 \leqq i \leqq r)\ \varrho_i = (a_i/n) \in \mathscr{R}(x_i; G)$ и пусть рациональное число a_i/n записано в виде суммы (3,20). Тогда будет

$$\frac{u_j}{\varphi_j(n)} \in \mathscr{R}(x_j; G) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{3,26}$$

В самом деле, число $u_j/\varphi_j(n)$ можно представить в виде дроби

$$\frac{u_j}{\varphi_j(n)} = \frac{v_j}{n_j}\,, \quad n_j > 0\,, \quad (v_j, n_j) = 1\,.$$

Если $n_j = 1$, то $u_j/\varphi_j(n) = v_j$ и, очевидно, для индекса j имеет место соотношение (3,26). Итак, пусть $n_j > 1$ и пусть p – произвольное (положительное) простое число, $p|n_j$. Но это значит, что $p \in \prod_j$, так как $n_j|\varphi_j(n)$ и $\varphi_j(n) \in Q_j$. Из определения множеств $\prod_k$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ (смотри (3,8)) следует, что

$$\chi(x_k; p, G) \leqq \chi(x_j; p, G) \quad (k = 1, 2, \ldots, r)\,,$$

или, в частности, для индекса i

$$\chi(x_i; p, G) \leqq \chi(x_j; p, G)\,. \tag{3,27}$$

Символом $\exp_p n_j$ обозначим наибольшее натуральное число α, для которого ещё $p^\alpha|n_j$. Как было доказано в предшествующем вспомогательном предложении (смотри (3,21)), справедливо соотношение

$$\frac{v_j}{n_j} = \frac{u_j}{\varphi_j(n)} \in \mathscr{R}(x_i; G)\,;$$

так как $(v_j, n_j) = 1$, следует отсюда, что должно быть $\exp_p n_j \leqq \chi(x_i; p, G)$ или по (3,27)

$$\exp_p n_j \leqq \chi(x_j; p, G)\,. \tag{3,28}$$

Так как простое число p было выбрано произвольным образом так, чтобы $p|n_j$, из (3,28) уже следует справедливость соотношений (3,26).

Теперь мы уже в состоянии вывести соотношения (3,19).

Пусть сначала $1 \leqq i < r$ и пусть рациональное число $\varrho_i = a_i/n \in \mathscr{R}(x_i; G)$ записано в виде (3,20). Как было только что доказано, рациональные числа $u_j/\varphi_j(n)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют соотношениям (3,26), или же элемент $\varrho_i x_i = (a_i/n)\, x_i \in G$ можно выразить в виде суммы

$$\begin{aligned}\frac{a_i}{n} x_i = &\left[\frac{u_1}{\varphi_1(n)} x_1 + \frac{u_2}{\varphi_2(n)} x_2 + \ldots + \frac{u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)} x_{r-1} + \frac{-u_r}{\varphi_r(n)} x_r\right] + \\ &+ \left[\frac{-u_1}{\varphi_1(n)} x_1 + \frac{-u_2}{\varphi_2(n)} x_2 + \ldots + \left(\frac{a_i}{n} + \frac{-u_i}{\varphi_i(n)}\right) x_i + \right.\\ &\left. + \frac{-u_{i+1}}{\varphi_{i+1}(n)} x_{i+1} + \ldots + \frac{-u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)} x_{r-1} + \frac{u_r}{\varphi_r(n)} x_r\right].\end{aligned} \tag{3,29}$$

Если теперь обозначим

$$\tilde{g}'_i = \left(\frac{u_1}{\varphi_1(n)}\, x_1 + \frac{u_2}{\varphi_2(n)}\, x_2 + \ldots + \frac{u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)}\, x_{r-1} + \frac{-\,u_r}{\varphi_r(n)}\, x_r\right) + U$$

и аналогично

$$\tilde{h}_i = \left(\frac{-\,u_1}{\varphi_1(n)}\, x_1 + \frac{-\,u_2}{\varphi_2(n)}\, x_2 + \ldots + \frac{-\,u_{i-1}}{\varphi_{i-1}(n)}\, x_{i-1} + \left(\frac{a_i}{n} + \frac{-\,u_i}{\varphi_i(n)}\right) x_i + \right.$$

$$\left. + \frac{-\,u_{i+1}}{\varphi_{i+1}(n)}\, x_{i+1} + \ldots + \frac{-\,u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)}\, x_{r-1} + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}\, x_r\right) + U\,,$$

то по (3,29) будет

$$\tilde{g}_i = \varrho_i x_i + U = \frac{a_i}{n}\, x_i + U = \tilde{g}'_i + \tilde{h}_i\,; \tag{3,30}$$

притом, очевидно, имеет место соотношение

$$\tilde{g}'_i \in \tilde{A}\,. \tag{3,31}$$

В виду (3,20) справедливо равенство

$$\frac{-\,u_1}{\varphi_1(n)} + \frac{-\,u_2}{\varphi_2(n)} + \ldots + \frac{-\,u_{i-1}}{\varphi_{i-1}(n)} + \left(\frac{a_i}{n} + \frac{-\,u_i}{\varphi_i(n)}\right) + \frac{-\,u_{i+1}}{\varphi_{i+1}(n)} + \ldots + \frac{-\,u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)} =$$

$$= \frac{a_i}{n} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{u_j}{\varphi_j(n)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{u_j}{\varphi_j(n)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{u_j}{\varphi_j(n)} = \frac{u_r}{\varphi_r(n)}\,,$$

или для элемента

$$h_j = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{-\,u_j}{\varphi_j(n)}\, x_j + \left(\frac{a_i}{n} + \frac{-\,u_i}{\varphi_i(n)}\right) x_i + \sum_{j=i+1}^{r-1} \frac{-\,u_j}{\varphi_j(n)}\, x_j + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}\, x_r$$

выполнено условие (3,13); итак, в силу (3,12)

$$\tilde{h}_i = h_i + U \in \mathscr{S}(U)/U = \tilde{P}\,. \tag{3,32}$$

Наконец, из соотношений (3,31), (3,32) и (3,30) получаем, что

$$\tilde{g}_i = \varrho_i x_i + U \in \{\tilde{A}, \tilde{P}\} \quad (1 \leqq i \leqq r-1)\,. \tag{3,33}$$

Пусть теперь ещё $i = r$, $\varrho_r = \dfrac{a_r}{n} \in \mathscr{R}(x_r; G)$ $(n > 0)$ и пусть

$$\frac{a_r}{n} = \frac{u_1}{\varphi_1(n)} + \frac{u_2}{\varphi_2(n)} + \ldots + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}\,.$$

Как мы доказали, рациональные числа $u_j/\varphi_j(n)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют соотношениям (3,26). Итак, элемент $\varrho_r x_r = (a_r/n)\, x_r \in G$ можно представить в виде суммы элементов

$$(3,34)\qquad \frac{a_r}{n}x_r = \frac{-u_1}{\varphi_1(n)}x_1 + \frac{-u_2}{\varphi_2(n)}x_2 + \ldots + \frac{-u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)}x_{r-1} + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}x_r +$$
$$+ \frac{u_1}{\varphi_1(n)}x_1 + \frac{u_2}{\varphi_2(n)}x_2 + \ldots + \frac{u_{r-1}}{\varphi_{r-1}(n)}x_{r-1} + \left(\frac{a_r}{n} + \frac{-u_r}{\varphi_r(n)}\right)x_r\,.$$

Если опять положим

$$\tilde{g}'_r = \left(\sum_{j=1}^{r-1}\frac{-u_j}{\varphi_j(n)}x_j + \frac{u_r}{\varphi_r(n)}x_r\right) + U\,,$$
$$\tilde{h}_r = \left(\sum_{j=1}^{r-1}\frac{u_j}{\varphi_j(n)}x_j + \left(\frac{a_r}{n} + \frac{-u_r}{\varphi_r(n)}\right)x_r\right) + U\,,$$

то, очевидно, $\tilde{g}'_r \in \tilde{A}$ и по тем же причинам, как в предшествующем случае, также $\tilde{h}_r \in \tilde{P}$, или имеет место соотношение

$$(3,35)\qquad \tilde{g}_r = \varrho_r x_r + U = \tilde{g}'_r + \tilde{h}_r \in \{\tilde{A}, \tilde{P}\}\,.$$

Из соотношений (3,33) и (3,35) уже следует справедливость формул (3,19), т. е. было полностью доказано существование прямого разложения (3,17). Наконец, как следствие леммы 2.5 из расщепляемости группы $\tilde{G} = G/U$ уже получим расщепляемость факторгруппы G/H.

Этим доказательство теоремы методом полной индукции завершено.

Теорема 3. *Каждая группа без кручения ранга 2, разложимая в прямую сумму, является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Пусть G – такая группа без кручения ранга 2 и пусть H – произвольная её подгруппа. Если подгруппа H является нулевой подгруппой или подгруппой ранга 2, то всегда факторгруппа G/H расщепляема. Если H – подгруппа ранга 1, то факторгруппа G/H опять расщепляема, как это следует из теоремы 2.

Замечание. Если группа без кручения ранга 2 не является факторно расщепляемой, то по теореме 3 она неразложима в прямую сумму. Итак, факторная нерасщепляемость группы без кручения ранга 2 является достаточным условием для того, чтобы такая группа была неразложимой в прямую сумму. Но, с другой стороны, можно показать, что это условие уже не необходимо, так как существуют факторно расщепляемые группы без кручения ранга 2, являющиеся неразложимыми в прямую сумму.

4. ДАЛЬНЕЙШИЕ СТРУКТУРНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В предшествующем отделе мы занимались одним классом расщепляемых смешанных групп; притом расщепляемость каждой такой группы мы доказывали при помощи построения соответствующих её прямых слагаемых. Несмотря на то, что группа без кручения, выступающая во всяком таком прямом разложении, являлась всегда группой ранга 1, а это значит — группой необыкновенно простой, тем не менее из приведённого построения невидна достаточно её структура. Проблеме описания структуры таких групп посвящен настоящий отдел.

Прежде всего напомним несколько понятий, которыми пользуются в теории групп без кручения ранга 1.

Последовательность $(k_1, k_2, \ldots)$, где каждое k_n является или целым неотрицательным числом, или же символом ∞, будем называть характеристикой. Две характеристики $\chi_i = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots)$ $(i = 1, 2)$ считаем эквивалентными, если $k_n^{(1)} = k_n^{(2)}$ для всех индексов n, кроме, быть может, конечного числа, но притом таких, для которых как $k_n^{(1)}$, так и $k_n^{(2)}$ отличны от символа ∞. Множество всех характеристик распадается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных характеристик; весь такой класс называется типом. Притом тип, содержащий характеристику χ, будем обозначать символом $\hat{\chi}$. Если $\hat{\chi}_i$ $(i = 1, 2)$ — два типа и если существуют характеристики $\chi_i = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots) \in \hat{\chi}_i$ $(i = 1, 2)$ такие, что для каждого n будет $k_n^{(1)} \leqq k_n^{(2)}$, то положим $\hat{\chi}_1 \leqq \hat{\chi}_2$. Этим отношением множество всех типов станет частично упорядоченным, и даже структурой. Притом операция „объединения" в этой структуре определена следующим образом: Пусть $\hat{\chi}_i$ $(i = 1, 2)$ — два произвольных типа и пусть $\chi_i = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots)$ — две характеристики, $\chi_i \in \hat{\chi}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда объединение

$$\hat{\chi} = \hat{\chi}_1 \vee \hat{\chi}_2$$

означает тип, содержащий характеристику $\chi = (k_1, k_2, \ldots)$, где

$$k_n = \max\left(k_n^{(1)}, k_n^{(2)}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Объединение любого конечного числа типов совсем аналогично.

Пусть теперь $(p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность всех простых (положительных) чисел и пусть g — произвольный ненулевой элемент данной группы без кручения G. Тогда последовательность $(\chi(g;\, p_i,\, G))_{i=1}^{\infty}$, являющуюся характеристикой, будем называть характеристикой элемента g в группе G и обозначать символом $\chi(g;\, G)$. Если, в частности, G — группа без кручения ранга 1, то характеристики всех ненулевых элементов в группе G образуют в точности весь класс эквивалентных характеристик, или один и тот же тип $\hat{\chi}$. Такой тип $\hat{\chi}$ называется типом группы G; пользоваться будем обозначением $\hat{\chi} = typ\ G$. Значение понятия типа видно из того, что две группы G_1, G_2 без кручения ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, если $typ\ G_1 = typ\ G_2$. Это значит, что для полного описания структуры группы без кручения ранга 1 достаточно найти её тип.

Теорема 4. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения ранга $r \geqq 1$, пусть*

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r \tag{4,1}$$

какое-то её тотальное разложение и пусть H — произвольная сервантная подгруппа группы G ранга $r-1$. Если I_j $(j = 1, \ldots, s;\ 1 \leqq s \leqq r)$ в точности все те подгруппы из разложения (4,1), *для которых*

$$H \cap I_j = (O)\,(1 \leqq j \leqq r)\,, \tag{4,2}$$

то для типа группы G/H, являющейся группой без кручения ранга 1, имеет место формула

$$typ\, G/H = typ\, I_1 \vee typ\, I_2 \vee \ldots \vee typ\, I_s\,. \tag{4,3}$$

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по рангу r группы G.

Пусть G — группа ранга 1, $G = I_1$. Тогда единственной подгруппой ранга $r - 1 = 0$ группы G является нулевая подгруппа; $H = (O)$. Это значит, что $H \cap I_1 = (O)$, или $s = 1$, $G/H \cong I_1$, следовательно,

$$typ\, G/H = typ\, I_1\,,$$

и в этом случае теорема справедлива.

Итак, пусть G — группа ранга $r > 1$ и пусть теорема уже доказана для групп ранга $r - 1$. Пусть, далее, H — данная сервантная подгруппа группы G ранга $r - 1$. В дальнейшем нужно различать два случая.

a) Пусть число s удовлетворяет неравенству $1 \leqq s < r$. Это значит, что для индекса $s + 1$ имеет уже место соотношение

$$I_{s+1} \cap H \neq (O)\,. \tag{4,4}$$

Так как H является сервантной подгруппой группы G и так как I_{s+1} является сервантной подгруппой группы G ранга 1, то из соотношения (4,4) уже следует, что должно даже быть

$$I_{s+1} \subseteq H\,. \tag{4,5}$$

Из (4,1) и (4,5) вытекает, что подгруппа I_{s+1} служит для группы H прямым слагаемым:

$$H = I_{s+1} \dotplus H'\,. \tag{4,6}$$

Притом здесь можно просто положить

$$H' = H \cap G'\,, \quad \text{где} \quad G' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s+1}}^{r}{}_{\alpha}\, I_i\,, \tag{4,7}$$

или же, в частности, будет

$$H' \subseteq G' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s+1}}^{r}{}_{\alpha}\, I_i\,. \tag{4,8}$$

Как следует из (4,6), H' является сервантной подгруппой в H, но H является сервантной подгруппой в G, или же H' является сервантной подгруппой в G. Значит, тем более H' будет сервантной подгруппой группы G'.

Если $H' = (O)$, то $H = I_{s+1}$, $s = 1$, $r = 2$ и $G/H \cong I_1$, т. е. теорема справедлива.

Если $H' \neq (O)$, то по (4,7) и по предположению теоремы имеют место соотношения

$$(4,9)\qquad \begin{aligned} H' \cap I_j &= (O) \quad (j = 1, \ldots, s)\,, \\ H' \cap I_j &\neq (O) \quad (j = s + 2, \ldots, r)\,. \end{aligned}$$

Кроме того из (4,6) и (4,8) следует изоморфизм

$$(4,10)\qquad G/H = (I_{s+1} \dotplus G')/(I_{s+1} \dotplus H') \cong G'/H'\,.$$

Так как H' является сервантной подгруппой ранга $r - 2$ тотально разложимой группы G' ранга $r - 1$ (смотри (4,7)), то можно применить индуктивное предположение. Таким образом, имея в виду соотношения (4,9), получим формулу

$$typ\, G'/H' = typ\, I_1 \vee typ\, I_2 \vee \ldots \vee typ\, I_s\,.$$

Но отсюда в силу изоморфизма (4,10) следует уже формула (4,3).

в) Пусть теперь $s = r$, или

$$(4,11)\qquad H \cap I_j = (O) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Так как подгруппа H удовлетворяет условиям (4,11), то по лемме 2.9 можно найти в подгруппе H $r - 1$ линейно независимых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$, которые можно представить в виде сумм (смотри (2,22))

$$(4,12)\qquad \begin{aligned} y_1 &= x_1 && + x_r\,, \\ y_2 &= \quad x_2 && + x_r\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{r-1} &= \qquad x_{r-1} && + x_r\,, \end{aligned}$$

где $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Теперь определим элемент $y \in G$ формулой

$$(4,13)\qquad y = x_1 + x_2 + \ldots + x_{r-1} + (r - 2)\, x_r$$

и положим

$$(4,14)\qquad \tilde{y} = y + H\,, \quad \tilde{y} \in G/H = \tilde{G}\,.$$

Если i — какой-нибудь индекс, $1 \leqq i \leqq r - 1$, то по (4,12) и (4,13) будет

$$(4,15)\qquad y - x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r-1} y_j \in H \quad (1 \leqq i \leqq r - 1)\,.$$

Далее из тех же соотношений (4,12) и (4,13) следует, что

$$(4,16)\qquad y + x_r = \sum_{j=1}^{r-1} y_j \in H\,.$$

Пользуясь формулами (4,14), (4,15) и (4,16), можно писать

$$(4,17)\qquad \tilde{y} = -\, x_r + H = x_i + H \quad (i = 1, \ldots, r - 1)\,.$$

Так как $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, то из соотношений (4,11) следует, что $x_k \notin H$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, или же по (4,17) $\tilde{y}$ является ненулевым элементом факторгруппы $G/H = \tilde{G}$. Однако, $\tilde{G}$ – группа без кручения ранга 1, значит, имеет место равенство

$$typ\, \tilde{G} = \hat{\chi}(\tilde{y}; \tilde{G})\,.$$

Тип $\hat{\chi}(\tilde{y}; \tilde{G})$ мы определим теперь так, что найдём характеристику $\chi(\tilde{y}; \tilde{G})$ элемента $\tilde{y}$ в группе $\tilde{G}$.

Из формул (4,17) вытекает, что для каждого простого числа p справедливы неравенства

$$\chi(\tilde{y}; p, \tilde{G}) \geqq \chi(x_i; p, G) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,;$$

но это можно писать также в виде

$$\chi(\tilde{y}; p, \tilde{G}) \geqq \max_{i=1,\ldots,r} [\chi(x_i; p, G)]\,. \tag{4,18}$$

Теперь докажем, что для всякого простого числа p в формуле (4,18) имеет место только равенство.

Пусть наоборот существует простое число p, для которого справедливо неравенство

$$\chi(\tilde{y}; p, \tilde{G}) > \max_{i=1,\ldots,r} [\chi(x_i; p, G)]\,. \tag{4,19}$$

Для простоты положим

$$k = \max_{i=1,\ldots,r} [\chi(x_i; p, G)]\,; \tag{4,20}$$

в силу (4,19), k должно быть целым неотрицательным числом. Пусть j_0 – какой-нибудь из индексов $1, 2, \ldots, r$, для которого имеет место равенство

$$k = \chi(x_{j_0}; p, G)\,.$$

Из неравенства (4,19) и из соотношения (4,20) следует существование такого элемента $\tilde{g} = g + H \in \tilde{G}$, что

$$p^{k+1}\tilde{g} = \tilde{y}\,. \tag{4,21}$$

Имея в виду формулы (4,17), можем равенство (4,21) переписать в виде

$$p^{k+1}\tilde{g} = \tilde{y} = \varepsilon x_{j_0} + H\,, \tag{4,22}$$

где или $\varepsilon = 1$, если $j_0 < r$, или же $\varepsilon = -1$, если $j_0 = r$. Так как $x_k \in I_k$, $x_k \neq O$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, то элемент $\tilde{g} = g + H(g \in G)$ можно выразить в виде

$$\tilde{g} = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{n} x_i\right) + H\,, \tag{4,23}$$

где n, a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ – целые числа и рациональные числа a_i/n $(i = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{a_i}{n} \in \mathscr{R}(x_i; G) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{4,24}$$

Имея в виду (4,20), можем предполагать, что целое число n выбрано так, чтобы $p^{k+1} \nmid n$. Из формул (4,22) и (4,23) получим соотношение

$$p^{k+1} \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{n} x_i - \varepsilon x_{j_0} \in H ,$$

или также соотношение

$$\text{(4,25)} \qquad \frac{p^{k+1} a_{j_0} - \varepsilon n}{n} x_{j_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{r} \frac{p^{k+1} a_i}{n} x_i \in H .$$

Так как H – сервантная подгруппа группы G ранга $r - 1$ и элементы $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ линейно независимы, то будет

$$H = \mathscr{S}((y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})) .$$

Итак, к группе G, её подгруппе H и элементам y_i $(i = 1, \ldots, r - 1)$ можно применить лемму 2.10. Притом будем различать два случая.

Пусть $j_0 < r$. Тогда для того, чтобы имело место соотношение (4,25), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{p^{k+1} a_{j_0} - n}{n} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{r-1} \frac{p^{k+1} a_i}{n} = \frac{p^{k+1} a_r}{n} ,$$

или также

$$p^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_i - a_r \right) = n ;$$

но это последнее равенство противоречит выбору числа n.

Итак, пусть $j_0 = r$. В этом случае необходимым и достаточным условием для того, чтобы имело место соотношение (4,25), является равенство

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{p^{k+1} a_i}{n} = \frac{p^{k+1} a_r + n}{n} ,$$

или равенство

$$p^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_i - a_r \right) = n ,$$

и мы приходим опять и противоречию.

Таким образом мы полностью доказали, что для каждого простого числа p имеет место равенство

$$\chi(\tilde{y}; p, \tilde{G}) = \max_{i=1,\ldots,r} [\chi(x_i; p, G)] ,$$

или же

$$\hat{\chi}(\tilde{y}; \tilde{G}) = \hat{\chi}(x_1; G) \vee \hat{\chi}(x_2; G) \vee \ldots \vee \hat{\chi}(x_r; G) .$$

Это значит, что

$$typ\, \tilde{G} = typ\, I_1 \vee typ\, I_2 \vee \ldots \vee typ\, I_r .$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 5. *Пусть G — тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть*

$$(4,26) \qquad G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r$$

какое-то её тотальное разложение, и пусть H — произвольная подгруппа группы G ранга $r - 1$. Пусть, далее, $I_1 \ldots, I_s$ $(1 \leqq s \leqq r)$ — в точности все подгруппы из разложения (4,26), *для которых $H \cap I_j = (O)$ $(1 \leqq j \leqq r)$. Если символом $\tilde{G}$ обозначим факторгруппу G/H, которая по теореме 2 расщепляема, и если*

$$(4,27) \qquad \tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$$

какое-то прямое разложение группы $\tilde{G}$, где $\tilde{P}$ — периодическая часть группы $\tilde{G}$ и $\tilde{A}$ — группа без кручения ранга 1, то будет

$$(4,28) \qquad typ\, \tilde{A} = typ\, I_1 \vee typ\, I_2 \vee \ldots \vee typ\, I_s\,.$$

Доказательство. Периодической частью группы $\tilde{G} = G/H$ является группа $\tilde{P} = \mathscr{S}(H)/H$, где $\mathscr{S}(H)$ — сервантная оболочка подгруппы H в G. Вторая теорема об изоморфизме даст

$$\tilde{G}/\tilde{P} = (G/H)/(\mathscr{S}(H)/H) \cong G/\mathscr{S}(H)\,.$$

Из формулы (4,27) непосредственно следует, что $\tilde{G}/\tilde{P} \cong \tilde{A}$, или

$$(4,29) \qquad \tilde{A} \cong G/\mathscr{S}(H)\,.$$

Если $\mathscr{S}(H)$ — сервантная оболочка подгруппы H в группе G, то легко видеть, что подгруппы I_j $(j = 1, \ldots, s)$ — в точности все подгруппы из разложения (4,26), для которых

$$\mathscr{S}(H) \cap I_j = (O) \quad (1 \leqq j \leqq r)\,.$$

Таким образом по теореме 4 должно быть

$$typ\, G/\mathscr{S}(H) = typ\, I_1 \vee typ\, I_2 \vee \ldots \vee typ\, I_s\,.$$

Из этого равенства и из (4,29) следует (4,28), т. е. теорема доказана.

5. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ

Для формулировки следующих теорем нужно напомнить некоторые понятия.

Периодическая группа P называется группой конечного D-ранга, если она является прямой суммой конечного числа полных p-примарных групп Прюфера (в общем случае для различных простых чисел p) и конечного числа циклических групп, порядки которых равны степеням простых чисел. Число всех прямых слагаемых некоторого, только что описанного, прямого разложения группы P является её инвариантом, называется D-рангом группы P и обозначается символом $r_D(P)$.

Непосредственным следствием теоремы 6 из [2] является следующая теорема, которой мы будем в дальнейшем пользоваться.

Вспомогательная теорема 1. *Пусть G — смешанная группа и пусть каждое p-примарное слагаемое $P^{(p)}$ её периодической части P является группой конечного D-ранга. Если H — такая подгруппа группы G, что факторгруппа G/H является периодической группой конечного D-ранга, то группа G расщепляема тогда и только тогда, если расщепляема подгруппа H.*

Далее напомним теорему, доказанную в работе [3].

Теорема. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — произвольная её подгруппа того же ранга r. Если символом $\tilde{G}^{(p)}$ обозначим p-примарное слагаемое периодической группы $\tilde{G} = G/H$, то $\tilde{G}^{(p)}$ для каждого простого p обладает конечным D-рангом, и притом имеет место неравенство $r_D(\tilde{G}^{(p)}) \leqq r$.*

Отсюда легко вывести следующую теорему.

Вспомогательная теорема 2. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — произвольная её подгруппа. Тогда каждое p-примарное слагаемое $\tilde{P}^{(p)}$ периодической части $\tilde{P}$ факторгруппы G/H обладает конечным D-рангом.*

Если G — произвольная ненулевая группа без кручения, то символом $\mathfrak{T}(G)$ обозначим множество всех типов сервантных подгрупп ранга 1 группы G.

Теорема 6. *Пусть G' — факторно расщепляемая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть I — такая группа без кручения ранга 1, что для каждого типа $\tau \in \mathfrak{T}(G')$ имеет место неравенство*

$$(5,1) \qquad typ\, I \leqq \tau \left(\tau \in \mathfrak{T}(G')\right).$$

Тогда группа

$$(5,2) \qquad G = G' \dotplus I$$

является также факторно расщепляемой.

Доказательство. По лемме 2.6 для доказательства достаточно убедиться в том, что расщепляема всякая факторгруппа G/U, где U — произвольная свободная подгруппа группы G.

Итак, пусть U — какая-то свободная подгруппа ранга $s(1 \leqq s \leqq r + 1)$ группы G,

$$U = \{y_1\} \dotplus \{y_2\} \dotplus \ldots \dotplus \{y_s\}.$$

В силу (5,2) можно каждый элемент $y_i\,(i = 1, 2, \ldots, s)$ записать в виде суммы

$$(5,3) \qquad y_i = y'_i + x_i\,, \quad y'_i \in G'\,, \quad x_i \in I \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Если $x_i = O\,(i = 1, 2, \ldots, s)$, то уже $y_i \in G'\,(i = 1, 2, \ldots, s)$, или $U \subseteq G'$. Но в таком случае будет

$$(5,4) \qquad G/U \cong G'/U \dotplus I\,.$$

Тогда из факторной расщепляемости группы G' и (5,4) уже следует расщепляемость факторгруппы G/U.

Теперь будем предполагать, что среди элементов x_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ из (5,3) существуют ненулевые; пусть это в точности элементы $x_t, x_{t+1}, \dots, x_s$ $(1 \leqq t \leqq \leqq s)$. Так как I — группа без кручения ранга 1, то существуют такие ненулевые целые числа $m_t, m_{t+1}, \dots, m_s$, что

$$m_i x_i = m_s x_s \quad (i = t, \dots, s - 1).$$

Итак, если положим

$$\begin{gathered} z_s = y_s, \quad z_i = y_i \quad (i = 1, \dots, t - 1), \\ z_i = m_i y_i - m_s y_s \quad (i = t, \dots, s - 1), \end{gathered}$$

то элементы z_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ будут опять линейно независимыми элементами группы U; притом $z_i \in G'$ $(i = 1, \dots, s - 1)$ и элемент z_s имеет вид $z_s = z + x$, где $z \in G'$, $x \in I$ и $x \neq \boldsymbol{O}$.

Теперь определим подгруппу V группы U формулой

$$V = \{z_1\} \dotplus \{z_2\} \dotplus \dots \dotplus \{z_s\}$$

и построим факторгруппу G/V. В течение остальной части доказательства мы будем заниматься главным образом прежде всего проблемой расщепляемости факторгруппы G/V.

Пусть $\mathscr{S}(z_s)$ — сервантная оболочка множества (z_s) в группе G. Так как G' и $\mathscr{S}(z_s)$ — сервантные подгруппы группы G и так как $\mathscr{S}(z_s)$ — группа ранга 1, то или $\mathscr{S}(z_s) \subseteq G'$, или же $\mathscr{S}(z_s) \cap G' = (\boldsymbol{O})$. Соотношение $\mathscr{S}(z_s) \subseteq G'$ неверно в силу того, что z_s *non* $\in G'$; итак, $G' \cap \mathscr{S}(z_s) = (\boldsymbol{O})$.

Для простоты обозначим

$$H = \{G', \mathscr{S}(z_s)\} = G' \dotplus \mathscr{S}(z_s), \tag{5,5}$$

и кроме того определим $V' = \sum_{i=1}^{s-1}{}_d \{z_i\}$; итак, в частности, имеет место включение $V' \subseteq G'$. Тогда факторгруппа G/H является расщепляемой, так как

$$H/V \cong G'/V' \dotplus \mathscr{S}(z_s)/\{z_s\}$$

и группа G' по предположению факторно расщепляема.

Из вспомогательной теоремы 2 следует, что каждое p-примарное слагаемое $\tilde{P}^{(p)}$ периодической части $\tilde{P}$ факторгруппы G/V является группой конечного D-ранга. Итак, по вспомогательной теореме 1 для того, чтобы доказать расщепляемость группы G/V, достаточно убедиться в том, что факторгруппа $(G/V)/(H/V)$ является периодической группой конечного D-ранга, так как расщепляемость группы H/V уже доказана.

По второй теореме об изоморфизме будет

$$(G/V)/(H/V) \cong G/H. \tag{5,6}$$

Из соотношений (5,2) и (5,5) следует, что $G = \{H, I\}$; итак, по первой теореме об изоморфизме имеем

$$(5,7) \qquad G/H = \{H, I\}/H \cong I/(H \cap I).$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться изоморфизмом (5,7), необходимо подробнее описать группу $I' = H \cap I$.

Очевидно, $H \cap I \neq (O)$, так как H – группа ранга $r + 1$. Итак, $I' = H \cap I$ – группа без кручения ранга 1, и так как $I' \subseteq I$, то имеет место неравенство

$$(5,8) \qquad typ\, I' \leqq typ\, I.$$

Теперь докажем, что справедливо даже равенство $typ\, I' = typ\, I$.

Так как $z_s = z + x$, где $z \in G'$ и $x \in I$, то по лемме 2.3 имеет место соотношение

$$(5,9) \qquad \mathscr{R}(z_s; G) = \mathscr{R}(z; G) \cap \mathscr{R}(x; G).$$

Если $z = O$, то вместо (5,9) можно писать

$$\mathscr{R}(z_s; G) = \mathscr{R}(x; G),$$

следовательно в частности имеем изоморфизм

$$(5,10) \qquad \mathscr{R}(z_s; G) \cong \mathscr{R}(x; G) \cong I.$$

Если $z \neq O$, то в силу (5,1) должно быть

$$typ\, \mathscr{S}(z) \geqq typ\, I,$$

и это можно ещё переписать в виде

$$typ\, \mathscr{R}(z; G) \geqq typ\, \mathscr{R}(x; G).$$

Отсюда и из (5,9) уже следует, что

$$typ\, \mathscr{R}(z_s; G) = typ\, [\mathscr{R}(z; G) \cap \mathscr{R}(x; G)] = typ\, \mathscr{R}(x; G).$$

Но это значит, что и в этом случае имеет место изоморфизм (5,10).

Из соотношения (5,9) следует включение $\mathscr{R}(z_s; G) \subseteq \mathscr{R}(x; G)$, или

$$(5,11) \qquad \mathscr{R}(z_s; G)\, x \subseteq \mathscr{R}(x; G)\, x = I.$$

Пусть ϱ – рациональное число, $\varrho \in \mathscr{R}(z_s; G)$. В силу (5,9) существует в группе G элемент, который можно представить в виде ϱz; и так как $z \in G'$ и G' – по (5,2) сервантная подгруппа в G, то необходимо $\mathscr{S}(z) \subseteq G'$, или $\varrho z \in G'$. В то же время в силу (5,11) существует в G элемент ϱx; то в таком случае можно писать $\varrho z + \varrho x = \varrho z_s$, или $\varrho x = \varrho z_s - \varrho z$. Притом $\varrho z_s \in \mathscr{S}(z_s) \subseteq H$ и $\varrho z \in G' \subseteq H$; итак, должно также быть $\varrho x \in H$. Но этим мы доказали справедливость соотношения

$$(5,12) \qquad \mathscr{R}(z_s; G)\, x \subseteq H.$$

Из (5,11) и (5,12) уже получим включение

$$(5,13) \qquad \mathscr{R}(z_s; G)\, x \subseteq I \cap H = I'.$$

В силу изоморфизма (5,10) должно быть

$$typ\,\mathscr{R}(z_s;\,G)\,x = typ\,I\,,$$

итак, по (5,13) имеет место неравенство

$$(5{,}14)\qquad typ\,I \leqq typ\,I'\,.$$

Из неравенств (5,8) и (5,14) получим равенство типов $typ\,I = typ\,I' = typ\,(I \cap H)$, или же подгруппа $I \cap H$ изоморфна с группой I. Легко видеть, что это возможно тогда и только тогда, если факторгруппа $I/(I \cap H)$ является конечной группой. В силу изоморфизмов (5,6) и (5,7) мы таким образом уже доказали, что группа $(G/V)/(H/V)$ является также конечной. Но тем самым, как мы уже заметили, доказана расщепляемость факторгруппы G/V. Так как V – свободная подгруппа группы U того же ранга s как группа U, то по лемме 2.5 из расщепляемости группы G/V уже следует расщеплямость группы G/U.

Теорема полностью доказана.

Простым следствием только что доказанной теоремы является следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть G – тотально разложимая группа без кручения ранга $r \geqq 1$, пусть*

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r$$

какое-нибудь её тотальное разложение, и пусть

$$(5{,}15)\qquad typ\,I_{k+1} \leqq typ\,I_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r-1)\,.$$

Тогда группа G факторно расщепляема.

Доказательство. Применим полную индукцию по рангу r группы G.

Если G – группа ранга 1, то она факторно расщепляема.

Итак, пусть G – группа ранга $r > 1$ и пусть теорема уже справедлива для групп ранга $r - 1$. Если обозначим символом G' группу, определенную формулой

$$(5{,}16)\qquad G' = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_{r-1}\,,$$

то будет $G = G' \dotplus I_r$; притом, по индуктивному предположению, группа G' является факторно расщепляемой. По (5,15) будет

$$typ\,I_1 \geqq typ\,I_2 \geqq \ldots \geqq typ\,I_{r-1}\,.$$

Отсюда и из (5,16) легко следует, что для каждой сервантной подгруппы S ранга 1 группы G' имеет место неравенство $typ\,S \geqq typ\,I_{r-1}$, или, в силу (5,15), также неравенство $typ\,S \geqq typ\,I_r$. Это значит, что для всякого $\tau \in \mathfrak{T}(G')$ имеем $\tau \geqq typ\,I_r$, или же по теореме 6 группа G является факторно расщепляемой.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Таким же методом, как мы доказали предшествующую теорему, можно было бы доказать, следующую, немножко более общую теорему:

Пусть G — тотально разложимая группа без кручения ранга $r \geqq 2$ и пусть $G = = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r$ — какое-нибудь её тотальное разложение. Если типы подгрупп I_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют условиям

$$typ\, I_j \geqq typ\, I_3 \quad (j = 1, 2)\,,$$
$$typ\, I_k \geqq typ\, I_{k+1} \quad (k = 3, \ldots, r - 1)\,,$$

то группа G является факторно расщепляемой.

Определение 5. Пусть $\hat{\chi}_i\,(i = 1, 2)$ — два произвольных типа; будем писать $\hat{\chi}_1 \equiv \hat{\chi}_2$, если для любых характеристик $\chi_i \in \hat{\chi}_i\,(i = 1, 2)$,

$$\chi_i = \left(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots, k_n^{(i)}, \ldots\right) \quad (i = 1, 2)\,,$$

существует не более чем конечное число индексов n таких, что $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$.

Заметим, что в отличие от эквивалентности характеристик, неравенство $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$ допускаем и в том случае, когда некоторое $k_n^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ будет представлять символ ∞.

Лемма 5.1. *Пусть I, I' — две группы без кручения ранга 1 такие, что $I' \subseteq I$ и пусть, кроме того,*

$$typ\, I' \equiv typ\, I\,. \tag{5,17}$$

Тогда факторгруппа I/I' является периодической группой конечного D-ранга.

Доказательство. Пусть x — произвольный ненулевой элемент из подгруппы I'. В силу леммы 2.2 можно группы I и I' выразить в виде

$$I = \mathscr{R}(x; I)\, x\,, \quad I' = \mathscr{R}(x; I')\, x\,;$$

итак, имеет место изоморфизм

$$I/I' \cong \mathscr{R}(x; I)/\mathscr{R}(x; I')\,. \tag{5,18}$$

Если $\chi(x; I) = (k_1, k_2, \ldots)$ и аналогично $\chi(x; I') = (k'_1, k'_2, \ldots)$, то, очевидно, $k'_n \leqq k_n\,(n = 1, 2, \ldots)$; притом в силу (5,17) строгое неравенство $k'_n < k_n$ возможно для конечного числа индексов n. Отсюда и из определения групп $\mathscr{R}(x; I)$ и $\mathscr{R}(x; I')$ уже следует, что факторгруппа $\mathscr{R}(x; I)/\mathscr{R}(x; I')$ является периодической группой конечного D-ранга. Таким образом из (5,18) получаем утверждение нашей леммы.

Лемма 5.2. *Пусть G и G' — две тотально разложимые группы без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, обладающие следующими тотальными разложениями:*

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r\,, \quad G' = I'_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r\,. \tag{5,19}$$

Если

$$typ\, I'_1 \equiv typ\, I_1\,, \quad typ\, I'_1 \leqq typ\, I_1\,, \tag{5,20}$$

то группа G является тогда и только тогда факторно расщепляемой, когда факторно расщепляема группа G'.

Доказательство. Так как $typ\, I'_1 \leqq typ\, I_1$, то можно предполагать, что уже $I'_1 \subseteq I_1$; тогда также будет $G' \subseteq G$.

Пусть сначала группа G является факторно расщепляемой и пусть H' — произвольная подгруппа группы G'. Если положим

$$\tilde{G} = G/H', \quad \tilde{G}' = G'/H',$$

то по второй теореме об изоморфизме будет

$$\tilde{G}/\tilde{G}' \cong G/G',$$

или в силу (5,19) также

$$\tilde{G}/\tilde{G}' \cong I_1/I'_1. \tag{5,21}$$

По лемме 5.1 (смотри (5,20)) факторгруппа I_1/I'_1 является периодической группой конечного D-ранга, и такой же должна быть по (5,21) факторгруппа $\tilde{G}/\tilde{G}'$. Воспользовавшись теперь факторной расщепляемостью группы G и вспомогательными теоремами 2 и 1, можем из расщепляемости группы $\tilde{G}$ вывести расщеплямость подгруппы $\tilde{G}'$. Но тем самым была уже факторная расщепляемость группы G' доказана, так как H' — произвольная её подгруппа.

Пусть теперь будет факторно расщепляемой группа G' и пусть H — произвольная подгруппа группы G. Положим $\tilde{G} = G/H$ и определим подгруппу $\tilde{G}_1$ группы $\tilde{G}$ формулой

$$\tilde{G}_1 = \{G', H\}/H.$$

В силу первой теоремы об изоморфизме будет

$$\tilde{G}_1 \cong G'/(G' \cap H), \tag{5,22}$$

и так как G' факторно расщепляема, то из (5,22) следует расщепляемость группы $\tilde{G}_1$. Из второй теоремы об изоморфизме получим изоморфизм

$$\tilde{G}/\tilde{G}_1 \cong G/\{G', H\} \cong (G/G')/(\{G', H\}/G'), \tag{5,23}$$

или же группа $\tilde{G}/\tilde{G}_1$ изоморфна факторгруппе группы G/G'. Притом, как мы уже заметили, G/G' является периодической группой конечного D-ранга. Периодической группой конечного D-ранга должна быть и всякая факторгруппа группы G/G', или, по (5,23), такой является и факторгруппа $\tilde{G}/\tilde{G}_1$. Отсюда, пользуясь расщепляемостью группы $\tilde{G}_1$ и вспомогательными теоремами 1 и 2, уже легко выведем расщепляемость группы $\tilde{G}$. Но этим мы уже доказали, что G является факторно расщепляемой.

Лемма полностью доказана.

Лемма 5.3. *Пусть* $G^{(i)}(i = 1, 2)$ — *две тотально разложимые группы без кручения конечного ранга* $r \geqq 1$, *обладающие следующими тотальными разложениями:*

$$G^{(i)} = I_1^{(i)} \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r \quad (i = 1, 2).$$

Если

$$typ\, I_1^{(1)} \equiv typ\, I_1^{(2)}, \tag{5,24}$$

то группа $G^{(1)}$ является факторно расщепляемой тогда и только тогда, если факторно расщепляема группа $G^{(2)}$.

Доказательство. Прежде всего положим

$$(5{,}25) \qquad \hat{\chi} = typ\, I_1^{(1)} \vee typ\, I_1^{(2)},$$

и символом I_1 обозначим произвольную группу без кручения ранга 1, для которой в точности будет $typ\, I_1 = \hat{\chi}$. Из определения отношения „$\equiv$" и из соотношений (5,25) и (5,24) следует, что

$$(5{,}26) \qquad typ\, I_1 \equiv typ\, I_1^{(i)}, \quad typ\, I_1 \geqq typ\, I_1^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

Если теперь определим группу G формулой

$$G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r,$$

то в силу (5,26) можно к группам G и $G^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ применить лемму 5.2, т. е. можно утверждать, что группа $G^{(i)}(1 \leqq i \leqq 2)$ тогда и только тогда факторно расщепляема, если факторно расщепляема группа G.

Лемма полностью доказана.

Замечание. Предшествующую лемму можно высказать также следующим образом: *Пусть G – тотально разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть*

$$(5{,}27) \qquad G = I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_r$$

какое-то её тотальное разложение. Если заменим в прямом разложении (5,27) группу I_k $(1 \leqq k \leqq r)$ какой-то другой группой без кручения I'_k ранга 1, обладающей тем свойством, что $typ\, I'_k \equiv typ\, I_k$, то определенная таким образом группа G' будет тогда и только тогда факторно расщепляемой, если факторно расщепляема группа G.

Теорема 8. *Пусть $G^{(i)}(i = 1, 2)$ – две тотально разложимые группы без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть*

$$G^{(i)} = I_1^{(i)} \dotplus I_2^{(i)} \dotplus \ldots \dotplus I_r^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

какие-то их тотальные разложения. Если

$$typ\, I_k^{(1)} \equiv typ\, I_k^{(2)} \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

то группа $G^{(1)}$ будет тогда и только тогда факторно расщепляема, если факторно расщепляема группа $G^{(2)}$.

Доказательство. Теорема следует непосредственно из леммы 5.3.

Замечание. Теорема 7 описывает весь один класс факторно расщепляемых тотально разложимых групп без кручения конечного ранга; теорема 8 показывает, каким образом можно этот класс ещё расширить.

Наконец заметим, что остаётся открытым вопрос, все ли тотально разложимые группы без кручения конечного ранга факторно расщепляемы.

Литература

[1] *А. Г. Курош:* Теория групп, 2-ое изд., Москва 1953.
[2] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чех. мат. ж., *10* (*85*), 1960, 479—492.
[3] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чех. мат ж. (потготовляется к печати).

Zusammenfassung

ÜBER DIE SPALTBARKEIT DER FAKTORGRUPPEN TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN ENDLICHEN RANGES

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha
(Eingegangen am 29. Oktober 1959)

In der vorliegenden Arbeit wird die Struktur der Faktorgruppen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges vor allem mit Rücksicht auf ihre Spaltbarkeit studiert. Es werden hier einige hinreichende Bedingungen für die Spaltbarkeit der Faktorgruppen solcher Gruppen bewiesen.

Definition 1. Eine torsionsfreie Gruppe heisst *faktor-spaltbar*, wenn jede ihre Faktorgruppe spaltbar ist.

Zuerst wird der folgende Satz bewiesen.

Satz 1. *Es gibt mindestens eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die nicht faktor-spaltbar ist.*

Definition 4. Eine torsionsfreie Gruppe G endlichen Ranges $r \geqq 1$ heisst **total** reduzibel, wenn sie als direkte Summe der Untergruppen vom Range 1 darstellbar ist: $G = \sum_{k=1}^{r}{}_d J_k$. Jede solche direkte Zerlegung wird eine totale Zerlegung der Gruppe G genannt.

Satz 2. *Es sei G eine torsionsfreie total reduzible Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 1$ und H sei eine beliebige ihre Untergruppe vom Range $r - 1$. Dann ist die Faktorgruppe G/H spaltbar.*

Daraus folgt unmittelbar der folgende Satz.

Satz 3. *Jede torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die direkt zerlegbar ist, ist faktor-spaltbar.*

Ist J eine torsionsfreie Gruppe vom Range 1, so wird mit dem Symbol *typ* J der Typ dieser Gruppe J bezeichnet. Die Menge aller Typen torsionsfreier Gruppen vom Range 1 bildet einen Verband; für die Operation der Vereinigung in diesem Verband wird das Zeichen $\vee$ benützt.

Satz 5. *Es sei G eine total reduzible torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$; *es sei*

$$G = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_r \tag{1}$$

eine ihre totale Zerlegung und H eine beliebige Untergruppe vom Range $r - 1$. *Seien* $J_1, J_2, \ldots, J_s$ *genau alle Untergruppen aus* (1), *für die* $J_j \cap H = (0)$ $(1 \leqq \leqq j \leqq r)$ *gilt. Wird mit dem Symbol* $\tilde{G}$ *die Faktorgruppe* G/H *bezeichnet, die nach dem Satz 2 spaltbar ist, d. h.* $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$, *wo* $\tilde{P}$ *die maximale periodische Untergruppe der Gruppe* $\tilde{G}$ *ist, so besteht für den Typ der torsionsfreien Gruppe* $\tilde{A}$ *vom Range 1 die Formel*

$$\text{typ}\, \tilde{A} = \text{typ}\, J_1 \vee \text{typ}\, J_2 \vee \ldots \vee \text{typ}\, J_s\,.$$

Satz 6. *Es sei* G' *eine faktor-spaltbare torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$ *und J sei eine torsionsfreie Gruppe vom Range 1. Wenn für jede Serwanzuntergruppe S vom Range 1 der Gruppe* G' *die Ungleichung*

$$\text{typ}\, J \leqq \text{typ}\, S$$

gilt, dann ist auch die Gruppe $G = G' \dotplus J$ *faktor-spaltbar.*

Aus dem Satz 6 erhält man leicht den folgenden Satz:

Satz 7. *Es sei G eine total reduzible torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$ *und es sei* (1) *eine ihre totale Zerlegung. Sind die Bedingungen*

$$\text{typ}\, J_{k+1} \leqq \text{typ}\, J_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r - 1)$$

erfüllt, dann ist die Gruppe G faktor-spaltbar.

Am Ende der vorliegenden Abhandlung wurde noch folgende Bezeichnungsweise eingeführt: Für zwei Typen τ_1, τ_2 torsionsfreier abelscher Gruppen vom Range 1 schreiben wir $\tau_1 \equiv \tau_2$, falls jede Charakteristik $\chi_i \in \tau_i$, $\chi_i = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots)$ $(i = 1, 2)$ den Relationen $k_n^{(1)} = k_n^{(2)}$ für fast alle (d. h. mit Ausnahme höchstens endlich vieler) natürlichen Zahlen n genügt. Es sei noch bemerkt, dass sich diese Definition von der Definition äquivalenter Charakteristiken unterscheidet, da wir hier die Ungleichung $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$ auch dann zulassen, wenn ein der Symbole $k_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ gleich ∞ ist.

Satz 8. $G^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ *seien zwei torsionsfreie total reduzible Gruppen endlichen Ranges* $r \geqq 1$, *die als direkte Summen*

$$G^{(i)} = J_1^{(i)} \dotplus J_2^{(i)} \dotplus \ldots \dotplus J_r^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

der Untergruppen vom Range 1 dargestellt sind. Weiter sei

$$\text{typ}\, J_k^{(1)} \equiv \text{typ}\, J_k^{(2)} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die Gruppe $G^{(1)}$ *genau dann faktor-spaltbar, wenn die Gruppe* $G^{(2)}$ *faktor-spaltbar ist.*

Endlich können wir noch bemerken, dass durch den Satz 7 eine Klasse faktorspaltbarer torsionsfreien Gruppen endlichen Ranges definiert wird. Der Satz 8 gibt uns die Möglichkeit diese Klasse noch gewissermassen zu vergrössern.