Karel Svoboda

Complément au mémoire: Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 428–439

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100471

COMPLÉMENT AU MÉMOIRE: SUR UNE CLASSE DE SURFACES SPHÉRIQUES DANS UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

KAREL SVOBODA, Brno

(Reçu le 5 mai 1960)

Dans ce travail on complète les résultats publiés dans le Mémoire *Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante* (Чехословацкий математический журнал *8* (*83*), 1958, 399—447) par les considérations relatives aux surfaces dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences localement sphériques de rayons constants.

1. Dans toutes les considérations et les calculs qui suivent, nous allons nous appuyer sur les résultats déduits au Mémoire [3] et nous allons appliquer toutes les notions et notations introduites dans le travail cité.

Le Mémoire donné plus haut a été consacré à l'étude des surfaces qui se trouvent plongées dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante c et qui jouissent de la propriété locale suivante: Dans un point M quelconque de la surface, l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est une circonférence, dont le centre se confond avec la trace de la perpendiculaire menée par le point M au plan de la circonférence et se trouve situé à distance non-nulle V du point M, tandis que les indicatrices de courbure normale d'ordre $k = 2, \ldots, m - 1$ $\left(3 \leqq m \leqq \left[\frac{1}{2}n\right]\right)$ sont des circonférences, dont les centres coïncident avec le point M. Nous avons appelé les surfaces en question *surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques.*

Attachons à chaque point M de la surface considérée un repère mobile formé de $n + 1$ vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. On a alors les équations

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega^0\mathbf{e}_0 + \omega^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \omega^n\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= -\,c\omega^i M + \omega_i^0\mathbf{e}_0 + \omega_i^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \omega_i^n\mathbf{e}_n \quad \left(i = 0, 1, \ldots, n\right), \end{aligned}$$

dont les coefficients ω sont des formes différentielles linéaires qui satisfont aux relations $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ $\left(i, j = 0, 1, \ldots, n\right)$ et aux équations de structure d'un espace à courbure constante. En choisissant d'une manière convenable le repère mobile associé à la surface, on peut exprimer les propriétés locales des surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques par le système d'équations différentielles

$$
\begin{gathered}
\omega^0 = \omega^3 = \omega^4 = \ldots = \omega^n = 0\,, \\
\omega_1^0 = V\omega^1\,, \quad \omega_2^0 = V\omega^2\,, \quad \omega_0^5 = \omega_0^6 = \ldots = \omega_0^n = 0\,, \\
\omega_{2k-1}^{2k+1} = R_k\omega^1\,, \quad \omega_{2k-1}^{2k+2} = R_k\omega^2\,, \quad \omega_{2k}^{2k+1} = -\,R_k\omega^2\,, \quad \omega_{2k}^{2k+2} = R_k\omega^1\,, \\
\omega_{2k-1}^{2k+3} = \omega_{2k-1}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1}^n = 0\,, \quad \omega_{2k}^{2k+3} = \omega_{2k}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k}^n = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m - 1)\,,
\end{gathered} \tag{2}
$$

le groupe d'équations résultant de celles qui sont écrites à la dernière ligne pour $k = m - 1$ étant à supprimer si $n = 2m$. Rappelons que la notation appliquée dans le système (2) a été choisie de manière que $R_1 R_2 \ldots R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ désigne le rayon de l'indicatrice de courbure normale d'ordre k.

En cherchant les conditions d'intégrabilité du système (2) nous nous sommes bornés, dans le Mémoire cité ci-dessus, au cas où la distance V du plan de la circonférence de courbure normale localement sphérique d'ordre 1 du point M de la surface est constante. Cela étant, on obtient par la différentiation extérieure des équations écrites dans les deux premières lignes du système (2) et en vertu du lemme de Cartan les équations

$$
\omega_0^3 = \omega_0^4 = 0 \tag{3}
$$

qui n'entraînent aucune relation nouvelle. Les équations résiduelles du système (2) donnent les relations quadratiques qui peuvent être écrites sous la forme

$$
\begin{gathered}
\left[(\omega^1 - i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
\left[(\omega^1 + i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
[(\omega^1 - i\omega^2)(\omega_{2m-1}^j + i\omega_{2m}^j)] = 0\,, \quad [(\omega^1 + i\omega^2)(\omega_{2m-1}^j - i\omega_{2m}^j)] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\; j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,
\end{gathered} \tag{4}
$$

les équations de la dernière ligne étant à supprimer si $n = 2m$.

En partant du système d'équations différentielles qui définissent, d'une manière analytique, les surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques nous avons étudié, dans la Mémoire [3], les questions relatives à l'existence et la généralité des surfaces considérées et nous avons déduit leurs propriétés fondamentales de nature projective sous la supposition que les valeurs R_k ne soient pas constantes. Ce Mémoire a pour but de compléter les résultats précédents dans le cas qui a été exclu dans le travail mentionné.

2. Dans ce qui suit *nous allons nous occuper de surfaces* $\boldsymbol{M}$, *plongées dans un espace* $\boldsymbol{S}_{n+1}$ *à* $n + 1$ *dimensions à courbure constante* c, *dont les indicatrices de courbure normale d'ordre* $k = 1, 2, \ldots, m - 1$, *dans un point quelconque de la surface, sont des circonférences localement sphériques de rayons constants et de centres qui se confondent avec le point* M, *exception faite dans le cas du centre de la circon-*

férence de courbure normale d'ordre 1, *qui se trouve situé à une distance constante et non-nulle V du point M.*

Parce que $R_1 R_2 \ldots R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ est le rayon de la circonférence de courbure normale d'ordre k, la supposition faite au sujet des rayons en question peut être remplacée par la condition que toutes les fonctions R_k qui figurent dans (2) soient constantes. En vertu de cette supposition on obtient de (4) les équations qui prennent, après un calcul facile, la forme

$$\omega_{2k+1}^{2k+2} = (k + 1)\, \omega_1^2 \,, \tag{5}$$

$$\omega_{2m-1}^j + i\omega_{2m}^j = A_j(\omega^1 - i\omega^2)\,, \quad \omega_{2m-1}^j - i\omega_{2m}^j = B_j(\omega^1 + i\omega^2)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\ j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,$$

les équations de la dernière ligne étant à supprimer si $n = 2m$.

Par conséquant, les surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants, plongées dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$, sont déterminées, d'une manière analytique, par le système d'équations différentielles (1) dont les coefficients satisfont aux relations (2), (3), (5). Nous déduirons les conditions d'intégrabilité du système indiqué dans le paragraphe suivant qui sera consacré à l'étude des questions de l'existence et de la généralité des surfaces considérées.

Avant d'aborder les considérations énoncées nous montrerons que la supposition faite au sujet des rayons des circonférences de courbure normale d'ordre $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m - 1$ a pour conséquence la propriété que la distance V du centre de la circonférence de courbure normale d'ordre 1 du point M situé sur la surface soit constante. Pour cela, considérons une surface $\boldsymbol{M}$, plongée dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à courbure constante c, dont les circonférences de courbure normale localement sphériques d'ordre $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ ont les rayons constants, et supposons que la distance V soit une fonction des paramètres du point M sur la surface. Une telle surface $\boldsymbol{M}$ se trouve définie analytiquement par le système d'équations différentielles (2), où R_k sont constants et V dépend des paramètres qui déterminent la position du point M sur la surface.

Par la différentiation extérieure des équations du système (2) on obtient les relations extérieures quadratiques

$$\left[\omega^1\left(\frac{\mathrm{d}V}{R_1} - \omega_0^3\right)\right] - [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] - \left[\omega^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{R_1} + \omega_0^3\right)\right] = 0\,, \tag{6}$$

$$[\omega^1\omega_0^3] - [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] + [\omega^2\omega_0^3] = 0\,,$$

$$\frac{V}{R_1}[\omega^1\omega_0^3] + [\omega^2(2\omega_1^2 - \omega_3^4)] = 0\,, \quad [\omega^1(2\omega_1^2 - \omega_3^4)] + \frac{V}{R_1}[\omega^2\omega_0^3] = 0\,,$$

$$\left[\omega^1\left(2\omega_1^2 - \omega_3^4 - \frac{V}{R_1}\omega_0^4\right)\right] = 0\,, \quad \left[\omega^2\left(2\omega_1^2 - \omega_3^4 + \frac{V}{R_1}\omega_0^4\right)\right] = 0\,,$$

$$[\omega^1(\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2})] = 0\,, \quad [\omega^2(\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2})] = 0\,,$$

$$[\omega^1\omega_{2m-1}^j] + [\omega^2\omega_{2m}^j] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_{2m}^j] - [\omega^2\omega_{2m-1}^j] = 0$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m - 1;\ j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,$$

les équations de la dernière ligne étant à supprimer si $n = 2m$. Remarquons qu'il y a deux relations linéaires indépendantes entre les équations extérieures quadratiques (6).

Les équations (6) montrent que le système d'équations différentielles (2) n'est pas en involution dans le cas considéré. On peut le prolonger par les équations

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}V}{R_1} = 2(a\omega^1 - b\omega^2)\,, \\
2\omega_1^2 - \omega_3^4 = -\frac{V}{R_1}(b\omega^1 + a\omega^2)\,, \\
\omega_0^3 = -a\omega^1 - b\omega^2\,, \quad \omega_0^4 = b\omega^1 - a\omega^2\,, \\
\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2} = 0\,, \\
\omega_{2m-1}^j + i\omega_{2m}^j = A_j(\omega^1 - i\omega^2)\,, \quad \omega_{2m-1}^j - i\omega_{2m}^j = B_j(\omega^1 + i\omega^2) \\
(k = 2, 3, \dots, m-1;\ j = 2m+1, 2m+2, \dots, n)\,,
\end{gathered} \tag{7}
$$

celles qui sont écrites dans la dernière ligne étant à supprimer si $n = 2m$. Les a, b, A_j, B_j $(j = 2m+1, 2m+2, \dots, n)$ dans les équations (7) sont des fonctions des paramètres dont dépend le choix du repère mobile dans un point quelconque de la surface.

Pour procéder d'une manière simple, nous déduirons tout d'abord les relations qui résultent par différentiation extérieure des équations écrites aux trois premières lignes du système (7). On obtient ainsi

$$
\begin{gathered}
[\omega^1(\mathrm{d}a + b\omega_1^2)] - [\omega^2(\mathrm{d}b - a\omega_1^2)] = 0\,, \\
[\omega^1(\mathrm{d}b - a\omega_1^2)] + [\omega^2(\mathrm{d}a + b\omega_1^2)] - \\
-\frac{R_1}{V}(6R_1^2 - 2R_2^2 - 2V^2 - 2c + 3\,.\,\overline{a^2 + b^2})[\omega^1\omega^2] = 0\,, \\
[\omega^1(\mathrm{d}a + b\omega_1^2)] + [\omega^2(\mathrm{d}b - a\omega_1^2)] + 2\frac{V}{R_1}ab[\omega^1\omega^2] = 0\,, \\
[\omega^1(\mathrm{d}b - a\omega_1^2)] - [\omega^2(\mathrm{d}a + b\omega_1^2)] - \frac{V}{R_1}(a^2 - b^2)[\omega^1\omega^2] = 0\,,
\end{gathered} \tag{8}
$$

de sorte que l'on peut poser, d'après le lemme de Cartan,

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}a + b\omega_1^2 = -\frac{R_1}{2V}\left(N - 2\frac{V^2}{R_1^2}a^2\right)\omega^1 - \frac{V}{R_1}ab\omega^2\,, \\
\mathrm{d}b - a\omega_1^2 = \frac{V}{R_1}ab\omega^1 + \frac{R_1}{2V}\left(N - 2\frac{V^2}{R_1^2}b^2\right)\omega^2\,,
\end{gathered} \tag{9}
$$

où

$$
N = 6R_1^2 - 2R_2^2 - 2V^2 - 2c + \left(3 + \frac{V^2}{R_1^2}\right)(a^2 + b^2)\,. \tag{10}
$$

Parce que $m \geqq 3$, il existe pour $n \geqq 2m$ l'équation

$$\omega_1^2 + \omega_3^4 - \omega_5^6 = 0 \tag{11}$$

qui est comprise dans l'équation écrite à la quatrième ligne du système (7) pour $k = 2$. On obtient, par différentiation extérieure de l'équation (11), la relation

$$a^2 + b^2 = 4R_2^2 - 2R_3^2 - V^2 - c \tag{12}$$

qui reste valable même dans le cas de $m = 3$, si l'on pose $R_3 = 0$. En différentiant l'équation (12) et en appliquant les relations (7) et (9), on est amené, après un calcul facile, aux relations nouvelles

$$\begin{aligned} &a\left\{N - 2\frac{V^2}{R_1^2}(4R_2^2 - 2R_3^2 - V^2 - c) - 4V^2\right\} = 0\,, \\ &b\left\{N - 2\frac{V^2}{R_1^2}(4R_2^2 - 2R_3^2 - V^2 - c) - 4V^2\right\} = 0\,, \end{aligned} \tag{13}$$

où l'on a à poser $R_3 = 0$ si $m = 3$.

Cela étant, deux cas, et deux seulement, sont à considérer suivant que les deux fonctions a, b s'annulent en même temps ou bien

$$N - 2\frac{V^2}{R_1^2}(4R_2^2 - 2R_3^2 - V^2 - c) - 4V^2 = 0 \tag{14}$$

et au moins une des fonctions a, b est différente de zéro.

Tout d'abord, en considérant le premier cas, on voit en vertu de l'équation (7) que la distance V du centre de la circonférence de courbure normale d'ordre 1 du point correspondant de la surface est constante. Un calcul facile montre que le système d'équations (7) peut être remplacé, dans le cas considéré, par le système équivalent qui est formé par les équations (3) et (5).

Dans le cas qui est fourni par l'équation (14), les a, b ne s'annulent pas en même temps de sorte que la distance V n'est pas constante. En éliminant l'expression $a^2 + b^2$ de l'équation (12) et de l'équation (14), où l'on a substitué d'après (10), on obtient une équation algébrique du quatrième degré en V à coefficients constants qui ne sont pas nuls à la fois. Les racines de cette équation sont donc aussi constantes et cela est en contradiction avec l'affirmation qui découle des suppositions indiquées.

Les résultats précédents montrent que, *dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à courbure constante c, chaque surface $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, dont les rayons sont constants, jouit de la propriété que la distance V du centre de la circonférence de courbure normale d'ordre* 1 *du point correspondant de la surface est aussi constante.*

D'après les considérations précédentes, les surfaces en question se trouvent déterminées par le système d'équations différentielles (2), (3), (5) que nous allons appliquer dans ce qui suit à leurs étude.

3. Nous allons examiner maintenant les questions de l'existence et de la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants. Or, l'établissement de l'existence et de la généralité de ces surfaces conduit, dans le cas général, à effectuer les calculs très longs et difficiles. Pour cette raison, *nous nous bornons, dans toutes les considérations suivantes, à l'étude des surfaces* $\boldsymbol{M}$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants, qui se trouvent plongées soit dans un espace à* $2m + 2$ *dimensions* $(n = 2m + 1)$, *soit dans un espace à* $2m + 1$ *dimensions* $(n = 2m)$.

En premier lieu, considérons les surfaces $\boldsymbol{M}$ plongées dans un espace à $2m + 2$ dimensions. Alors, on a $j = 2m + 1$ dans le système d'équations (5) et on peut écrire, pour plus de simplicité, A, B au lieu de A_{2m+1}, B_{2m+1}. Les conditions d'intégrabilité du système d'équations différentielles définissant les surfaces en question, obtenues par la différentiation extérieure des équations (5), sont

$$\begin{aligned} (15) \qquad R_k^2 &= \tfrac{1}{2}k(k + 1)\, R_1^2 - \tfrac{1}{4}(k - 1)(k + 2)(V^2 + c) \quad (k = 1, 2, \dots, m - 1), \\ AB &= m(m + 1)\, R_1^2 - \tfrac{1}{2}(m - 1)(m + 2)(V^2 + c), \\ &[(\omega^1 - i\omega^2)(\mathrm{d}A + i\,.\,\overline{m + 1}\,.\,A\omega_1^2)] = 0, \\ &[(\omega^1 + i\omega^2)(\mathrm{d}B - i\,.\,\overline{m + 1}\,.\,B\omega_1^2)] = 0. \end{aligned}$$

Parce que la surface $\boldsymbol{M}$ est plongée, dans le cas considéré, dans un espace à $2m + 2$ dimensions et n'appartient pas à un sous-espace linéaire quelconque de cet espace, les deux fonctions A, B ne peuvent pas s'annuler à la fois. Il s'en ensuit qu'il faut distinguer deux cas, et deux seulement, suivant que les deux fonctions A, B soient différentes de zéro, ou bien que précisément une d'entre elles s'annule identiquement. Nous désignerons la surface $\boldsymbol{M}$ correspondante par $\boldsymbol{M}_1$, ou bien $\boldsymbol{M}_2$ dans les cas qui peuvent se présenter d'après la distinction précédente.

Tout d'abord, nous examinerons l'existence et la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}_1$. En partant de la supposition $AB \neq 0$, on déduit, par un calcul facile, la relation

$$(16) \qquad \frac{\mathrm{d}A}{A} + i(m + 1)\,\omega_1^2 = 0$$

qui résulte des équations figurant à la deuxième et troisième ligne du système (15) et qui entraîne, par la différentiation extérieure, l'équation

$$(17) \qquad 2R_1^2 = V^2 + c\,.$$

Les conditions d'intégrabilité du système considéré d'équations différentielles sont ainsi exprimées par la première équation (15) et par l'équation (17). Ces calculs faits, on voit que *les surfaces* $\boldsymbol{M}_1$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants existent dans un espace* $\mathbf{S}_{2m+2}$ *quelconque à* $2m + 2$ *dimensions à courbure constante* $c \neq -V^2$ *et* qu'*elles ne dépendent que de constantes arbitraires.*

Remarquons que le rayon de la circonférence de courbure normale d'ordre 1, la distance de son plan du point correspondant de la surface et la courbure de l'espace $\mathbf{S}_{2m+2}$ sont liées, dans le cas des surfaces $\boldsymbol{M}_1$ en question, par la relation précédente (17). La première équation (15) fournit ensuite la relation $R_k^2 = R_1^2 = \frac{1}{2}(V^2 + c)$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ qui exprime la dépendance entre les quantités particulières R_k. Il en résulte que le rayon de la circonférence de courbure normale d'ordre k est égal à R_1^k.

Dans la suite, nous établirons l'existence et la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}_2$. En raison de ce fait que les deux fonctions A, B figurent d'une manière symétrique dans les relations précédentes nous pouvons nous borner au cas $A = 0$, $B \neq 0$. Les conditions d'intégrabilité du système qui définit les surfaces en question sont exprimées par les équations

$$(18)\quad R_k^2 = \tfrac{1}{2}k(k+1)\, R_1^2 - \tfrac{1}{4}(k-1)(k+2)(V^2 + c) \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)\,,$$
$$m(m+1)\, R_1^2 - \tfrac{1}{2}(m-1)(m+2)(V^2 + c) = 0\,,$$
$$[(\omega^1 + i\omega^2)(\mathrm{d}B - i\,.\,\overline{m+1}\,.\,B\omega_1^2)] = 0\,.$$

On en voit que *les surfaces* $\boldsymbol{M}_2$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants existent dans un espace* $\mathbf{S}_{2m+2}$ *quelconque à* $2m + 2$ *dimensions à courbure constante* $c \neq -V^2$ et qu'*elles dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable.*

La deuxième équation (18) détermine, dans le cas considéré, la relation existant entre le rayon de la circonférence de courbure normale d'ordre 1, la distance de son plan du point correspondant de la surface et la courbure de l'espace $\mathbf{S}_{2m+2}$. La première équation (18) décrit ensuite les quantités des rayons des autres circonférences de courbure normale.

Il faut examiner encore l'existence et la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}$ plongées dans un espace à $2m + 1$ dimensions que nous désignerons par $\boldsymbol{M}_3$. Dans le système (5) il ne reste que l'équation écrite à la première ligne et ses conditions d'intégrabilité sont fournies par les deux premières équations (18). Il en résulte immédiatement que *les surfaces* $\boldsymbol{M}_3$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants existent dans un espace* $\mathbf{S}_{2m+1}$ *quelconque à* $2m + 1$ *dimensions à courbure constante* $c \neq -V^2$ et qu'*elles ne dépendent que de constantes arbitraires.*

Les équations indiquées du système (18) expriment encore les relations entre les quantités R_k, V et la courbure de l'espace $\mathbf{S}_{2m+1}$.

Les surfaces $\boldsymbol{M}$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants* existent, dans les cas de $n = 2m + 1$ et $n = 2m$ considérés ci-dessus, dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ quelconque dont la courbure satisfait à l'inégalité $V^2 + c \neq 0$ et, par suite, elles *se montrent à nous comme surfaces du type non-euclidien* dans le sens des considérations du Mémoire [3].

4. Dans ce paragraphe, nous énoncerons les propriétés caractéristiques fondamentales de nature projective des surfaces considérées $\boldsymbol{M}$, en partant des résultats démontrés dans le travail [3]. Pour cela rappelons que $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n = 2m + 1$ ou $n = 2m)$

désigne l'extension projective de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à courbure constante dont l'absolu est la quadrique régulière $\boldsymbol{A}$. D'après les résultats du Mémoire cité, on peut attacher, d'une manière univoque, à chaque surface $\boldsymbol{M}$ un point E_0 fixe en position. En supposant $V^2 + c \neq 0$, le point E_0 n'est pas situé, dans le cas de $c \neq 0$, sur la quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ de l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$ et, dans le cas de $c = 0$, dans l'hyperplan Q qui contient la quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ de l'espace euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$. La projection, prise du point E_0, de la surface $\boldsymbol{M}$ est une variété conique de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ qui peut être regardée comme une surface $\boldsymbol{M}^0$ plongée dans l'espace projectif $\boldsymbol{R}_n$ dont les points X^0 sont des droites passant par deux points différents X et E_0 de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$. Si l'on introduit dans l'espace $\boldsymbol{R}_n$ une métrique non-euclidienne en prenant pour l'absolu la quadrique $\boldsymbol{K}$ qui est circonscrite, dans le cas de $c \neq 0$, du point E_0 à la quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ de l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$ et qui est, dans le cas de $c = 0$, une projection prise du point E_0 de la quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ de l'espace euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$, on obtient l'espace $\boldsymbol{T}_n$ à courbure constante $V^2 + c$. Dans cet espace $\boldsymbol{T}_n$, chaque surface $\boldsymbol{M}^0$ est une surface minimum dont les indicatrices de courbure normale d'ordre $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ sont des circonférences aux centres dans le point de la surface. On déduit immédiatement, en s'appuyant sur les résultats du Mémoire donné ci-dessus, que les rayons des circonférences de courbure normale de la surface $\boldsymbol{M}^0$ sont constants dans le cas considéré. Les propriétés projectives caractéristiques des surfaces de ce type ont été démontrées dans le Mémoire [4].

Si nous mettons à la base des considérations suivantes les remarques précédentes et les résultats déduits dans les travaux précités, nous pouvons résumer les propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}$ en question dans les théorèmes qui suivent:

Pour qu'une surface de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$ $(n = 2m + 1$ *ou* $n = 2m)$ *à* $n + 1$ *dimensions puisse être définie comme une surface* $\boldsymbol{M}$, *plongée dans un espace non-euclidien (euclidien)* $\boldsymbol{S}_{n+1}$ *à* $n + 1$ *dimensions, dont les indicatrices de courbure normale d'ordre* $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ *sont des circonférences localement sphériques de rayons constants, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière* $\boldsymbol{A}$ *de l'espace* $\boldsymbol{P}_{n+1}$ *(dans un hyperplan* Q *de l'espace* $\boldsymbol{P}_{n+1}$ *qui contient une quadrique régulière* $\boldsymbol{A}$*) et que la surface en question soit douée d'un réseau dont la projection, prise du point* E_0, *est le réseau conjugué de l'espace* $\boldsymbol{R}_n$ *possédant dans les cas particuliers des propriétés suivantes*:

a) *Dans le cas des surfaces* $\boldsymbol{M}_1$ *plongées dans un espace à* $2m + 2$ *dimensions, le réseau conjugué en question est autopolaire par rapport à la quadrique régulière* $\boldsymbol{K}$ *de l'espace* $\boldsymbol{R}_{2m+1}$, *périodique à période* $2(m + 1)$ *et à invariants égaux et constants.*

b) *Dans le cas des surfaces* $\boldsymbol{M}_2$ *plongées dans un espace à* $2m + 2$ *dimensions, le réseau conjugué en question est autopolaire par rapport à la quadrique régulière* $\boldsymbol{K}$ *de l'espace* $\boldsymbol{R}_{2m+1}$, *ses premières, deuxièmes, ..., m-ièmes transformées laplacien-*

nes se trouvent situées sur la quadrique $\mathbf{K}$ *et sa suite de transformées laplaciennes s'arrête, dans un des deux sens, après m transformations de la manière de Goursat et, dans l'autre sens, après* $m + 1$ *transformations de la manière de Laplace; les courbes, dans le sens desquelles la suite correspondante des transformées laplaciennes s'arrête de la manière de Goursat, sont des courbes rationnelles normales plongées dans des sous-espaces linéaires à m dimensions de l'espace projectif* $\mathbf{R}_{2m+1}$.

c) *Dans le cas des surfaces* $\boldsymbol{M}_3$ *plongées dans un espace à* $2m + 1$ *dimensions, le réseau conjugué en question est autopolaire par rapport à la quadrique régulière* $\mathbf{K}$ *de l'espace* $\mathbf{R}_{2m}$, *ses premières, deuxièmes, ..., m-ièmes transformées laplaciennes se trouvent situées sur la quadrique* $\mathbf{K}$ *et sa suite de transformées laplaciennes s'arrête, dans les deux sens, après m transformations de la manière de Goursat; les courbes des deux couches du réseau conjugué sont des courbes rationnelles normales plongées dans des sous-espaces linéaires à m dimensions de l'espace projectif* $\mathbf{R}_{2m}$.

Toutes les affirmations précédentes découlent immédiatement des résultats démontrés dans les Mémoires [3] et [4]. Donc, il est possible d'omettre la démonstration détaillée des théorèmes que nous venons d'énoncer.

5. Les résultats précédents se rapportent aux surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants qui se trouvent plongées dans un espace à $2m + 2$ ou $2m + 1$ dimensions dans le cas de $m \geqq 3$. La dernière supposition entraîne qu'il existe, dans un point M quelconque de la surface, la circonférence de courbure normale localement sphérique d'ordre 1, dont le centre ne coïncide pas avec le point M, et les circonférences de courbure normale localement sphériques d'ordre $2, \ldots, m - 1$, dont les centres se confondent avec le point M.

On peut s'assurer, par les considérations analogues à celles que nous avons suivies dans ce qui précède, que toutes les résultats obtenus restent valables même dans le cas de $m = 2$. Les surfaces dont il s'agit dans le cas mentionné, ont, dans un point quelconque, pour l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 une circonférence localement sphérique de rayon constant, dont le centre se trouve situé à distance nonnulle du point correspondant de la surface, et elles sont plongées dans un espace à six ou cinq dimensions à courbure constante. Nous avons étudié, dans le Mémoire antérieur [2], les surfaces $\boldsymbol{M}$ en question qui se trouvent plongées dans un espace à cinq dimensions.

6. Dans le Mémoire [1], M. O. Borůvka a posé un problème intéressant relatif aux surfaces minima d'un espace non-euclidien, dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences de rayons constants. Au point de vue du contenu il s'agit, dans le problème mentionné, de trouver toutes les surfaces minima, plongées dans un espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{2m}$ $(m \geqq 2)$ à $2m$ dimensions, qui jouissent de la propriété d'avoir, dans un point quelconque de la surface, pour l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 une circonférence. M. O. Borůvka a donné la solution complète de ce problème pour $m = 2$ et $m = 3$ et, dans les deux cas, il a démontré que, les surfaces minima d'un espace non-euclidien à $2m$ dimensions, dont l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 dans un point quelconque de la surface est une circonférence de rayon constant, sont les surfaces uniques, dont toutes les indicatrices de courbure normale (en nombre de $m - 1$) sont des circonférences de centres dans le point correspondant de la surface et de rayons constants. Par les résultats précédents il a été démontré aussi que les surfaces minima en question sont les surfaces uniques de l'espace $\boldsymbol{S}_{2m}$ qui peuvent être exprimées par les fonctions sphériques de première espèce d'ordre m. Dans le cas de $m > 3$ le problème considéré n'est pas résolu jusqu'ici.

Tous les résultats précédents qui concernent les surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques montrent une relation étroite avec les surfaces minima, dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences. Ayant égard au problème mentionné, on peut se poser la question de *déterminer toutes les surfaces qui se trouvent plongées dans un espace* $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ *à* $2m + 1$ *dimensions à courbure constante et qui jouissent des propriétés locales suivantes*: 1° *Dans un point quelconque de la surface, l'indicatrice de courbure normale d'ordre* 1 *est une ciconférence localement sphérique de rayon constant*; 2° *La droite menée par le centre de l'indicatrice de courbure normale d'ordre* 1 *et par le point correspondant de là surface passe par un point fixe.* Dans les considérations suivantes nous déduirons le système d'équations différentielles qui expriment, d'une manière analytique, les propriétés précédentes des surfaces en question et nous indiquerons la relation existant entre le problème posé cidessus et celui de M. O. Borůvka.

En s'appuyant sur les résultats obtenus dans les équations (6.1) du Mémoire [3], on peut exprimer, après avoir fait une particularisation convenable du repère attaché à la surface, la propriété 1° des surfaces en question par le système d'équations différentielles

$$(19) \qquad \begin{array}{llll} \omega^0 = 0\,, & \omega^3 = 0\,, & \omega^4 = 0\,, & \omega^j = 0\,, \\ \omega_1^0 = V\omega^1\,, & \omega_1^3 = \quad R_1\omega^1\,, & \omega_1^4 = R_1\omega^2\,, & \omega_1^j = 0\,, \quad (j = 5, 6, \ldots, 2m) \\ \omega_2^0 = V\omega^2\,, & \omega_2^3 = -\,R_1\omega^2\,, & \omega_2^4 = R_1\omega^1\,, & \omega_2^j = 0\,, \end{array}$$

où R_1 est une constante et V dépend des paramètres du point sur la surface. Remarquons que le repère mobile a été choisi de manière que le centre de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 se confond avec le point $M + V\mathbf{e}_0$.

Ayant égard à la propriété 2°, supposons que la droite déterminée par le centre de la circonférence considérée et par le point correspondant de la surface passe par le point fixe $E_0 = M + f\mathbf{e}_0$, f étant une fonction des paramètres du point M sur la surface. On a donc $\mathrm{d}E_0 = 0$ et on en déduit facilement, d'après (1) et (19), l'équation

$$\mathrm{d}f \,.\, \mathbf{e}_0 + (1 - fV)(\omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2) + \omega_0^3\mathbf{e}_3 + \omega_0^4\mathbf{e}_4 + \ldots + \omega_0^{2m}\mathbf{e}_{2m} = 0\,.$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2m}$ étant linéairement indépendants, on a $\mathrm{d}f = 0$, $1 - fV = 0$

et

$$\omega_0^j = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, 2m)\,. \tag{20}$$

Par suite, la supposition considérée est exprimée par le système d'équations différentielles (20) et par la condition que la quantité V soit constante. La droite joignant le centre de la circonférence de courbure normale localement sphérique d'ordre 1 avec le point M correspondant de la surface passe donc par le point fixe $E_0 = M + \frac{1}{V}\mathbf{e}_0$.

Chaque surface de l'espace $\mathbf{S}_{2m+1}$ qui remplit les suppositions précédentes se trouve déterminée, d'une manière analytique, par le système d'équations différentielles (1) dont les coefficients satisfont aux relations (19) et (20), où R_1 et V sont des constantes et elle se présente ainsi comme une surface $\boldsymbol{M}$ à une circonférence de courbure normale localement sphérique de rayon constant dans le sens introduit au sixième chapître du Mémoire [3]. La projection, prise du point E_0, de la surface en question est ainsi une surface minimum $\boldsymbol{M}^0$, dont l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1, dans un point quelconque, est une circonférence de rayon constant. On en voit immédiatement que le problème de trouver toutes les surfaces de l'espace $\mathbf{S}_{2m+1}$ qui jouissent des propriétés locales considérées peut être ramené au problème qui exige la recherche des surfaces minima d'un espace à $2m$ dimensions, dont l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est une circonférence de rayon constant.

En vertu des résultats de M. O. Borůvka, nous pouvons affirmer que, *dans le cas de* $m = 2, 3$, *chaque surface, qui se trouve plongée dans un espace à courbure constante et qui jouit des propriétés locales indiquées ci-dessus, est une surface* $\boldsymbol{M}$ *à* $m - 1$ *circonférences de courbure normale localement sphériques de rayons constants.*

L'affirmation qui précède est évident dans le cas de $m = 2$ et elle découle immédiatement des résultats déduits dans le Mémoire [2]. Dans le cas de $m = 3$, on peut démontrer le théorème précédent en partant du système d'équations (19) et (20). Or, les calculs qui sont à faire à ce sujet ne différant pas essentiellement de ceux qui fournissent le résultat démontré par M. O. Borůvka dans le Mémoire [1], nous pouvons omettre la démonstration détaillée des affirmations énoncées.

Littérature

[1] *O. Borůvka:* Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce. Journal de mathématiques pures et appliquées *12*, 1933, 337—383.

[2] *K. Svoboda:* Sur une caractérisation métrique de la surface de Véronèse. Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, No *368*, 1955.

[3] *K. Svoboda:* Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Чехословацкий математический журнал *8* (*83*), 1958, 399—447.

[4] *K. Svoboda:* Poznámka o minimálních plochách s kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru. Časopis pro pěstování matematiky *85*, 1960, 291—299.

Резюме

ДОПОЛНЕНИЕ К РАБОТЕ: ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно

В этой работе были исследованы поверхности $\boldsymbol{M}$ пространства $\boldsymbol{S}_{n+1}$ с постоянной кривизной c, у которых индикатрисы нормальной кривизны порядка $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ являются в каждой точке M поверхности локально сферическими окружностями с постоянными радиусами и с центрами, совпадающими с точкой M за исключением центра окружности нормальной кривизны порядка 1, который находится от точки M на ненулевом расстоянии V. Рассматриваемые поверхности $\boldsymbol{M}$ обладают тем свойством, что расстояние V постоянно, и определяются аналитически системой дифференциальных уравнений (1), коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям (2), (3) и (5). Поверхности $\boldsymbol{M}$, погруженные в пространство $\boldsymbol{S}_{2m+2}$ или $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ являются поверхностями неевклидова типа $(V^2 + c \neq 0)$ и зависят в первом случае или от постоянных (поверхности $\boldsymbol{M}_1$) или от одной функции одного переменного (поверхности $\boldsymbol{M}_2$), а во втором случае от постоянных (поверхности $\boldsymbol{M}_3$).

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность проективного пространства $\boldsymbol{P}_{2m+2}$ или $\boldsymbol{P}_{2m+1}$ можно было определить как поверхность $\boldsymbol{M}$ неевклидова типа в пространстве $\boldsymbol{S}_{2m+2}$ или $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ с постоянной кривизной, приводятся в работе [3] (теоремы 5.6, 5.8, 5.9) и выражаются при помощи свойств сопряженной сети, получающейся путем проектирования сети минимальных кривых поверхности $\boldsymbol{M}$ из точки E_0, которая ей инвариантно сопоставлена. Для того, чтобы радиусы локально сферических окружностей нормальной кривизны поверхности $\boldsymbol{M}$ были постоянны, необходимо и достаточно, чтобы, в случае поверхностей $\boldsymbol{M}_1$, инварианты этой сопряженной сети были одинаковы и постоянны или чтобы, в случае поверхностей $\boldsymbol{M}_2$ и $\boldsymbol{M}_3$, кривые, в направлении которых последовательность преобразований Лапласа упомянутой сопряженной сети заканчивается способом Гурса, были рациональными нормальными кривыми линейных подпространств размерности m.

Для $m = 2, 3$ каждая поверхность пространства $\boldsymbol{S}_{2m+1}$, у которой индикатриса нормальной кривизны порядка 1 является локально сферической окружностью с постоянным радиусом и с центром, соединяющая прямая которого с соответственной точкой поверхности проходит через фиксированную точку, будет поверхностью $\boldsymbol{M}$ с $m - 1$ локально сферическими окружностями нормальной кривизны.