Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Les quadriques de Lie d'une surface plongée dans un espace tridimensionnel à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 1, 134–142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100447

Чехословацкий математический журнал т. 11 (86) 1961, Прага

LES QUADRIQUES DE LIE D'UNE SURFACE PLONGÉE DANS UN ESPACE TRIDIMENSIONNEL À CONNEXION PROJECTIVE

ALOIS ŠVEC, Praha
(Reçu le 29 janvier 1960)

A chaque point d'une surface dans $\mathscr{P}_3$ on associe un faisceau de quadriques qui généralisent la quadrique de Lie d'une surface dans l'espace projectif. On étudie le rapport de ces quadriques à la quadrique de Lie définie par M. G. F. LAPTIEFF.

Dans les travaux [3] et [4] on a montré que pour les surfaces dans un espace P_3 à connexion projective il existe deux éléments projectifs linéaires, et même toute une série de courbes de Darboux et de celles de Segre, qui figurent manifestement dans toute étude sérieuse de ces surfaces. Il est donc insuffisant, pour ces surfaces-là, de généraliser les notions particulières de la manière pratiquée par M. Laptieff dans [2]. Dans ce qui va suivre, on démontre que la quadrique de Lie, définie par M. Laptieff, d'une surface dans $\mathscr{P}_3$ n'a pas le droit d'occuper une position exceptionnelle. Je procède en généralisant au cas de l'espace courbe une construction de la quadrique de Lie d'une surface dans un espace projectif; cette construction m'a été communiquée par M. E. ČECH.

1. Dans un travail non-publié, M. E. Čech a démontré le théorème suivant: *Soient données deux surfaces $x = x(u, v)$ et $x' = x'(u, v)$ dans S_3, ou S_3' respectivement, en correspondance asymptotique C; u et v sont paramètres asymptotiques. Alors pour chaque couple de points x, x' en correspondance il existe une seule homographie tangente à la correspondance C, $K : S_3 \to S_3'$ jouissant des propriétés suivantes*:

1. *la tangente asymptotique $[x', x_v']$ est l'ensemble de tous les points tels que les asymptotiques $v =$* const *des deux surfaces, (x') et (Kx), passant par le point x', ont, projetées d'un point de la tangente en question* (dans un plan quelconque), *un contact analytique de second ordre; il en est de même si nous échangeons u et v*;

2. *soient*

$$y(t, u) = t\, x(u, v_0) + x_v(u, v_0)\,, \quad z(t', u) = t'\, x'(u, v_0) + x_v'(u, v_0)$$

deux surfaces réglées en correspondance, formées d'une manière évidente des surfaces (x), (x'), et soit C' la correspondance entre elles qui associe au point $y(t, u)$ le *point $z(t', u) = K\, y(t, u)$; je suppose maintenant que K soit une homographie tangente à la correspondance C' simultanément pour tous les points des droites correspondantes; le même sera valable si l'on échange u et v.*

Si la surface (x') est dualisation de la surface (x), alors l'homographie déterminée ci-dessus est une polarité par rapport à la quadrique de Lie.

Dans ce qui suit, je vais montrer comment change l'énoncé de ce théorème si l'on passe aux surfaces plongées dans un espace tridimensionnel à connexion projective.

2. Dans mon travail [3], j'ai montré que l'étude des propriétés locales d'une surface plongée dans un espace $\mathscr{P}_3$ à connexion projective est identique à l'étude des propriétés locales de la variété $PW^3_{0,3}$ (que je vais appeler aussi surface, pour simplifier) et qui est définie comme suit: A chaque point (u, v) du domaine Ω des paramètres soit associé un espace projectif local $P_3(u, v)$ de centre $A_0(u, v)$; pour chaque arc $\gamma \subset \Omega$ joignant (u_1, v_1) et (u_2, v_2) il est donné une homographie $\mathbf{P}_\gamma : P_3(u_1, v_1) \to P_3(u_2, v_2)$. Dans le même travail, j'ai montré qu'il est possible de choisir, dans les espaces locaux, des repères A_0, A_1, A_2, A_3, telles que l'ensemble des homographies $\mathbf{P}_\gamma$ déterminant la connexion de la surface π considérée, soit donné comme d'habitude par le système d'équations

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad \mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2\,,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + (1 - h)\,\omega^2 A_3\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 A_0 + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1 + h)\,\omega^1 A_3\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3\,;
\end{aligned}
$$

$$(2)\qquad \omega_i^j = a_{i\alpha}^j \omega^\alpha\,,\quad \omega^\alpha = \xi^\alpha(u, v)\,\mathrm{d}u + \eta^\alpha(u, v)\,\mathrm{d}v\,,\quad [\omega^1\omega^2] \neq 0\,;\quad \alpha = 1, 2;$$

$$(3)\qquad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0\,.$$

Si j'introduis les bases duelles E^i par les équations

$$(4)\qquad [A_i E^j] = \delta_i^j$$

les équations fondamentales de la dualisation π^* de la surface π deviennent

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad \mathrm{d}E^3 &= -\,\omega_3^3 E^3 - (1 + h)\,\omega^1 E^2 - (1 - h)\,\omega^2 E^1\,,\\
\mathrm{d}E^2 &= -\,\omega_3^2 E^3 - \omega_2^2 E^2 - \omega_1^2 E^1 - \omega^2 E^0\,,\\
\mathrm{d}E^1 &= -\,\omega_3^1 E^3 - \omega_2^1 E^2 - \omega_1^1 E^1 - \omega^1 E^0\,,\\
\mathrm{d}E_0 &= -\,\omega_3^0 E^3 - \omega_2^0 E^2 - \omega_1^0 E^1 - \omega_0^0 E^0\,.
\end{aligned}
$$

La fonction $h = h(u, v)$ est invariante, on l'appelle *torsion* de la surface. Introduisons encore les quantités h_α, o_α par les équations

$$(6)\qquad \mathrm{d}h = h_1\omega^1 + h_2\omega^2\,,\quad \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = o_1\omega^1 + o_2\omega^2\,.$$

3. Les surfaces π et π^* sont en correspondance asymptotique C, l'homographie tangente à C la plus générale est évidemment

$$
\begin{aligned}
KA_0 &= E^3\,, \\
KA_1 &= -\,(1+h)\,E^2 + \varrho_1 E^3\,, \\
KA_2 &= -\,(1-h)\,E^1 + \varrho_2 E^3\,, \\
KA_3 &= \alpha_3 E^3 + \alpha_2 E^2 + \alpha_1 E^1 + \alpha_0 E^0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

où l'on a

$$
\begin{aligned}
KA_0 &= E^3\,, \\
K\,\mathrm{d}A_0 &= \mathrm{d}E^3 + (\omega_0^0 + \omega_3^3 + \varrho_1\omega^1 + \varrho_2\omega^2)\,E^3\,, \\
K\,\mathrm{d}^2A_0 &= \mathrm{d}^2E^3 + 2(\omega_0^0 + \omega_3^3 + \varrho_1\omega^1 + \varrho_2\omega^2)\,\mathrm{d}E^3 + (.)\,E^3 + \\
&\quad + \Phi_2E^2 + \Phi_1E^1 + \Phi_0E^0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 &= (\overline{1+h}\,.\,\overline{2\varrho_1+o_1} + h_1)(\omega^1)^2 + \\
&\quad + (\overline{1+h}\,.\,\overline{2\varrho_2+o_2} + 2\alpha_2 - 2a^1_{21} + h_2)\,\omega^1\omega^2 - 2a^1_{22}(\omega^2)^2\,, \\
\Phi_1 &= -\,2a^2_{11}(\omega^1)^2 + (\overline{1-h}\,.\,\overline{2\varrho_1+o_1} + 2\alpha_1 - 2a^2_{12} - h_1)\,\omega^1\omega^2 + \\
&\quad + (\overline{1-h}\,.\,\overline{2\varrho_2+o_2} - h_2)(\omega^2)^2\,, \\
\Phi_0 &= 2(\alpha_0 - 1)\,\omega^1\omega^2\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Considérons maintenant un point fixe $A_0(u_0, v_0)$ de la surface π et le point correspondant $E^3(u_0, v_0)$ de la dualisation π^*. Soit γ, ou encore γ', le développement de l'asymptotique $\omega^1 = 0$ de la surface π ou π^* respectivement (passant par le point $A_0(u_0, v_0)$, ou par $E^3(u_0, v_0)$ resp.), dans l'espace local $P_3(u_0, v_0)$, ou encore dans l'espace duel $P_3^*(u_0, v_0)$ resp. Cherchons les homographies tangentes (7) pour les quelles nous avons: les projections des courbes $K\gamma$, γ' qui ont la tangente asymptotique $[E^3E^1]$ commune, faites d'un point quelconque de l'autre tangente asymptotique $[E^3E^2]$, ont un contact analytique de second ordre. A partir de (8_3) on voit aisément que cette condition est exprimée analytiquement par le fait que le point $\Phi_2E^2 + \Phi_1E^1 + \Phi_0E^0$ est pour $\omega^1 = 0$ multiple du point E^2, c'est-à-dire que $\Phi_1 = \Phi_0 = 0$ pour $\omega^1 = 0$. J'en obtiens

$$
\varrho_2 = \frac{h_2}{2(1-h)} - \frac{1}{2}\,o_2\,.
\tag{10}
$$

Si je demande que l'homographie (7) jouisse d'une propriété analogue même si j'échange les asymptotiques des deux couches, j'obtiens une nouvelle condition

$$
\varrho_1 = -\,\frac{h_1}{2(1+h)} - \frac{1}{2}\,o_1\,.
\tag{11}
$$

4. Considérons les surfaces réglées non-développables L, L', formées des tangentes asymptotiques des surfaces π, π^* le long des asymptotiques correspondantes $\omega^2 = 0$. Ces surfaces sont alors formées de points

$$
B = A_2 + tA_0\,, \quad F' = E^1 + t'E^3\,.
\tag{12}
$$

Supposons ensuite que pour chaque couple de points correspondants A_0, E^3 des surfaces π, π^* nous ayons choisi une homographie tangente (7) qui met en correspondance les droites génératrices des surfaces L, L' d'une telle manière que les points

$$B = A_2 + tA_0\,, \quad F = -(1-h)\,E^1 + (\varrho_2 + t)\,E^3 \tag{13}$$

se correspondent l'un à l'autre. Cherchons maintenant les homographies tangentes K qui sont homographies tangentes à la correspondance qui vient d'être introduite entre L et L', et cela simultanément pour tous les points des droites en correspondance. Il faut donc que l'on ait

$$KB = F\,, \quad K\,\mathrm{d}B = \mathrm{d}F + (\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\,\mathrm{d}t)\,F \tag{14}$$

identiquement en t, ω^1, $\mathrm{d}t$. En vertu de

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B &= (a^0_{21}\omega^1 + ta^0_{01}\omega^1 + \mathrm{d}t)\,A_0 + (a^1_{21}\omega^1 + t\omega^1)\,A_1 + a^2_{21}\omega^1 A_2 + \\ &\qquad + (1+h)\,\omega^1 A_3\,,\\ \mathrm{d}F &= (\overline{\varrho_{21} - \varrho_2 a^3_{31} + (1-h)\,a^1_{31}}\,.\,\omega^1 - ta^3_{31}\omega^1 + \mathrm{d}t)\,E^3 + \\ &\quad + (\overline{(1-h)\,a^1_{21} - (1+h)\,\varrho_2}\,.\,\omega^1 - \overline{1+h}\,.\,t\omega^1)\,E^2 + \\ &\quad + (h_1 + \overline{1-h}\,.\,a^1_{11})\,\omega^1 E^1 + (1-h)\,\omega^1 E^0\end{aligned} \tag{15}$$

j'obtiens à partir de (14_2) en comparant les coefficients auprès de $t\omega^1E^3$, $t\,\mathrm{d}t\,E^3$, ω^1E^0, ω^1E^1, ω^1E^2, que

$$\lambda_1 = a^0_{01} + a^3_{31} + \varrho_1\,, \quad \lambda_2 = 0\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1-h}{1+h}\,, \quad \alpha_1 = \frac{1}{1+h}\,(\overline{1-h}\,.\,\overline{a^1_{11} + a^2_{21} - \lambda_1} + h_1)\,,\\ \alpha_2 &= \frac{1}{1+h}\,(2a^1_{21} - \overline{1+h}\,.\,\varrho_2)\,,\\ \alpha_3 &= \frac{1}{1+h}\,(\varrho_{21} - \varrho_2\,.\,\overline{a^2_{21} + a^2_{31} - \lambda_1} - \varrho_1 a^1_{21} + \overline{1-h}\,.\,a^1_{31} - a^0_{21})\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Dans (15) et (17), je définis ϱ_{21}, et en général $\varrho_{\alpha\beta}$, par les équations

$$\mathrm{d}\varrho_\alpha = \varrho_{\alpha 1}\omega^1 + \varrho_{\alpha 2}\omega^2 \quad (\alpha = 1, 2)\,. \tag{18}$$

Considérons la corrélation $K : P_3 \to P_3^*$ (7), déterminée sans ambiguïté, où ϱ_α, α_i sont donnés par les équations (10), (11), (17), (16) et trouvons dans P_3 les points situés dans les plans qui leur correspondent. Ces points engendrent évidemment une quadrique Q' dont l'équation sera (en coordonnées locales de l'espace P_3)

$$[(x^0A_0 + x^1A_1 + x^2A_2 + x^3A_3)(x^0KA_0 + x^1KA_1 + x^2KA_2 + x^3KA_3)] = 0\,.$$

Un calcul direct conduit à l'équation

$$\frac{2}{1+h}\,x^0x^3 - 2x^1x^2 + (\alpha_1 + \varrho_1)\,x^1x^3 + (\alpha_2 + \varrho_2)\,x^2x^3 + \alpha_3(x^3)^2 = 0 \tag{19}$$

où ϱ_1, ϱ_2, α_1, α_2, α_3, λ_1 sont déterminés par les équations (11), (10), (17) et (16).

En échangeant les asymptotiques $\omega^1 = 0$ et $\omega^2 = 0$ j'obtiens pareillement au cas précédent une homographie déterminée géométriquement sans ambiguïté

$$
\begin{aligned}
(20) \qquad K'A_0 &= E^3 , \\
K'A_1 &= -(1 + h) E^2 + \varrho_1 E^3 , \\
K'A_2 &= -(1 - h) E^1 + \varrho_2 E^3 , \\
K'A_3 &= \alpha'_3 E^3 + \alpha'_2 E^2 + \alpha'_1 E^1 + \alpha'_0 E^0
\end{aligned}
$$

où ϱ_1, ϱ_2 sont déterminés par les équations (11), (10) et

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad \alpha'_0 &= \frac{1 + h}{1 - h}, \quad \alpha'_1 = \frac{1}{1 - h} (2a^2_{12} - \overline{1 - h} \,.\, \varrho_1) , \\
\alpha'_2 &= \frac{1}{1 - h} (\overline{1 + h} \,.\, a^2_{22} + \overline{a^1_{12} - \lambda'_1 - h_2}) , \\
\alpha'_3 &= \frac{1}{1 - h} (\varrho_{12} - \varrho_1 \,.\, \overline{a^1_{12} + a^3_{32} - \lambda'_1} - \varrho_2 a^2_{12} + \\
&\quad + \overline{1 + h} \,.\, a^2_{32} - a^0_{12}) ,
\end{aligned}
$$

$$
(22) \qquad \lambda'_1 = a^0_{02} + a^3_{32} + \varrho_2 .
$$

Cette corrélation $K' : P_3 \to P_3^*$ engendre une nouvelle quadrique Q'' ayant pour équation

$$
(23) \qquad \frac{2}{1 - h} x^0 x^3 - 2x^1 x^2 + (\alpha'_1 + \varrho_1) x^1 x^3 + (\alpha'_2 + \varrho_2) x^2 x^3 + \alpha'_3 (x^3)^2 = 0 .
$$

5. D'après le théorème de M. Čech, dans le cas d'une surface *dans l'espace projectif les quadriques Q', Q'' coïncident avec sa quadrique de Lie. Dans le cas général, Q' et Q'' coïncident si et seulement si les coefficients des équations* (19) *et* (23) *sont identiques, ce qui donne*

$$
\begin{aligned}
(24) \qquad & h = 0 , \quad 2a^2_{12} + o_1 = 0 , \quad 2a^1_{21} + o_2 = 0 , \\
& \varrho_{21} + \tfrac{1}{2} o_1 a^1_{21} + a^1_{31} - a^0_{21} = \varrho_{12} + \tfrac{1}{2} o_2 a^2_{12} + a^2_{32} - a^0_{12} .
\end{aligned}
$$

En nous servant du repère de M. S. P. Finikoff pour une surface dans l'espace projectif,[1]) de formes ω_i^j données par le tableau $\left(R = \dfrac{\gamma_u}{2\gamma}, S = \dfrac{\beta_v}{2\beta}\right)$

(25)

$R\,du + S\,dv$	du	dv	0
$B\,du + l\,dv$	$-R\,du + S\,dv$	$\beta\,du$	dv
$K\,du + A\,dv$	$\gamma\,dv$	$R\,du - S\,dv$	du
$A\beta\,du + B\gamma\,dv$	$K\,du + A\,dv$	$B\,du + l\,dv$	$-R\,du - S\,dv$

[1]) Voir p. ex. [1], p. 376, où il faut toutefois corriger le second signe dans l'expression pour ω_3^3.

nous trouvons facilement

$$o_\alpha = \varrho_\alpha = \varrho_{\alpha\beta} = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \, , \quad \alpha_0 = 1 \, , \quad a_{12}^2 = a_{21}^1 = 0 \, ,$$

les équations (24) sont vérifiées et la quadrique, coïncidant avec (19) et (20), est donnée par l'équation

$$x^0x^3 - x^1x^2 = 0 \, . \tag{26}$$

Comme (26) est l'équation de la quadrique de Lie, le théorème de M. Čech est aussi démontré une fois de plus.

Passons cependant au cas général où les quadriques Q', Q'' ne coïncident pas. Dans le faisceau de quadriques

$$Q \equiv \mu' Q' + \mu'' Q'' = 0 \tag{27}$$

il y a une seule quadrique singulière une partie de laquelle est le plan tangent à la surface, c'est la quadrique

$$\begin{aligned} (28) \qquad & Q^s \equiv Q' - Q'' = \\ & = \left(\frac{4h}{h^2 - 1} \, x^0 + \overline{\alpha_1 - \alpha_1'} \, . \, x^1 + \overline{\alpha_2 - \alpha_2'} \, . \, x^2 + \overline{\alpha_3 - \alpha_3'} \, . \, x^3 \right) x^3 = 0 \, . \end{aligned}$$

J'appelle *quadrique de Lie* Q_i *d'indice* $i = \mu' : \mu''$ la quadrique (27), son indice sera alors égal au birapport des quadriques Q', Q'', Q^s, Q, pris avec le signe contraire, il a donc une signification géométrique. En échangeant les quadriques Q' et Q'' il faut remplacer l'indice par sa valeur réciproque.

6. Dans le travail [2] on a défini la quadrique da Lie d'une hypersurface plongée dans un espace N-dimensionnel à connexion projective de la façon suivante: Si les équations fondamentales du repère mobile sont

$$\begin{gathered} \mathrm{d}A_K = \omega_K^L A_L \, , \quad \mathrm{d}\omega_K^I = [\omega_K^L \omega_L^I] + R_{K\hat{P}\hat{Q}}^I \, [\omega_0^{\hat{P}} \omega_0^{\hat{Q}}] \\ (J, K, L = 0, \ldots, N; \ \hat{P}, \hat{Q} = 1, \ldots, N) \end{gathered} \tag{29}$$

et que l'équation de l'hypersurface soit

$$\omega^N = 0 \tag{30}$$

alors les prolongements successifs donnent les expressions Λ_{ij}, Λ_{ikj} ($i, j, \ldots = 1, \ldots, N - 1$) à l'aide des équations

$$\omega_i^N = \Lambda_{ij}\omega^j \, , \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}\omega_j^k - \Lambda_{kj}\omega_i^k + \Lambda_{ij}(\omega_N^N + \omega_0^0) = \Lambda_{ijk}\omega^k \, . \tag{32}$$

Formons ensuite les expressions

$$\begin{gathered} a_{ik} = \tfrac{1}{2}(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) \, , \quad a^{ij}a_{jk} = \delta_k^i \, , \quad M_{ijk} = \tfrac{1}{2}(\Lambda_{ijk} + \Lambda_{jik}) \, , \\ \tilde{\Lambda}_{ijk} = \tfrac{1}{3}(M_{jik} + M_{ikj} + M_{kji}) \, , \quad b_k = a^{ij}\tilde{\Lambda}_{ijk} \, , \quad \tilde{b}_k = a^{ij}M_{kij} \, , \\ l_{ij}\omega^j = \mathrm{d}\tilde{b}_i - \tilde{b}_k\omega_i^k + b_i\omega_0^0 - (N + 1)(a_{ik}\omega_N^k - \omega_i^0) \, , \\ l = \frac{1}{N - 1} \, a^{ij} \left(l_{ij} - \frac{1}{N + 1} \, \tilde{b}_i \tilde{b}_j \right) . \end{gathered} \tag{33}$$

L'hyperquadrique de Lie aura alors l'équation

$$Q^\lambda \equiv a_{ij} x^i x^j + \frac{2}{N+1} \tilde{b}_i x^i x^N - 2x^0 x^N + \frac{1}{N+1} l (x^N)^2 = 0 \,. \tag{34}$$

Ecrivons certaines des expressions (33) pour la surface π donnée par les équations (1):

$$\begin{gathered} A_{11} = 0 \,, \quad A_{12} = 1 - h \,, \quad A_{21} = 1 + h \,, \quad A_{22} = 0 \,; \\ a_{11} = 0 \,, \quad a_{12} = a_{21} = 1 \,, \quad a_{22} = 0 \,; \\ a^{11} = 0 \,, \quad a^{12} = a^{21} = 1 \,, \quad a^{22} = 0 \,; \\ A_{111} = -2a_{11}^2 \,, \quad A_{112} = -2a_{12}^2 \,, \quad A_{121} = (1-h)\, o_1 - h_1 \,, \\ A_{122} = (1-h)\, o_2 - h_2 \,, \quad A_{211} = (1+h)\, o_1 + h_1 \,, \\ A_{212} = (1+h)\, o_2 + h_2 \,, \quad A_{221} = -2a_{21}^1 \,, \quad A_{222} = -2a_{22}^1 \,; \\ M_{111} = -2a_{11}^2 \,, \quad M_{112} = -2a_{12}^2 \,, \quad M_{221} = -2a_{21}^1 \,, \quad M_{222} = -2a_{22}^1 \,, \\ M_{121} = M_{211} = o_1 \,, \quad M_{122} = M_{212} = o_2 \,; \\ \tilde{b}_1 = o_1 - 2a_{12}^2 \,, \quad \tilde{b}_2 = o_2 - 2a_{21}^1 \,. \end{gathered} \tag{35}$$

La quadrique (34) a donc l'équation

$$\begin{aligned} Q^\lambda \equiv 4x^0x^3 - 4x^1x^2 + (2a_{12}^2 - o_1)\, x^1x^3 + (2a_{21}^1 - o_2)\, x^2x^3 - \\ - \tfrac{1}{2} l (x^3)^2 = 0 \,. \end{aligned} \tag{36}$$

Nous allons éclaircir le rapport existant entre la quadrique (36) de M. Laptieff et le faisceau de quadriques (27). On voit aisément que dans le faisceau (27) il existe une seule quadrique

$$Q \equiv (1+h)\, Q' + (1-h)\, Q'' = 0 \tag{37}$$

jouissant de la propriété que dans le faisceau engendré par les quadriques Q et Q^λ il y a une quadrique composée du plan tangent et d'un autre plan passant par le point A_0 de la surface π; son indice $i = (1+h)(1-h)^{-1}$ est invariant. L'équation de la quadrique (37) est

$$\begin{gathered} 4x^0x^3 - 4x^1x^2 + \left(2a_{12}^2 - o_1 + \frac{h_1}{1+h}\right) x^1x^3 + \left(2a_{21}^1 - o_2 - \frac{h_2}{1-h}\right) x^2x^3 + \\ + \left(\varrho_{12} + \varrho_{21} - \frac{1}{2}\, o_1 o_2 - \frac{h_1 h_2}{2(1-h^2)} - \varrho_1 a_{21}^1 - \varrho_2 a_{12}^2 + \right. \\ \left. + \overline{1-h} \,.\, a_{31}^1 + \overline{1+h} \,.\, a_{32}^2 - a_{21}^0 - a_{12}^0 \right) (x^3)^2 = 0 \end{gathered} \tag{38}$$

où ϱ_1, ϱ_2 sont donnés par les équations (11), (10). Or, les quadriques Q et Q^λ ne coïncident pas généralement même si la condition $h_1 = h_2 = 0$, c'est-à-dire $h = \text{const}$, est vérifiée. Le calcul de l'équation (38) nécessite la connaissance des fonctions ϱ_{12}, ϱ_{21}, c'est-à-dire des dérivées partielles des fonctions h_α, o_α, par contre en calculant la quadrique (36) on a besoin, pour déterminer la fonction l, de connaître l_{ij}, c'est-à-dire les dérivées partielles des fonctions o_α, a^1_{21}, a^2_{12}. L'égalité des coefficients auprès de $(x^3)^2$ dans (36) et (38) conduirait à une équation aux dérivées partielles des fonctions h_α, o_α, a^1_{21}, a^2_{12}, or cette condition n'est pas vérifiée en général, c'est évident. Nous obtenons donc seulement: *La condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau de quadriques de Darboux, défini par M. Laptieff, coïncide avec la faisceau de quadriques déterminé par la quadrique Q et le plan tangent compté doublement, est que la torsion de la surface soit constante.*

Bibliographie

[1] *Г. Ф. Лаптев*: Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. Мат. Общ., *2*, 1953, 275—382.

[2] *Г. Ф. Лаптев*: Гиперповерхность в пространстве проективной связности. ДАН СССР 1958, *721*, 41—44.

[3] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Чех. мат. ж., *10* (*85*), 1960, 523—550.

[4] *A. Švec*: L'élément linéaire projective d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective. Чех. мат. ж., *8* (*83*), 1958, 285—291.

Резюме

КВАДРИКИ ЛИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Э. Чех определил в своей до сих пор неопубликованной работе квадрику Ли для поверхности в проективном пространстве следующим образом: Пусть в S_3, соотв. S'_3 даны две поверхности $x = x(u, v)$, $x' = x'(u, v)$ в асимптотическом соответствии C; u, v — асимптотические параметры. Тогда для каждой пары соответствующих друг другу точек существует одна единственная касательная коллинеация соответствия C, K: $S_3 \to S'_3$ со следующими свойствами: (1) асимптотическая касательная $[x', x'_v]$ является множеством всех точек, при проектировании из которых асимптотические $v = \text{const}$, проходящие через точку x' обеих поверхностей (x'), (Kx), имеют аналитическое касание второго порядка; свойство остается в силе после замены u, v; (2) пусть $y(t, u) = tx(u, v_0) + x_v(u, v_0)$, $z(t', u) = t'x'(u,v_0) + x'_v(u, v_0)$ — две соответствующие друг другу линейчатые поверхности, образованные понятным способом из поверхностей (x), (x'), и пусть C' — соответствие между ними, сопоставляющее точке $y(\bar{t}, u)$ точку $z(t', u) = K_y(t, u)$; теперь мы предполагаем, что K есть касательная коллинеация

соответствия C' одновременно для всех точек соответствующих друг другу прямых; свойство остается в силе после замены u, v. Если теперь поверхность (x') является дуализацией поверхности (x), то определенная выше коллинеация будет поляритетом относительно квадрики Ли.

В работе это характерное свойство используется в качестве определения квадрик Ли для поверхности в пространстве с проективной связностью. Исследуется связь между введенными таким образом квадриками и квадрикой Лаптева-Ли.