Ivo Babuška

Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнеий в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости, I

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 1, 76–105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100444`

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБЛАСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОСНОВНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕЙИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ГЛАВНЫМ ОБРАЗОМ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ, I

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага

(Поступило в редакцию 3/X 1959 г.)

В работе исследуется зависимость решений самосопряженного положительно-определенного уравнения от малых изменений области определения. В первой части подробно изучается понятие множества нулевой емкости и формулируются основные задачи математической физики для эллиптического уравнения общего вида.

I. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений с частными производными, в особенности теория уравнений эллиптического типа второго порядка, разработана весьма подробно. Глубоко изучены основные задачи теории уравнений с частными производными и их свойства.

Несравненно менее уже изучены уравнения высших порядков и сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений. Притом к этим уравнениям приводит ряд основных физических и технических проблем.

Приведем здесь некоторые основные задачи теории упругости. Уравнения Ламе (ср., напр., [1]) образуют сильно эллиптическую систему, уравнение плиты (уравнение Софии Жермен) является бигармоническим уравнением (ср., напр., [1] стр. 347), основные плоские задачи теории упругости приводят к бигармонической проблеме (ср., напр., [2]) и т. п.

В настоящей работе мы уделим особое внимание этим уравнением, к которым приводят основные задачи теории упругости.

В теории уравнений второго порядка хорошо известно, что разумеется основными задачами, задачей Дирихле и задачей Неймана; в настоящей работе мы покажем, что можно считать естественным перенесением этих задач на уравнения высших порядков, и выясним их физико-механическое значение. Далее мы будем изучать некоторые основные свойства решений этих проблем.

В связи с основными проблемами теории дифференциальных уравнений с частными производными рассматривается т. наз. условие корректности (т. е. правильности постановки) задачи, которое приводится в основных учебниках. Это условие охватывает следующие требуемые свойства задачи (ср. напр. [3]):

1. разрешимость, т. е. условие существования решения,
2. единственность, т. е. условие однозначности,
3. непрерывная зависимость решениа от краевых условий.

Необходимость выполнения этих условий следует из соображений физического характера. Действительно, для точного соответствия с реальной физической проблемой задача должна иметь и основные свойства этой физической проблемы, а указанными тремя свойствами обладает в сущности каждая такая проблема. Впервые на эти обстоятельства обратил внимание *Ж. Адамар*.

Приведем здесь еще обоснование третьего свойства, свойства непрерывной зависимости от краевых условий, в том виде, как оно приводится в книге *Ф. Трикоми* [3]:

„Фундаментальное значение третьего требования, то есть требования непрерывной зависимости решения от краевых условий, было выяснено Адамаром. Он замечает, что почти во всех физических проблемах краевые условия даны эмпирически, т. е. лишь приближенно (иногда даже очень приближенно). Поэтому не имеет практического значения такое решение, для которого нельзя определить (хотя бы и чисто теоретически) оценку ошибки, возникшей вследствие неточности определения краевых условий“.

С физической точки зрения это рассуждение, конечно, правильно. В то же время, однако, это рассуждение ясно указывает на недостатки формулировки корректности задачи. Действительно, теперь ясно, что понятие корректности нужно дополнить дальнейшими двумя требованиями:

4. непрерывная зависимость решения от малых изменений коэффициентов уравнения;
5. непрерывная зависимость решения от малых изменений области определения.

В настоящей работе главное внимание будет обращено на пятое условие корректности в приведенном выше смысле.

В последующем изложении мы покажем, что существуют задачи, для которых большинство областей определения, собственно говоря, все, встречающиеся на практике, устойчивы в том смысле, что малое изменение области определения вызывает лишь малое изменение решения. Иногда будут устойчивыми даже все области. В виде примера приведем здесь первую проблему теории упругости в плоскости, т. е. проблему с предписанными смещениями на границе (см. п. VII). Будет показано, что все конечносвязные области типа Каратеодори в плоскости устойчивы, т. е. малое изменение области определения всегда приведет к малому изменению решения. Однако в пространстве уже существует область со связной границей и конечной поверхностью, которая не будет устойчивой, т. е. речь идет о такой области, когда малое изменение области определения вызывает большое изменение решения.

Далее мы покажем, что существуют и задачи, причем и задачи большого практического значения, для которых, собственно говоря, каждая область неустойчива. Так, напр., в гл. VIII настоящей работы будет разобрана проблема шарнирно опертой плиты. Эта проблема, которая с математической точки зрения приводит к некоторой задаче для бигармонического уравнения, является одной из основных проблем строительной механики и приводится в каждом основном учебнике сопротивления материалов как математического, так и технического характера. Во всех учебниках приводится, напр., проблема круговой плиты с нагрузкой, обладающей вращательной симметрией. Если теперь эту круговую плиту аппроксимировать плитой формы вписанного правильного многоугольника с постоянно возрастающим числом сторон, то мы покажем, что решения для этих многоугольников не стремятся к решению для круговой плиты.

При этом нужно принять во внимание, что на практике, напр., бетонной плите всегда придают форму многоугольника. Это обусловлено характером опалубки – внешняя окружность аппроксимируется многоугольником, сторона которого равна ширине щита опалубки. Итак, можно сказать, что мы имеем дело с неустойчивой задачей, которая поэтому с известной точки зрения не имеет никакого значения. Практическим значением и анализом этой задачи, которая является самой важной из основных задач теории плит и исследованию которой в разных видах было посвящено несколько сот работ, мы займемся в главе VIII.

Кроме того, в работе расширяются и некоторые понятия, известные из теории уравнений второго порядка, на уравнения высших порядков. Приведем, напр., понятие емкости или множеств нулевой емкости (ср. гл. III и IV) и их свойства. В главе V решаются некоторые проблемы устойчивости так незываемой первой проблемы, в главе VI исследуется связь между понятием устойчивости и проблемами теории аппроксимаций. В главе VII решаются некоторые вопросы о связи устойчивости области и единственности решения для полигармонического уравнения и первая проблема теории упругости. В главе VIII изучаются свойства т. наз. второй проблемы для бигармонического уравнения, а в главе IX решаются вопросы, связанные с проблемой Неймана для полигармонического уравнения.

Далее в работе исследуется связь между понятиями устойчивости и некоторыми проблемами плотности гладких функций в функциональных пространствах эти вопросы имеют основное теоретическое значение и важны при изучении т. наз. W_p^l-пространств.

В работе намечен ряд открытых проблем, стоящих в прямой связи с разрешенными проблемами. Работа решает сравнительно небольшую часть проблематики, логически вытекающей из настоящей работы.

II. ОБ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

1. Уравнения второго порядка. В этом параграфе мы будем заниматься изучением основных задач для уравнения Лапласса. При этом мы будем иметь в виду лишь ограниченные области специального вида. Для простоты мы ограничимся трехмерными областями с достаточно гладкой границей.

Мы будем говорить, что граница $\dot{\Omega}$ области Ω достаточно гладка, если для каждой точки m существует открытая сфера K_m с центром в m и прямоугольная (местная) система координат ξ, η, ζ, $m = (0, 0, 0)$ так, что границу $\dot{\Omega}$ в K_m можно в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ выразить локально при помощи функции $\zeta = F(\xi, \eta)$, и существуют постоянные $0 < A < \infty$, $0 < \lambda \leqq 1$, не зависящие от $m \in \dot{\Omega}$ так, что

$$\left|\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{m_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{m_1}\right| \leqq A r_{1,2}^{\lambda}\,, \quad \left|\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{m_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{m_2}\right| \leqq A r_{1,2}^{\lambda}\,.$$

Притом мы через $\left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{m_1}$ обозначили значение соответствующей производной в точке $m_1 \in \dot{\Omega}$, а $r_{1,2}$ есть евклидово расстояние между точками m_1 и m_2. На протяжении всей этой главы мы предполагаем, что области обладают достаточно гладкой границей в указанном смысле.

Далее, мы будем обозначать через K открытую единичную сферу, и будет $\overline{\Omega} \subset K$. Пусть дана функция f, определенная на K с непрерывными вторими производными. Обозначим через $W(\Omega, f, \mathbf{x})$ решение[1]) задачи Дирихле на Ω для уравнения Лапласа и для краевого условия, определенного при помощи функции f, а через $P(\Omega, f, \mathbf{x})$ обозначим решение задачи Пуассона на Ω для уравнения Лапласа и для правой части, определенной при помощи функции f, и с однородными нулевыми краевыми условиями.Если функция f такова, что

$$\textstyle\int\int\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

то через $N(\Omega, f, \mathbf{x})$ обозначим решение неоднородной проблемы Неймана с правой частью, выраженной функцией f, и с однородными, т. е. нулевыми краевыми условиями.[2]) Известно, что справедливы следующие теоремы:

Теорема 2,1. *Существиет в точности одна функция $W(\Omega, f, \mathbf{x})$ и в точности одна функция $P(\Omega, f, \mathbf{x})$. Притом функции $W(\Omega, f, \mathbf{x})$ и $P(\Omega, f, \mathbf{x})$ обладают непрерывными производными первого порядка на $\overline{\Omega}$.*

---

[1]) Мы имеем в виду классическое решение, допускающее непрерывное продолжение на границе. Положим $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

[2]) Итак, функция $N(\Omega, f, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta N(\Omega, f, \mathbf{x}) = f, \ \frac{\partial N}{\partial n}(\Omega, f, \mathbf{y}) = 0 \ \text{для} \ \mathbf{y} \in \dot{\Omega},$$

причем n — внешняя нормаль.

Теорема 2,2. *С точностью до аддитивной постоянной существует одна и только одна функция $N(\Omega, f, \mathbf{x})$. Притом функция $N(\Omega, f, \mathbf{x})$ обладает непрерывными производными первого порядка на $\overline{\Omega}$.*

Утверждения теорем следует, напр., из [4] (IV § 18, III § 18, II § 13).

Обозначим через $M_1^1(\Omega)$ модуль всех функций таких, что

1. они непрерывны со своими первыми производными на $\overline{\Omega}$,
2. они равны нулю на $\dot{\Omega}$.

Далее, обозначим через $M_0^1(\Omega)$ модуль всех функций, определенных на $\overline{\Omega}$ таких, что они непрерывны со своими первыми производными на $\overline{\Omega}$. Очевидно, будет $M_0^1(\Omega) \supset M_1^1(\Omega)$.

На $M_i^1(\Omega)$, $i = 0, 1$ введем скалярное произведение следующим предписанием. Пусть $u \in M_i^1(\Omega)$, $v \in M_i^1(\Omega)$, $i = 0, 1$; тогда положим

$$[u, v] = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Далее обозначим $\|u\|^2 = [u, u]$. Мы будем считать $M_i^1(\Omega)$, $i = 0, 1$ неполным пространством Гильберта с указанными скалярным произведением и нормой. Притом нужно понимать пространство $M_0^1(\Omega)$ как факторпространство,[3]) которое не различает функции, отличающиеся на постоянную. В этом факторпространстве уже выполняются, однако, все аксиомы скалярного произведения.

Обозначим теперь через ${}^0W_2^1$, соотв. ${}^1W_2^1$, пополнение модуля M_0^1, соотв. M_1^1, при введенной выше норме и расширим введенное скалярное произведение на ${}^0W_2^1$ соотв. ${}^1W_2^1$. Можно показать, что пространства ${}^0W_2^1$ и ${}^1W_2^1$ содержат лишь интегрируемые с квадратом функции (см. [5], § 8, § 9, § 10; [6], § 22).

Теперь имеет место следующая теорема:

Теорема 2,3. *Пусть f — функция, определенная на K, с непрерывными вторыми производными. Тогда существует в точности одна функция $w \in {}^1W_2^1$, которая минимализирует функционал*

$$(2,1) \qquad [u, u] - 2(f, u)$$

на ${}^1W_2^1$ и $w(\mathbf{x}) = P(\Omega, f, \mathbf{x})$. Притом мы положили

$$(f, u) = \iiint_\Omega uf \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Доказательство. Ввиду того, что f обладает двумя непрерывными производными на $\overline{\Omega}$ и каждая $u \in {}^1W_2^1$ интегрируема с квадратом, ясно, что функционал (f, u) имеет смысл. Так как Ω — область типа Соболева (ср. [5], § 9; [6], § 22), то квадратичный функционал ограничен снизу. Следовательно, су-

[3]) В таких случаях мы будем в дальнейшем иметь в виду представителя класса факторпространства.

ществует в точности одна $w \in {}^1W_2^1$, которая минимальизирует функционал (2,1) (ср., напр., [6], § 7), и $[w, u] = (f, u)$ для любого $u \in {}^1W_2^1$. Из теоремы 2,1 следует, что $P(\Omega, f, \mathbf{x}) \in {}^1W_2^1$, и нетрудно обнаружить, что $(f, u) = [P(\Omega, f, \mathbf{x}), u]$ для любого $u \in M_1^1(\Omega)$, а, значит, и для $u \in {}^1W_2^1$. Отсюда уже непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 2,4. *Пусть f — функция, определенная на K с непрерывиыми вторыми производным и такая, что $\iiint_\Omega f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$. Тогда существует с точностью до аддитивной постоянной одна единственная функция $w_0 \in {}^0W_2^1$, которая минимализирует на ${}^0W_2^1$ квадратичный функционал*

$$[u, u] - 2(f, u)\,, \tag{2,2}$$

и $w_0(\mathbf{x}) = N(\Omega, f, \mathbf{x}) + \text{konst}$. Притом мы опять положили

$$(f, u) = \iiint_\Omega uf \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2,3.

Замечание. Для того, чтобы квадратичный функционал (2,1) или (2,2) был снизу ограниченным, очевидно, достаточно, чтобы f была интегрируемой с квадратом на Ω.

Из теорем 2,3 и 2,4 вытекает возножность ввести определение проблемы Пуассона, соотв. проблемы Неймана при помощи функционала (2,1), соотв. (2,2). Кроме того, из этих теорем следует, напр., что поскольку существует классическое решение для непрерывной на Ω функции f, то оно равно обобщенному решению. Притом обобщенным решением мы называем функцию w, которая минимализирует функционал (2,1), соотв. (2,2).

Это позволяет дать определение проблемы Пуассона и проблемы Неймана для уравнения Лапласа. Задачу Пуассона мы будем называть проблемой I, а задачу Неймана — проблемой II для уравнения Лапласа. Дадим теперь следующее определение:

Определение 2,1. *Пусть дана область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K$ с достаточно гладкой границей и функция f, интегрируемая с квадратом на K. Тогда решением проблемы* I *для уравнения Лапласа и для функции f мы назовем функцию $w \in {}^1W_2^1$, которая минимализирует на ${}^1W_2^1$, квадратичный функционал*

$$[u, u] - 2(f, u)\,. \tag{2,3}$$

Пусть, далее, f такова, что $\iiint_\Omega f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$. Тогда решением проблемы II *для уравнения Лапласа и для функции f мы назовем функцию $w \in {}^0W_2^1$, которая минимализирует квадратичный функционал* (2,3) *на ${}^0W_2^1$.*

Замечание 1. При указанных условиях всегда существуют решения проблем I и II. Можно показать, что в обоих случаях имеет место равенство $\Delta w = f$, если только производные понимать в смысле обобщенных функций. Далее, в случае проблемы I на $\dot{\Omega}$ будет $w = 0$, в случае же проблемы II на $\dot{\Omega}$ будет

$\dfrac{\partial w}{\partial n} = 0$. Оба продолжения на границу нужно, конечно, понимать в обобщенном смысле.

Замечание 2. Для формулировки проблемы I, соотв. II, характерно пространство ${}^1W_2^1$, соотв. ${}^0W_2^1$. В случае проблемы I пространство ${}^1W_2^1$ является замыканием (по указанной норме скалярного произведения) функций, равных тождественно нулю в окрестности границы $\overline{\Omega}$, или функций, равных нулю на границе. В проблеме II, лучше сказать, в „последней" проблеме или в проблеме Неймана, речь идет о минимализации квадратичного функционала на пространстве, возникающем путем замыкания линейного пространства функций, на которые мы не накладываем вообще никаких краевых условий.

Замечание 3. С точки зрения механики решение проблемы Пуассона, соотв. Неймана можно истолковать (в двумерном случае) как изгибание нагруженной мембраны. В первом случае, т. е. в проблеме I, мембрана закреплена по краям, во втором случае – края мембраны свободны. С энергетической точки зрения для обоих случаев характерно то обстоятельство, что работа внешних сил на границе равна нулю.

Эти условия приводят нас к естественному перенесению основных провлем на уравнения высших порядков и на эллиптические системы при соответствующей формулировке проблем для этих уравнений.

2. Уравнения высших порядков. В этом параграфе мы будем снова предполагать, что речь идет об областях в E_3,[4]) об областях с достаточно гладкой границе. Это предположение не является, однако, существенным, и его можно в значительной мере ослабить.

Обозначим через $M_m^n(\Omega)$, $n = 1, 2. \ldots, m = 1, 2, \ldots, n$ модуль всех функций со следующими свойствами:

1. они непрерывны со всеми производными вплоть до порядка n включительно на $\overline{\Omega}$.

2. они равны нулю на $\dot{\Omega}$ вместе со всеми производными вплоть до порядка $m - 1$.

Пусть, далее, $M_0^n(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ – модуль всех функций, непрерывных со всеми производными вплоть до порядка n включительно на $\overline{\Omega}$.

Очевидно, что будет $M_p^n \supset M_q^n$ для $p \leqq q$. Введем на M_m^n скалярное произведение следующим предписанием: Пусть $u \in M_m^n(\Omega)$ и $v \in M_m^n(\Omega)$; тогда

$$[u, v]_n = \iiint_\Omega \left(\sum_{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = n} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{\alpha_1}\, \partial y^{\alpha_2}\, \partial z^{\alpha_3}} \; \frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha_1}\, \partial y^{\alpha_2}\, \partial z^{\alpha_3}} \right)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Нормы введем обычным образом, т. е. $\|u\|_n^2 = [u, u]_n$. В случае, когда $m = 0$,

[4]) Рассуждения проводятся для простоты в E_3. Яцно, как дело будет выглядеть в E_n. В главе IX урверждения уже будут формулироваться для общего случая E_n.

нужно понимать $M_0^m(\Omega)$ как факторпространство модулярных многочленов степени $n-1$. Модуль $M_m^n(\Omega)$ нужно понимать как факторпространство и в некоторых случаях, когда $n > 2$ и $m \neq n$, $m \neq 0$, если область Ω ограничена некоторыми специальными алгебраическими поверхностями. Это имеет место, напр., для $m = 1$, $n = 3$, если Ω — единичная сфера, ибо, очевидно, функция $u = (1 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2) \in M_1^3$ и при данной норме будет $\|u\|_3 = 0$. Обозначим теперь через ${}^mW_2^n$ пополнение модуля $M_m^n(\Omega)$ при введенной норме. Расширим, далее, и скалярное произведение на все ${}^mW_2^n$. Так как Ω есть область типа Соболева, пространство ${}^mW_2^n$ содержит только функции, интегрируемые с квадратом (см., напр., [6], § 22).

Определение 2,2. *Решением p-й проблемй ($p = 1, 2, \ldots, n + 1$) для n-гармонического уравнения ($n = 1, 2, \ldots$) и для функции f (интегрируемой с квадратом на Ω) мы назовем функцию $w \in {}^{n+1-p}W_2^n$, которая на ${}^{n+1-p}W_2^n$ минимализирует функционал*

$$[u, u]_n - 2(f, u)\,. \tag{2,4}$$

При этом мы обозначили $(f, u) = \iiint_\Omega fu \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$. В случае $p = n + 1$ предположим еще, что

$$\iiint_\Omega f x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0 \quad \textit{для всех} \quad \alpha_i \geqq 0 \;\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \leqq n - 1\,.$$

Аналогичное предположение мы делаем и в специальных случаях алгебраических областей, о которых мы упоминали выше.

При указанных условиях существует минимум функционала (2,4).

Первая проблема изучается в литературе в несколько иной, но равносильной формулировке. Обозначим через ${}^*M_m^n$ модуль всех функций с непрерывными производными порядка n на $\overline{\Omega}$, тождественно равных нулю в некоторой окрестности границы. Очевидно, ${}^*M_n^n \subset M_n^n \subset {}^nW_2^n$. В главе VI будет показано, что ${}^*\overline{M}_n^n = \overline{M}_n^n = {}^nW_2^n$. Итак, вместо основного модуля M_n^n можно рассматривать модуль ${}^*M_n^n$. Теперь уже ясно, что первая задача соответствует задаче, исследованной, напр., в [6], § 29.

Переносом результатов и методов из [5], § 14, нетрудно убедиться, что решение в смысле определения 2,2 удовлетворяет уравнению $\Delta^n w = f$ с однородными условиями, конечно, лишь специального вида.

В случае первой проблемы краевые условия таковы, что функция w и все ее производные вплоть до порядка $n - 1$ равны на границе нулю. Выполнение краевых условий нужно понимать в обобщенном смысле Соболева (см., напр., [5], § 12).

В случае $n = 1$ первая и вторая проблемы в смысле определения 2,2 являются обобщением классической проблемы, проблемы Дирихле, соотв. Неймана, см. п. 1 настоящей главы. В общем случае можно считать первую проблему проблемой Дирихле, а $(n + 1)$-ю — проблемой Неймана.

Замечание. n-гармоническому уравнению мы сопоставили $n+1$ проблем, которые определяются, собственно говоря, пространствами $M_m^n(\Omega)$. При этом имеет, однако, смысл говорить о большем количестве основных проблем. Например, для $n = 2$ можно дальнейшую проблему определить при помощи пространства M_4^2, которое содержит все функции, имеющие на $\overline{\Omega}$ непрерывные вторые производные и имеющие, кроме того, нулевые нормальные производные на $\dot{\Omega}$. Таким образом мы приходим к новой проблеме, отличной от всех задач в смысле определения 2,2. Иными способами можно было бы сформулировать и дальнейшие проблемы. Исходя из физических соображений, однако, целесообразно считать основными проблемами проблемы в смысле определения 2,2.

Теорема 2,5. *Пусть $\Omega \subset E_3$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей. Пусть, далее, множество*

$$P = \underset{z,y,x}{\mathrm{E}} [x, y, z; |x| < 1, |y| < 1, z = 0] \subset \dot{\Omega} .$$

Предположим далее, что дана функция f, определенная на Ω и интегрируемая с квадратом, и пусть $w_i(x, y, z)$ — решение i-й основной проблемы для бигармонического уравнения в смысле определения 2,2. Пусть в случае третьей проблемы выполняются, кроме того, и соотношения

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_\Omega fx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega fy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_\Omega fz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 . \end{aligned}$$

Предположим далее, что все производные функций w_i вплоть до четвертого порядка допускают продолжение на P. Тогда на P имеет место:

для первой задачи $w_1 = \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = 0$,

для второй задачи $w_2 = \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0$,

для третьей задачи $\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial z^3} = \dfrac{\partial^3 w_2}{\partial z^3} + 2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}\right) = 0$.

Доказательство. По определению функция w_m минимализирует функционал $[u, u]_2 - 2(f, u)$ на ${}^mW_2^2$. Следовательно, для каждой функции $v \in {}^mW_2^2$ имеет место $[w_m, v]_2 = (f, v)$. Обозначим теперь ${}^m_*W_2^2 = {}_*\overline{M}_m^2 \subset M_m^2(\Omega)$, где ${}_*M_m^2$ — множество всех функций из M_m^2, равных в окрестности $\dot{\Omega} - P$ тождественно нулю. Итак, для $v \in {}_*M_m^2$ будет

$$\begin{aligned} [w_m, v] = \iiint_\Omega \Big[&\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \\ &+ 2\frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + 2\frac{\partial^2 w_m}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\Big] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega fv \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z . \end{aligned}$$

После двойного интегрирования по частям и после несложных преобразований мы получим ($v \in {}_*M^2_m$)

$$[w_m, v] = \iiint_\Omega \Delta\Delta w_m v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \mp \iint_P \left(\frac{\partial^3 w_m}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \, \partial z} + 2 \frac{\partial^3 w_m}{\partial y^2 \, \partial z} \right) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \pm$$

$$\pm \iint_P \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} \frac{\partial v}{\partial z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iiint_\Omega f v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Но так, как $\Delta\Delta w_m = f$, получим

$$(2,5) \quad - \iint_P \left(\frac{\partial^3 w_m}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \, \partial z} + 2 \frac{\partial^3 w_n}{\partial y^2 \, \partial z} \right) v \, \partial x \, \mathrm{d}y + \iint_P \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} \frac{\partial v}{\partial z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \, .$$

По предположению имеем в первой проблеме

$$v = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \, ,$$

и на P будет

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad [w_1 \in {}^0W^2_2] \, .$$

В случае второй проблемы будет $v = 0$ на P, так как $v \in {}^1W^2_2$. Однако, функция $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ на P произвольна. Следовательно, из (2,5) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0 \, .$$

Но так как одновременно $w_3 \in {}^1W^2_2$, то $w_2 = 0$ на P. Итак, функция w_2 удовлетворяет на P следующим краевым условиям:

$$w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0 \, .$$

В случае третьей проблемы функции v и $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ произвольны на P. Поэтому решение w_3 третьей проблемы будет удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^3 w_3}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2 \, \partial z} + 2 \frac{\partial^3 w_3}{\partial y^2 \, \partial z} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0 \, .$$

Этим наше утверждение полностью доказано.

В теореме 2,5 мы показали, каким краевым условиям удовлетворяют основные проблемы I–III для бигармонического уравнения. Подобным же образом можно изучать и краевые условия для уравнений высших порядков. Мы предполагали для простоты, что P есть часть плоскости. Эти условия можно довольно легко выразить и для общего случая, конечно, в несколько более сложном виде, в котором существенным образом фигурирует форма границы. Далее мы предполагали, что решение можно продолжить на границу с нужным числом производных. Дело в том, что в общем случае, когда соответствующие производные не допускают продолжения, выполнение этих условий нужно понимать в обобщенном, т. е. ,напр., в слабом смысле.

Проблему Неймана, т. е. в нашей терминологии третью проблему для бигармонического ураьнения, вводит также *М. И. Вишик* [8]. Ход решения, введенный в настояащей работе, является с физической точки зрения более естественным.

Физической интерпретацией бигармонической проблемы может служить, напр., случай плиты — уравнение Софии Жермен. Норма и скалярное произведение, которые мы ввели, оначают соответственно энергию и работу сил, соответствующих одной поверхнпсти изгиба (упругой поверхности) на путях, соответствующих второй поверхности изгиба. Далее, симметрия скалярного произведения выражает известную теорему Максвелла или Бетти о взаимности смещений, а квадратичный функционал $[u, u]_2 - 2(f, u)$ означает общую энергию, т. е. работу внешних сил, и работу внутренних сил.

Ввиду того, что в выражении для общей энергии не фигурируют криволинейные (контурные) интегралы, предполагается, что работа граничных сил равна нулю. Это может осуществиться в сущности лишь в следующих четырех основных комбинациях:

1. Смещение границы равно нулю и поворот границы равен нулю — плита заделана по краям.

2. Смещение границы равно нулю, поворот может быть, вообще, отличен от нуля, поэтому момент в опоре равен обязательно нулю; имеем дело со свободно опертой плитой.

3. Смещение и поворот могут быть, вообще, отличны от нуля; следовательно, момент и поперечная сила в опоре равны нулю. Речь идет о плите со свободными краями.

4. Смещение не равно, вообще говоря, нулю; в этом случае поперечная сила равна нулю.

Первых три проблемы тождественны с проблемами, которые мы назвали основными. Четвертую проблему мы не включили в число основных вследствие ее значительно меньшего значения для техники и потому, что в настоящее время в теории плит основными проблемами считаются проблемы заделанной плиты, свободно опертой и свободной плиты. При нашей формулировке основные проблемы соответствуют проблемам, которые обычно считаются основными в теории плит. С математической точки зрения заслуживают внимания еще дальнейшие проблемы, напр., комбинация краевых условий u, Δu; u, $\dfrac{\partial \Delta w}{\partial n}$ и т. д. (ср., напр., [9], [10]).

Заметим еще, что к проблеме бигармонического уравнения приводит проблема плиты для общей постоянной Пуассона, отличной от нуля. Квадратичные функционалы, поскольку мы о них говорили в связи с бигармоническим уравнением, соответствуют энергии плиты для постоянной Пуассона, равной нулю. В случае проблемы плиты для отличной от нуля постоянной Пуассона мы снова приходим к функционалу бигармонического уравнения и к квадратичному функционалу, но иного вида. Минимализируя соответствующий функционал, мы получаем вообще иные краевые условия. Выражаясь математически, бигармонический оператор допускает различные разложения, которым соответствуют различные квадратичные функционалы. Минимализация этих функционалов приводит к решению бигармонического уравнения при различных краевых условиях. Для уравнений высших степеней, за исключением первой проблемы, мы имеем, таким образом, дело с проблемами, зависящими от выбора разлоежния оператора.[5]) Итак, в этом смысле нельзя однозначно говорить о n-й задаче для полигармонического уравнения.

Во всей этой работе мы будем, однако, исходить из основного разложения (соответствующего постоянной Пуассона, равной нулю), как было указано.

До сих пор мы занимались только вопросами полигармонических операторов. Ясно, как будет выглядеть определение основных проблем для самосопряженных положительно определенных операторов.

III. О МНОЖЕСТВАХ НУЛЕВОЙ ЕМКОСТИ, I

В настоящей главе мы будем заниматься понятием емкости и докажем некоторые теоремы, которые нам пригодятся в последующем.

Определение 3,1. *Пусть $K_r \subset E_m$, $m \geqq 2$ есть m-мерная открытая сфера*

$$[K_r = E\,[x_1\,, \ldots, x_m\,; \sum_{i=1}^{m} x_i^2 < r^2]]\,.$$

Пусть далее, M — модуль всех функций, определенных на E_m, имеющих все производные и равных вне K_r тождественно нулю. Пусть, далее, на M определен линейный[6]) *симметрический*[7]) *оператор A, отображающий M в пространство L_2 на E_m. Оператор A мы будем называть регулярным оператором порядка $2l$ на K_r, если существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ так, что для любого $u \in M$ имеет место (независимо от u)*

$$C_1 \|u\|^2_{L_2^l} \geqq (Au, u) \geqq C_2 \|u\|^2_{L_2^l}\,,$$

[5]) Физическое истолкование существует лишь для постоянной Пуассона $0 < \delta < \frac{1}{2}$. С математической точки зрения имеет здесь смысл говорить о решениях для значений этой постоянной и из большей области изменения.

[6]) Т. е. однородный и аддитивный.

[7]) Оператор A мы называем симметрическим, если для любого $u \in M$, $v \in M$

$$\int_{E_m} Auv\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = (u, Av) = \int_{E_m} uAv\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m\,.$$

Так как $u, v \in L_2$, $Au \in L_2$, имеет очевидно, смысл говорить о скалярном произведении в указанном смысле. Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться символом $(u, v) = \int_{F_m} uv\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m$.

где мы обозначили

$$\|u\|_{L_2^l}^2 = \int_{E_m} \left[\sum_{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m .$$

Пусть, далее, $H(A)$ — пополнение модуля M при норме $(Au, u) = |\!|u|\!|^2$; расширим скалярное произведение $(Au, v) = [u, v]$ на $H(A)$. Тогда мы будем называть $H(A)$ пространством Гильберта,[8]) *соответствующим оператору A.*[9])

Замечание 1. Приведем пример нормы $\|u\|_{L_2^l}$ для $l = 1$ и $l = 2$

а) $l = 1$, $\|u\|_{L_2^1} = \left\{ \int_{E_m} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \right\}^{\frac{1}{2}}$;

б) $l = 2$, $\|u\|_{L_2^2} = \left\{ \int_{E_m} \left[\sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Замечание 2. Интегрирование по всему E_m формально, так как вне K_r функция u и все ее производные равны нулю.

Замечание 3. В случае, когда A — полигармонический оператор порядка $2l$, имеет место соотношение

$$\|u\|_{L_2^l}^2 = (Au, u) = |\!|u|\!|^2 .$$

Замечание 4. Ввиду того, что вне K_r все функции равны нулю, метрику в L_2^l можно отождествить с метрикой W_2^l пространств Соболева (ср. [5]). Отсюда следует, что $H \subset L_2$.

Определение 3,2. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть, далее, $N \subset K_r$. Обозначим через M^N модуль всех функций из M (ср. определение 3,1), равных тождественно нулю в некоторой ε-окрестности множества N. Замыкание M^N в H мы обозначим символом H^N. Ортогональное дополнение прозтранства H^N по отношению к H мы обозначим через $*H^N$.*

Определение 3,3. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $Q \subset K_r$. Мы будем обозначать $M_Q = M^{Kr-Q}$ и $H_Q = H^{Kr-Q}$.*

Определение 3,4. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $\bar{L} \subset K_r$. Множество L мы назовем множеством нулевой емкости по отношению к A, если $H^L = H$. Систему всех множеств нулевой емкости относительно A обозначим символом $\mathfrak{M}(A)$.*

Замечание 1. В дальнейшем мы увидим, что понятие множества нулевой емкости не зависит от сферы K_r. В случае, когда было бы $\bar{L} \not\subset K_r$, возникли бы некоторые осложнения.

---

[8]) Нетрудно убедиться, что выражение $|\!|u|\!|$ удовлетворяет всем аксиомам норны, а билинейное выражение $[u, v]$ — всем аксиомам скалярного произведения.

[9]) Поскольку не получиться недоразумения, мы будем в последующем изложении писать лишь H вместо $H(A)$.

Замечание 2. Определение 3,4 в сущности (см. далее) касается лишь замкнутых множеств нулевой емкости, но этого нам будет в дальнейшем достаточно.

Замечание 3. Множество из системы $\mathfrak{M}(A)$ мы назвали множеством нулевой емкостьи относительно оператора A. Это название показывает, что речь идет о расширении известного понятия множества нулевой емкости, касающегося уравнения Лапласа. Действительно, в дальнейшем мы покажем, что замкнутое множество $L \subset K_r$ имеет нулевую емкость относительно оператора Лапласа, если и только если это множество ее имеет в смысле определения 3,4. Перенесением и расширением некоторых результатов *Э. Картана* [11], [12], [13] *Ж. Дени* [14] вводит понятие емкости, которое в основном можно применить и к некторым уравнениям высших порядков. Для замкнутых множеств наш способ несколько проще.

Докажем теперь некоторые теоремы, касающиеся понятия множества нулевой емкости.

Теорема 3,1. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть B есть l-гармонический оператор и пусть $L \subset \overline{L} \subset K_r$. При этих условиях будет $L \in \mathfrak{M}(A)$.*

Доказательство следует из эквивалентности норм.

Замечание. Из теоремы 3,1 следует, что при изучении вопросов, связанных с множествами нулевой емкости, можно ограничиться изучением полигармонических операторов.

Нетрудно доказать, что понятие нулевой емкости инвариантно относительно сферы K_r. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3,2. *Пусть A_1 и A_2 — регулярные операторы порядка $2l$ соответственно на K_{r_1} и K_{r_2}, $r_1 < r_2$. Пусть, далее, $N \subset \overline{N} \subset K_{r_1}$. В таком сличае будет $N \in \mathfrak{M}(A_1)$ тогда и только тогда, если $N \in \mathfrak{M}(A_2)$.*

Замечание 1. Хотя обе сферы K_{r_1} и K_{r_2} имеют общий центр, ясно, что теорема справедлива и без этого предположения. Итак, понятие множества нулевой емкости зависит только от оператора A, точнее, от порядка оператора A.

Понятие множества нулевой емкости мы ввели в сущности для замкнутых множеств. Это следует из следующей теоремы:

Теорема 3,3. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $L \subset \overline{L} \subset K_r$ и пусть $L \in \mathfrak{M}(A)$. Тогда будет и $\overline{L} \in \mathfrak{M}(A)$.*

Замечание 1. Утверждение теоремы 3,3 очевидно в силу определения 3,2. В случае, когда мы изменили бы определение модуля M^L так, что соответствующие функции были бы равны нулю на некотором открытом множестве, содержащем L, положение вещей бы осложнилось. Теорема 3,3 остается, однако, в силе и в этом случае. Ввиду того, что определение 3,2 приводит к более простым доказательствам, мы будем пользоваться этим определением.

Замечание 2. Мы получили бы несколько более общие результаты, если бы мы прямо определили пространство H^N как подпространство пространства всех функций таких, что для каждой $f \in H^N$ и $\varepsilon > 0$ существует $g \in H$, $\|f - g\|_{H(A)} < \varepsilon$, причем существует открытое множество $N_1 \supset N$ так, что $g = 0$ тождественно на N_1. При таком определении теорема 3,3 уже не будет справедливой. Поскольку N замкнуто, определение 3,2 равносильно определению, данному в настоящей замечании.

Так же очевидна и дальнейшая теорема.

Теорема 3,4. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $L \subset \bar{L} \subset K_r$ и $L \in \mathfrak{M}(A)$. Тогда, если $L_1 \subset L$, то $L_1 \in \mathfrak{M}(A)$. Пусть $L \notin \mathfrak{M}(A)$, $L_2 \supset L$; тогда $L_2 \notin \mathfrak{M}(A)$.*

Теорема 3,5. *Пусть A и B — регулярные операторы порядков соответственно $2l$ и $2l_0$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $l_0 \leqq l$ и пусть $L \subset \bar{L} \subset K_r$, $L \in \mathfrak{M}(A)$, тогда $L \in \mathfrak{M}(B)$.*

Доказательство. По теореме о вложении С. Л. Соболева (см. [5], § 10) существует положительная постоянная C, не зависящая от u и такая, что $\|u\|_{L_2{}^{l_0}} \leqq C\|u\|_{L_2{}^l}$. По теореме 3,1 можно предположить, что операторы A и B — полигармонические операторы. В таком случае будет $\|u\|_{H(A)} = \|u\|_{L_2{}^l}$ и $\|u\|_{H(B)} = \|u\|_{L_2{}^{l_0}}$. Возмем $u \in M$ и $\varepsilon > 0$. По условию имеем $L \subset \bar{L} \subset K_s$ и $L \in \mathfrak{M}(A)$. Следовательно, существует $v \in M^L$ так, что $\|u - v\|_{L_2{}^l} \leqq \varepsilon/C$, а, значит, и $\|u - v\|_{L_2{}^l} \leqq \varepsilon$. Итак, наше утверждение доказано.

Введем теперь понятие порядка множества, близкое понятию размерности Хаусдорфа.

Определение 3.5. *Множество $L \subset \bar{L} \subset K_r \subset E_m$ мы назовем множеством порядка p, если оно имеет следующее свойство. Если обозначить через $\Omega_h(L)$ h-окрестность множества L, то существуют положительные постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ так, что для всех достаточно малых h*

$$C_1 h^{m-p} \leqq \int_{\Omega_h} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \leqq C_2 h^{m-p} .$$

Точка есть множество порядка 0, куб размерности p есть множество порядка p.

Замечание 1. Ясно, что если L_i, $i = 1, 2$, будет порядка i, то и $L_1 \cup L_2$ будет того же порядка.

Замечание 2. Ясно, что не каждое множество должно быть множеством какого-либо порядка в смысле определения 3,5. Это определение можно было бы еще расширить и обобщить. Однако, в дальнейшем нам достаточно будет и этого определения.

Теперь справедливы две леммы, которые нам будут нужны в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть $\omega(\tau, h)$ —* [10]) *функция, определенная во всем E_m следующим предписанием:*

$$\omega(\mathbf{x}, h) = \begin{cases} e^{r^2/(r^2-h^2)} & \text{для} \quad r < h\,, \\ 0 & \text{для} \quad r \geqq h\,, \end{cases}$$

где мы положили $r = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Функция $\omega(\mathbf{x}, h)$ обладает следующими свойствами:

1. *Функция $\omega(\mathbf{x}, h)$ — неотрицательная непрерывная во всем E_m функция, все производные которой непрерывны.*

2. *Для любого натурального $s > 0$ существует $C_s > 0$ так, что*

$$\left|\frac{\partial^s \omega(\mathbf{x}, h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right| \leqq C_s h^{-s}\,, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = s\,.$$

Лемма 3,2. *Пусть $L \subset \bar{L} \subset K_r \subset E_m$ и пусть $\Omega_{h_1}(L)$ означает h_1-окрестность множества L. Пусть $f_{h_1}^L(x)$ — характеристическая функция множества $E_m - \Omega_{h_1}(L)$. Далее, пусть $F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x})$, $h_2 < h_1$, функция, определенная на всем E_m при помощи предписания*

$$F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{\left(\frac{h_2}{2}\right)^m}\int_{E_m} \omega\left(\mathbf{x} - \xi, \frac{h_2}{2}\right) f_{h_1}^L(\xi)\, \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_m\,,$$

где мы обозначили $\kappa = \int_{E_m} \omega(x, 1)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m$, и *пусть $0 < h_2 < h_1$. Тогда функция $F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x})$ обладает следующими свойствами:*

1. $F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x}) = 0$ *для* $\mathbf{x} \in \Omega_{h_1 - \frac{1}{2}h_2}(L)$,
2. $F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x}) = 1$ *для* $\mathbf{x} \notin \Omega_{h_1 + \frac{1}{2}h_2}(L)$,
3. *Функция $F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x})$ непрерывна во всем E_m со всеми производными и*

$$\left|\frac{\partial^s F_{h_1,h_2}^L(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right| \leqq C_s \frac{1}{h_2^s}\,; \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = s\,.$$

Постоянная C_s не зависит от h_1 и h_2.

Первое и второе свойства функции $F_{h_1,h_2}^L(x)$ очевидны, третье следует из леммы 3,1.

Теорема 3,6. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $N \subset \bar{N} \subset K_r \subset E_m$. Пусть N — множество порядка $p \leqq m - 2l$. Тогда будет $N \in \mathfrak{M}(A)$.*

Доказательство. По теореме 3,1 можно предположить, что A — полигармонический оператор. Наше утверждение будет доказано, если показать, что для каждой $u \in M$ и $\varepsilon > 0$ существует $w \in M^N$ так, что $|u - w| = \|u - w\|_{L_2 l} \leqq \varepsilon$.

[10]) Здесь $\mathbf{x}$ — вектор, причем $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Посторим теперь последовательность функций G_n, $n = 2. 3, \ldots$ по следующему предписанию:

1. Пусть $\kappa_q^{(n)} = n^{-(q/n)-1}$, $q = 1, \ldots, n^{2l}$, $n = 2, 3, \ldots$; очевидно, будет $\kappa_{q+1}^{(n)} < \kappa_q^{(n)}$;

2. $G_n^{(q)}(\mathbf{x}) = F_{h_1,h_2}^N(\mathbf{x}) \dfrac{1}{n^{2l}}$, где $F_{h_1,h_2}^N(\mathbf{x})$ функция, определенная в лемме 3,2 и

$$h_1 = (\kappa_q^{(n)} + \kappa_{q-1}^{(n)}) \tfrac{1}{2}, \quad h_2 = \tfrac{1}{3}(\kappa_{q-1}^{(n)} - \kappa_q^{(n)}) ;$$

3. $G_n(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{n^{2l}} G_n^{(q)}(\mathbf{x})$.

Функция $G_n^{(q)}(\mathbf{x})$ обладает согласно лемме 3,2 следующими свойствами:

1. $G_n^{(q)}(\mathbf{x}) = 0 \quad$ для $\quad \mathbf{x} \in \Omega_{\kappa_q^{(n)} + \frac{1}{3}(\kappa^{(n)}_{q-1} - \kappa_q^{(n)})}(N)$,

$$G_n^{(q)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n^{2l}} \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \notin \Omega_{\kappa_q^{(n)} + \frac{2}{3}(\kappa^{(n)}_{q-1} - \kappa_q^{(n)})}(N) ;$$

2. $$\left| \frac{\partial^s G_n^{(q)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right| \leqq C_s \frac{1}{n^{2l}} (\kappa_{q-1}^{(n)} - \kappa_q^{(n)})^{-s} .$$

Функция $G_n(\mathbf{x})$ обладает следующими свойствами:

1. $G_n(\mathbf{x}) = 0 \quad$ для $\quad x \in \Omega_{n^{-n^{2l}}}(N)$.

Действительно, $n^{-n^{2l}} \leqq \kappa_p^{(n)} + \frac{1}{3}(\kappa_{q-1}^{(n)} - \kappa_q^{(n)})$ для всех $q = 1, 2, \ldots n^{2l}$, $n \geqq 2$ и, следовательно, $G_n^{(q)}(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \Omega_{n^{-n^{2l}}}(N)$ и для всех $q = 1, \ldots, n^{2l}$;

2. $G_n(\mathbf{x}) = 1 \quad$ для $\quad \mathbf{x} \notin \Omega_{1/n}(N)$.

Действительно, $1/n \geqq \kappa_q^{(n)} + \frac{2}{3}(\kappa_{q-1}^{(n)} - \kappa_q^{(n)})$ для всех $q = 1, 2, \ldots, n^{2l}$ и $n \geqq 2$ и, следовательно, $G^{(q)}(\mathbf{x}) = 1/n^{2l}$ для всех $\mathbf{x} \notin \Omega_{1/n}(N)$. Итак, $G_n(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{n} 1/n^{2l} = 1$ для $\mathbf{x} \notin \Omega_{1/n}(N)$.

3. Функция $G_n(\mathbf{x})$ обладает всеми производными и

$$\int_{E_m} \left(\frac{\partial^s G_n(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n_1} \leqq C_0 n^{-2l} (n^{1/n} - 1)^{-2l}$$

для $1 \leqq s \leqq l$ и $m \geqq p + 2l$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = s$, $\alpha_i \geqq 0$. Притом C_0 не зависит от n. Действительно, имеем

$$\int_{E_m} \left(\frac{\partial^s G_n(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = \int_{E_m} \left(\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^s G_n^{(q)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m .$$

Однако

$$\int_{E_m} \left(\frac{\partial^s G_n^{(q_1)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right) \left(\frac{\partial^s G_n^{(q_2)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = 0$$

для $q_2 \neq q_1$ и $s \geqq 1$, ибо очевидно, что подынтегральное выражение

$$\frac{\partial^s G_n^{(q_1)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \frac{\partial^s G_n^{(q_2)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} = 0$$

во всем E_m. Поэтому[11])

$$\int_{Em} \left(\frac{\partial^s G_n(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = \sum_{q=1}^{n^{2l}} \int_{Em} \left(\frac{\partial^s G_n^{(q)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \leqq$$

$$\leqq \frac{C}{n^{4l}} \sum_{q=1}^{n^{2l}} [\kappa_{q-1}^{(n)} - \kappa_q^{(n)}]^{-2s} [C_2'(\kappa_{q-1}^{(n)})^{m-p} - C_1'(\kappa_q^{(n)})^{m-p}] \leqq$$

$$\leqq \frac{\overline{C}}{n^{4l}} \sum_{q=1}^{n^{2l}} n^{2s((q/n)+1)} [n^{1/n} - 1]^{-2s} n^{-(m-p)((q/n)+1)} [C_2' n^{(m-p)/n} - C_1'] .$$

Однако, по условию имеем $m - 2l - p \geqq 0$ и $1 \leqq s \leqq l$. Тогда

$$\int_{E_m} \left(\frac{\partial^s G_n(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \leqq \frac{\overline{C}}{n^{2l}} [n^{1/n} - 1]^{-2l} .$$

$$. [C_2' n^{(m-p)/n} - C_1'] \leqq \frac{\overline{C}'}{n^{2l}} (n^{1/n} - 1)^{-2l} ,$$

так как $C_2' n^{(m-p)/n} - C_1$ — ограниченная функция в n. Этим мы доказали третье свойство функции.

Теперь мы уже можем приступить к доазательству собственного утверждения. Пусть $u \in M$. Обозначим $U_n = uG_n$, $n = 2, 3, \ldots$ Согласно первому свойству функции G_n будет $U_n \in M^N$. Докажем теперь, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое n такое, что $\|U_n - u\| \leqq \varepsilon$. Имеем $\|U_n - u\| = \|u(1 - G_n)\|$. Но так как $u \in M$, она имеет все производные и существует $C > 0$ так,[12]) что $\|u(1 - G_n)\| \leqq C^* \|G_n\|$. Притом постоянная C^* не зависит от n (но зависит, конечно, от u). Из третьего свойства функции G_n следует

$$\|u_n - u\| \leqq \frac{C^{**}}{n^{2l}(n^{1/n} - 1)^{2l}} .$$

Но так как $n^{1/n} \geqq 1 + 1/n \lg n$, то $n(n^{1/n} - 1) \geqq \lg n$ и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} n^{2l}(n^{1/n} - 1)^{2l} = \infty ,$$

откуда непосредственно следует наша теорема.

Теорема 3,7. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $S \subset \overline{S} \subset K_r \subset E_m$ — симплекс или куб размерности p. Тогда, если $p > m - 2l$, будет $S \notin \mathfrak{M}(A)$.*

---

[11]) См. определение 3,5.

[12]) В справедливости этого заключения можно убедиться при помощи теоремы о вложении С. Л. Соболева (см. 5).

[13]) Имеет место $|u| = \max |u(\mathbf{x})|$, $x \in K_r$.

Доказательство. Мы будем различать два случая:

I. $m < 2l$. Пусть $u \in M^s$. Тогда (см. [5]) существует C так, что $|u| \leqq C\|u\|_{L_2^l}$. [13]) Притом C не зависит от u. Из этого, однако, уже вытекает наше утверждение. В самом деле, предположим, что наше утверждение не справедливо, т. е. пусть $S \in \mathfrak{N}(A)$. Тогда, если $v \in M$ и $\varepsilon > 0$, существует $u \in M^s$ так, что $\|v - u\|_{L_2^l} < \varepsilon$. Возьмем функцию $v \in M$ так, что на S будет $v = 1$. Ввиду того, что $\overline{S} \subset K_r$, такая функция, очевидно, существует. Возьмем теперь $\varepsilon < 1/2C$. Существует $u \in M^s$ так, что $\|u - v\|_{L_2^l} < 1/2C$. Но в таком случае будет $|u - v| < C\|u - v\|_{L_2^l} < \frac{1}{2}$, что противоречит допущению, так как на S будет $u = 0$ и $v = 1$.

II. $m \geqq 2l$. Пусть $u \in M^s$. Тогда (см. [5]) существует постоянная C так, что

$$\int_s u^2 \, \mathrm{d}S \leqq C^2\|u\|^L_{2_2^l}.$$

Притом C не зависит от u. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству части I.

Замечание. Утверждение теоремы касается p-мерных кубов или симплексов. Справедлива, однако, значительно более общая теорема для p-мерных многообразий или для их частей, для которых справедливы теоремы о вложении точнее говоря, теоремы о вложении для некоторых показателей. Например, достаточно предположить, что речь идет о поверхностях, которые можно выразить локально посредством функций с ограниченными частными производными.

Теорема 3,8. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $L \subset \overline{L} \subset K_r \subset E_m$. Пусть, далее, имеет L следующее свойства: Существуют p-мерные симплексы (кубы), (замкнутые) S_1 и S_2 так, что $S_1 \subset L_2 \subset S_2$. Тогда будет $L \in \mathfrak{N}(A)$, если и только если $p \leqq m - 2l$.*

Утверждение непосредственно следует из теорем 3,6; 3,7; 3,3; 3,4.

Теорема 3,9. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть далее, $m < 2l$. Тогда не существуют непустые множества нулевой емкости.*

Согласно теореме 3,4 достаточно показать, что точка не является множеством нулевой емкости. Но это следует сразу же из теоремы 3,7.

Теорема 3,10. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $L_i \subset \overline{L}_i \subset K_r \subset E_m$, $i - 1, \ldots, p$. $L_i \in \mathfrak{N}(A)$. Тогда $L = \bigcup_{i=1}^{p} L_i \in \mathfrak{N}(A)$.*

Доказательство. Достаточно доказать наше утверждение для $p = 2$. Так как $\overline{L}_i \subset K_r$, $i = 1,2$, то расстояние δ_i множества L_i от дополнения круга K_r положительно. Поэтому существует $\psi \in M$ так, что $\psi = 1$ в некоторой окрестности множества L_1. Так как $L_1 \in \mathfrak{N}(A)$, то для каждого $\varepsilon_1 > 0$ существует функция $\phi_{\varepsilon_1} \in M^{L_1}$ так, что $\|\psi - \phi_{\varepsilon_1}\|_{L_2^l} \leqq \varepsilon_1$. Обозначим теперь $\kappa_{\varepsilon_1} = \psi - \phi_{\varepsilon_1}$. Очевидно, $\kappa_{\varepsilon_1} \in M$ и κ_{ε_1} будет равна единице в некоторой окрестности $\overline{L}_1$. Пусть теперь $\chi \in M$ и $\varepsilon > 0$. Так как $L_2 \in \mathfrak{N}(A)$, то существует $\Phi \in M^{L_2}$ так, что

$\|\chi - \Phi\|_{L_2^l} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Обозначим $u = \Phi - \kappa_{\varepsilon_1}\Phi = \Phi(1 - \kappa_{\varepsilon_1})$. Так как $\Phi \in M$, то существует $C > 0$, C не зависит от κ_{ε_1}, так что $\|\kappa_{\varepsilon_1}\Phi\|_{L_2^l} \leqq C\|\kappa_{\varepsilon_1}\|_{L_2^l}$.[14]) Положим теперь $\varepsilon_1 = \varepsilon/2C$. Тогда получим $\|\chi - u\|_{L_2^l} \leqq \|\chi - \Phi\|_{L_2^l} + \|\kappa_{\varepsilon_1}\Phi\|_{L_2^l}$. Кроме того, очевидно, $u \in M^{L_1 \cup L_2}$. Этим и доказывается наше утверждение.

Теорема 3,11. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $L_i \subset \bar{L}_i \subset K_r \subset E_m$, $L_i \in \mathfrak{N}(A)$, $i = 1, 2, \ldots$, — счетная система множеств. Пусть, далее, $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ — замкнутое множество. Тогда $L \in \mathfrak{N}(A)$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\chi \in M$. Так как $L_i \subset \bar{L}_i \subset K_r$ и $L_i \in \mathfrak{N}(A)$, то существует для любого $i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots$ функция $\kappa_{i,j} \in M$ так, что $\|\kappa_{i,j}\| < 2^{-j}$ и $\kappa_{i,j} = 1$ в некоторой окрестности $\Omega_j(\bar{L}_i)$ множества $\bar{L}_i$. Ввиду того, что $\chi \in M$, нетрудно подобным рассуждением, как и в доказательстве предыдущей теоремы, построить последовательность функций $\Phi_i \in M_i$, $i = 0, 1, \ldots$ так, что

$$\Phi_0 = \chi, \quad \Phi_{i+1} = \Phi_i(1 - \kappa_{i,j_i}), \quad \|\Phi_{i+1} - \Phi_i\| < \varepsilon 2^{-(i+1)}.$$

Но в таком случае, очевидно, $\|\chi - \Phi_i\| < \varepsilon$ для любого i и $\Phi_i = 0$ на $\Omega^i = \bigcup_{k=1}^{i} \Omega_{j_k}(\bar{L}_k)$. По теореме Бореля существует тогда p так, что $L \subset \Omega^p$. В таком случае, однако, $\Phi^p \in M^L$, чем и доказывается теорема.

Замечание 1. Теорема 3,11 ограничивается изучением замкнутых множеств. Понятие множества нулевой емкости можно, конечно, расширить на множества типа F_σ; такого рода множество представляет собой сумму счетной системы замкнутых множеств нулевой емкости. После такого расширения само собой отпадает условие замкнутости множества в теореме 3,11. Расширение понятия мнпжества нулевой емкости на множества типа F_σ тесно связано с определением, указанным в замечании 2 к теореме 3,3.

IV. О МНОЖЕСТВАХ НУЛЕВОЙ ЕМКОСТИ, II

Эту главу мы посвятим дальнейшему исследованию множеств нулевой емкози. Введем прежде всего дальнейшие определения и докажем некоторые новые теоремы.

Определение 4,1. *Пусть H — гильбертово пространство, а H_i, $i = 1, 2, \ldots$ — его подпространства. Пусть, далее, $H_{i+1} \supset H_i$, $i = 1, 2, \ldots$, соотв. $H_{i+1} \subset H_i$, $i = 1, \ldots$ Тогда мы обозначим $\operatorname{Lim}_{i\to\infty} H_i = \overline{\bigcup H_i}$, соотв. $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$.*

[14]) Постоянныя C зависит, конечно от Φ. В этом можно убедиться, используя теоремы о вложении.

Лемма 4,1. *Пусть H — гильбертово пространство, а H_i, $i = 1, 2, \ldots$ — его подпространства. Пусть, далее, $H_{i+1} \supset H_i$, $i = 1, 2, \ldots$ или $H_i \supset H_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Обозначим еще $H_0 = \operatorname{Lim}_{i \to \infty} H_i$ и через P_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ операторы проектирования (проекторы) на H_i. Тогда для любого $x \in H$ имеет место $P_i x \to P_0 x$.*

Определение 4,2. *Пусть Ω — открытое множество и $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$. Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на K_r (ср. определение 3,1). Пусть $\psi \in H(A)$. Обозначим через P_Ω, соотв. P^Ω проектор на ${}^*H_\Omega$, соотв. ${}^*H^\Omega$ (см. определение 3,3). Тогда мы будем называть функцию $u = P_\Omega \psi$, соотв. $P^\Omega \psi$, решением проблемы* I *для уравнения $Au = 0$ на Ω, соотв. $K_r - \overline{\Omega}$, для краевого условия, определенного на границе области Ω, соотв. $K_r - \overline{\Omega}$, функцией ψ.*

Замечание 1. В определении 4,2 предполагается только, что Ω — открытое множество; следовательно, мы не имеем дела с областью. Тем не менее можно очевидно, говорить о решении проблемы I на Ω. Притом подразумеваются, собственно говоря, решения на каждой отдельной составляющей.

Замечание 2. Определение 4,2 тесно связано со свойствами минимума квадратичного функционала, Дело в том, что функция u осуществляет минимум квадратичного функционала $(A(\psi + v), \psi + v)$, где $v \in H_\Omega$, соотв. H^Ω. В случае, если Ω является областью типа Соболева, можно считать функцию $u = P_\Omega \psi$ решениеи уравнения $Au = 0$ с предписанными краевыми условиями такими, что u принимает на границе в обобщенном смысле со всеми своими производными до порядка $l - 1$ те же значения, как и функция ψ (ср., напр., [5], § 10).

Замечение 3. Определение 4,2, очевидно, равносильно определению при помощи минимума квадратичного функционала.

Замечание 4. В случае, если A — регулярный оператор специального типа, напр., оператор Лапласа или полигармонический оператор, уравнение $Au = 0$ выполняется в каждой точке области Ω в классическом смысле. Так же дело обстоит и в случае дифференциальных операторов с достаточно гладкими коэффициентами. (См., напр., [6], § 33.)

Замечание 5. Для каждого $x \notin \overline{\Omega}$, соотв. $x \in \Omega$, будет $u = \psi$. Для $x \in \dot{\Omega}$ положение несколько осложняется. В случае, если u непрерывна на K_r (напр., если A — бигармонический оператор и $m < 5$), будет $u = \psi$ и на $\dot{\Omega}$ (см. [5], § 8), В случае, если A — гармонический оператор, будет $u - \psi$ в тонком смысле почти всюду на границе $u = \psi$ (ср. главу V, теорему 5.10) и в смысле Соболева, т. е. в L_2 на $\dot{\Omega}$.

Определение 4,3. *Мы будем говорить, что область $\Omega \subset E_m$, $m \geqq 2$ является элементом системы $\mathfrak{P}$ и обозначать $\Omega \in \mathfrak{P}$, если для любой точки $a \in \Omega$ существует местная система декартовых координат $\xi_1, \ldots, \xi_m$; $a \equiv (0, \ldots, 0)$ такая, что границу $\dot{\Omega}$ можно в окрестности точки a и в окрестнозти $\xi_1 = \ldots =$*

$= \xi_{m-1} = 0$ *локально выразить в виде* $\xi_m = F(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$, *если функция обладает всеми производными.*

Теорема 4,1. *Пусть* $\Omega \subset E_m$ *— ограниченная область. Тогда существует последовательность* $\Omega_n \in \mathfrak{P}$ *так, что* $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$.

Определение 4,4. *Ограниченную область* $\Omega \subset E_m$ *мы будем называть нормальной и обозначать* $\Omega \in \mathfrak{N}$, *если* $\dot{\Omega} = \dot{\overline{\Omega}}$, *где через* $\dot{\Omega}$ *мы обозначили границы области* Ω.

Теорема 4,2. *Пусть* $\Omega \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. *Тогда существует последовательность* $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \ldots$ *так, что* $\overline{\Omega} \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n$ и $\bigcap \Omega_n = \overline{\Omega}$.

Переходя к дополнениям и принимая во внимание, что $\Omega \in \mathfrak{N}$, мы видим, что теорема 4,2 является в сущности утверждением теоремы 4,1.

Теорема 4,3. *Пусть* A *— регулярный оператор порядка* $2l$ *на* $K_r \subset E_m$. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r$. *Тогда для каждого* $\psi \in H(A)$ *существует функция* $u_\psi \in H(A)$, *имеющая следующие свойства. Если* $K_r \supset \Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \ldots$ *— последовательность областей таких, что* $\Omega \supset \Omega_{n+1} \supset \overline{\Omega}_n$ *и* $\bigcap \Omega_n = \Omega$, *и если обозначить через* $u_{n,\psi} \in {}^*H_{\Omega_n}$ *решение проблемы* I *для уравнения* $Au = 0$ *на* Ω_n *и для краевых условий, определенных функсией* ψ, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} u_{n,\psi} = u_\psi$ *в* $H(A)$ *и* $u_\psi = P_0 \psi$, *где* P_0 *— проектор на* ${}^*H_\Omega = \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} H_{\Omega_n}$, *т. е.* u_ψ *является решением в смысле определения* 4,2.

Доказательство. По определению 4,2 имеем $u_{n,\psi} = P_{\Omega_n} \psi$, $n = 1, 2, \ldots$, где P_{Ω_n} — проектор на ${}^*H_{\Omega_n}$. По лемме 4,1 будет $\lim\limits_{n \to \infty} u_{n,\psi} = P_0 \psi$, где P_0 — проектор на пространство $\operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} {}^*H_{\Omega_n}$. Остается доказать, что ${}^*H_\Omega = \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} {}^*H_{\Omega_n}$. Для этого достаточно показать, что $H_\Omega = \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} H_{\Omega_n}$. Однако, $H_{\Omega_n} \subset H_\Omega$; следовательно, $H_\Omega \supset \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} H_{\Omega_n}$. Далее, модуль M_Ω является по определению плотным в H_Ω. Но если $v \in M_\Omega$, то $v \in H_{\Omega_n}$ для всех достаточно больших n. Итак, $v \in \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} H_{\Omega_n}$. Поэтому $H_\Omega \subset \operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} H_{\Omega_n}$, чем и доказывается полностью наше утверждение.

Определение 4,5. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 4,3. *Тогда функцию* u_ψ *жсы будем называть внутренним решением Винера проблемы* I *для уравнения* $Au = 0$ *на* Ω *и для краевых условий, определенных функцией* ψ.

Теорема 4,4. *Писть* A *— регулярный оператор порядка* $2l$ *на* $K_r \subset E_m$. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r$ *— нормальная область, т. е.* $\Omega \subset \mathfrak{N}$. *Тогда для каждого* $\psi \in H(A)$ *существует функция* $u^\psi \in H(A)$, *имеющая следующие свойства. Если* $K_r \supset \Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \ldots$ *— последовательность таких областей, что* $\overline{\Omega} \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n$

и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \overline{\Omega}$ *и если обозначить через* $u_{n,\psi} \in H(A)$ *решение проблемы* I *на* Ω_n *для уравнения* $Au = 0$ *и для краевых условий, определенных функцией* ψ,[15]) *то*

$$\lim_{n \to \infty} u_{n,\psi} = u^{\psi} \quad \text{в} \quad H(A)$$

и $u^{\psi} = P^{\circ}\psi$, *где* P° — *проектор на* $^*H_{\tilde{\Omega}} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} {}^*H_{\Omega_n}$.[16])

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4,3.

Определение 4,6. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 4,4. *Тогда функцию* u^{ψ} *мы будем называть внешним решением Винера проблемы* I *для краевых условий, определенных функцией* ψ.

Замечание 1. Подчеркиваем, что функции u_{ψ} и u^{ψ} зависят только от области Ω и от функции ψ, но не зависят от выбора последовательностей областей Ω_n. В случае функции u_{ψ} эта независимость очевидна, так как пространство $^*H_{\Omega}$ (см. определение 4,2) зависит лишь от области Ω. Нетрудно убедиться, что и порстранство $^*H_{\tilde{\Omega}}$ зависит только от области Ω.

Замечание 2. Понятие решения Винера ввел *Н. Винер* ([15], [16], [17]), который дает определение решения проблемы Дирихле для уравнения Лапласа и для непрерывных краевых условий как предел классических решений (допускающих продолжение на границ е)на областях специального типа, еслио эти области стремятся к данной области определения. Определение 4,5 показывает в связи с теоремой 4,3, что идею обобщенного решения Винера можно осуществить и иным способом, чем это сделал в своих классических работах Винер. Определение 4,6 с теоремой 4,4 показывает, что можно ввести и внешнее решение Винера, которое в классическом смысле ввел *И. В. Келдыш* [18].

В дальнейшем мы увидим, что классическое решение Винера тесно связано с решением, введенным нами.

Замечание 3. Теоремы 4,3 и 4,4 можно также понимать, как утверждения о непрерывной зависимости решения от области определения, поскольку, конечно, сходимость имеет место только изнутри или извне. Итак, речь идет о внутренней и внешней устойчивости решения. Наше утверждение — это ни что иное, как доказательство того, что каждая область устойчива как извнутри, так и извне для проблемы I. Существенным обстоятельством является, конечно, то, что сходимость областей происходит исключительно или извне или изнутри. Дело в том, что, вообще говоря, может быть $u_{\psi} \neq u^{\psi}$.

Теорема 4,5. *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{P}$, $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_3$. *Пусть* A — *оператор Лапласа. Пусть* ψ — *непрерывная функция и* $\psi \in H(A)$ (ср. определение 3.1), P_0 —

[15]) На $K_r - \overline{\Omega}$ мы дополняем решение функцией ψ.

[16]) Имеет смысл говорить о $^*H_{\tilde{\Omega}}$, так как $^*H_{\Omega n+1} \subset H_{\Omega n}$. Вообще имеет место $^*H_{\tilde{\Omega}} \neq {}^*H_{\Omega}$. Подробнее см. гл. V.

проектор на $^*H_\Omega$, соотв. $^*H^\Omega$. Пусть u_0 — решение проблемы Дирихле в классическом смысле[17]) *на Ω, соотв. на $K_r - \overline{\Omega}$, если на границе области Ω предписаны краевые условия, определенные функцией ψ и дополненные на $K_r - \Omega$, соотв. $\overline{\Omega}$, функцией ψ. Тогда $u_0 = P_0\psi$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in M$; обозначим $v = \Delta\psi$. По теореме 2,3 функция $P(\Omega, v, \mathbf{x})$ минимализирует функционал $[u, u] - 2(u, v)$ на $^1W_2^1$. Согласно примечанию к определению 2,2 и согласно заключениям главы VI пространство $^1W_2^1$ тождественно с пространством H_Ω. Далее нетрудно убиться, что $(v, u) = [\psi, u]$. Поэтому будет $[u, u] - 2(u, v) = [\psi - u, \psi - u] - [\psi, \psi]$ и, следовательно, $W(\Omega, \psi, \mathbf{x}) = \psi - P(\Omega, v, \mathbf{x}) = P_0\psi$. Если $\psi \in M$, то наше утверждение доказано. Пусть теперь ψ — непрерывная функция и $\psi \in H(A)$. Тогда существует $\psi_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$ так, что $|\psi_n - \psi| \to 0$ и $\|\psi_n - \psi\| \to 0$, $n \to \infty$. Ввиду теоремы о максимуме и непрерывности проектора P_0 будет

$$|W(\Omega, \psi_n, \mathbf{x}) - W(\Omega, \psi, \mathbf{x})| \to 0 \quad и \quad \|W(\Omega, \psi_n, \mathbf{x}) - P_0\psi\| \to 0\,.$$

Итак, $u_0 = W(\Omega, \psi, \mathbf{x}) = P_0\psi$.[18]) Этим мы доказали наше утверждение для множества Ω. Таким же образом доказывается утверждение и для множества $K_r - \overline{\Omega}$.

Замечание. Для простоты мы предполагали, что $K_r \subset E_3$. Но теорема справедлива и в общем случае. Предположение о E_3 мы ввели в целях использования формулировки теоремы 2,3.

Теорема 4,6. *Пусть Ω — область, $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_3$. Пусть A — оператор Лапласа. Пусть ψ непрерывна и $\psi \in H(A)$ и P_0 — проектор на $^*H_\Omega$. Пусть u_0 — внутреннее решение Винера в классическом смысле проблемы Дирихле на Ω, если на границе области Ω предписаны краевые условия, определенные функцией ψ. Тогда $u_0 = P_0\psi$.*[19])

Доказательство. По теореме 4,1 существует последовательность Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, $\Omega_i \in \mathfrak{P}$, $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1} \subset \Omega \subset K_r \subset E_3$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega$. Обозначим через $u_n = W(\Omega_n, \psi, \mathbf{x})$ решение проблемы Дирихле на Ω_n, если на границе предписаны краевые условия, определенные функцией ψ. Тогда, как известно, $u_n \to u$ равномерно внутри Ω (см., напр., [18], § 1). Далее, обозначим через P_n проектор на $^*H_{\Omega_n}$. По теореме 4,5 будет $P_n\psi = u_n$. Так как теперь $P_n\psi \to P_0\psi = u_\psi$ и $u_n = \psi$ на $\dot{\Omega}$, то теорема доказана.

---

[17]) Решением проблемы Дирихле на Ω в классическом смысле, когда на границе предписаны краевые условия, определенные функцией ψ, мы называем непрерывную функцию на $\overline{\Omega}$, гармоническую на Ω, а на $K_r - \Omega$ равную функции ψ. Это решение мы обозначим символом $W(\Omega, \psi, \mathbf{x})$.

[18]) Равенство нужно понимать, разумеется, так, что $u_0 = P_0\psi$ может быть и с точностью до множества меры нуль.

[19]) Функцию u_0, определенную в классическом случае на Ω, мы расширим путем дополнения функцией ψ на все K_r. Функция $P_0\psi$ определена на всем K_r.

Теорема 4,7. *Пусть A — оператор Лапласа, $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_3$. Пусть ψ — непрерывна и $\psi \in H(A)$ и u^ψ — внешнее решение Винера по определению* 4,6. *Тогда u^ψ будет внешним решением в классическом смысле Винера* (см. [18], § 5), *если это классическое решение снова дополнить функцией ψ на $K_r - \Omega$ и на $\dot{\Omega}$ надлежащим образом.*[20])

Доказательство. Согласно теореме 4,2 существует последовательность Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, $\Omega_i \in \mathfrak{P}$, $K_r \supset \Omega_i \supset \overline{\Omega}_{i+1} \supset \Omega_{i+1} \supset \overline{\Omega}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \overline{\Omega}$. Обозначим через $u_n = W(\Omega_n, \psi, \mathbf{x})$ решение проблемы Дирихле на Ω_n, если на границе $\dot{\Omega}_n$ предписаны краевые условия, определенные функцией ψ. Обозначим, далее, через P_n проектор на $^*H_{\Omega_n}$. По теореме 4,5 имеем $P_n\psi = u_n$. Известно (см. [18], § 5), что $u_n \to u^\psi$ равномерно внутри Ω. Далее, очевидно, на $K_r - \overline{\Omega}$, $u_n \to \psi$. Так как $P_n\psi \to P_0\psi = u^\psi$, то теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно построить пример области такой, что $\Omega \in \mathfrak{N}$ и что $\dot{\Omega}$ имеет положительную меру.

Замечание 2. Возникает вопрос, не сходится ли выделенная последовательность, о которой мы упоминали при доказательстве теоремы 4,7, на границе $\dot{\Omega}$ к функции ψ. Этим вопросом мы займемся в последующем изложении.

Замечание 3. Мы предположили, что $\Omega \subset E_3$. Совершенно аналогично можно доказать и общий случай.

Теорема 4,8. *Пусть A — оператор Лапласа в E_3. Пусть $L = \overline{L} \subset K_r \subset E_3$. Тогда будет $L \in \mathfrak{M}(A)$ в том и только в том случае, если L имеет нулевую емкость в смысле Винера.*[21])

Докажем прежде всего две вспомогательные леммы.

Лемма 4,2. *Пусть L — замкнутое множество, $L = \overline{L} \subset K_r \subset E_3$, A — оператор Лапласа. Пусть $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n \subset K_r$, $\Omega_n \supset L$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = L$. Пусть u_n — классическое решение проблемы Дирихле для уравнения Лапласа на $K_r - \overline{\Omega}_n$ такое, что на границе $\dot{K}_r$ имеем $u_n = 0$, а на границе $\dot{\Omega}_n$ $u_n = 1$.*[22]) *Пусть $u_n \to 0$ на $(K_r - L)^*$, где $(K_r - L)^*$ — составляющая множества $K_r - L$, граница которой содержит границу сферы K_r. Тогда L имеет нулевую емкость (в смысле Винера).*

Доказательство. Пусть L имеет положительную емкость в смысле Винера. Обозначим через $\tilde{u}_n$ классическое решение проблемы Дирихле для уравнения

[20]) В отличие от случая внутреннего решения нужно на $\dot{\Omega}$ функцию u, вообще говоря, дополнить значениями, отличными от функции ψ.

[21]) Мы имеем в виду понятие емкости в том смысле, как его приводит М. В. Кельдыш [18], § 2.

[22]) Такое решение существует в классическом смысле, ибо Ω_n есть чевидно, орегулярная область в классическом смысле.

Лапласа на $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$, которое на границе области $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$ равно единице и для которого $||\mathbf{x}|\, \tilde{u}_n(\mathbf{x})| < C$.[23]) Притом мы обозначили через $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$ ту составляющую множества $E_3 - \bar{\Omega}_n$, которая содержит внешность сферы K_r. Существует в точности одно такое решение. Так как $\bar{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n$, будет, очевидно, $0 \leqq \tilde{u}_{n+1} < \tilde{u}_n$. Так как L имеет положительную емкость в смысле Винера, то существует $\tilde{u}$ так, что $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ равномерно внутри $(E_3 - L)^*$ и $\tilde{u} \neq 0$. Обозначим, далее, через v_n, соотв. v, решение проблемы Дирихле для уравнения Лапласа, которое на $\dot{K}_r$ принимает те же значения, как и функция $\tilde{u}_n$, соотв. $\tilde{u}$. Ввиду того, что поверхность сферы K_r является частью $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$для всех n, функция $\tilde{u}_n$ на поверхности сферы непрерывна, и поэтому функции v_n и v существуют. Обозначим, далее, $w_n = \tilde{u}_n - v_n$ и $w = \tilde{u} - v$. Тогда, очевидно, (так как $v_n \geqq 0$, $v \geqq 0$ на K_r) будет $u_n \geqq w_n$ и $w_n \to w \geqq 0$ внутри $(K_r - L)^*$ равномерно. Так как по условию L имеет положительную емкость, будет

$$\limsup_{x \in (K_r - L)^*} \tilde{u}(\mathbf{x}) = 1$$

и, кроме того, $|v| < 1$. Итак, $w \neq 0$ на $(K_r - L)^*$. Это – противоречие, так как $w_n = u_n$ стремится к нулю. Лемма доказана.

Лемма 4,3. *Пусть $L = \bar{L} \subset K_r \subset E_3$. Пусть L имеет нулевую емкость в смысле Винера. Пусть $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, $\bar{\Omega}_n \subset K$, $\Omega_n \supset L$, $\bar{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n$, $\bigcap_{n-1}^{\infty} \Omega_n = L$, u_n – решение проблемы Дирихле на $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$, которое на границе области $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$ равно единице и для которого $||\mathbf{x}|\, \tilde{u}_n(\mathbf{x})| < C$. Притом мы обозначаем через $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$ составляющую, содержащую внешность сферы K_r. Дополним функцию $\tilde{u}_n(\mathbf{x})$ на Ω_n функцией, тождественно равной единице.*[24])

Тогда: 1. *первые производные функции $\tilde{u}_n(\mathbf{x})$ интегрируемы с квадратом на K_r*;

2. $\displaystyle\int_{K_r} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 \to 0$ для $n \to \infty$;

3. $\int_{K_r} \tilde{u}_n^2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 \to 0$ для $n \to \infty$.

Доказательство. 1. Первое свойство является следствием того, что область $(E_3 - \bar{\Omega}_n^*)$ обладает весьма гладкой границей. Преобразованием Кельвина (преобразованием сферической инверсии) мы переведем область $(E_3 - \bar{\Omega}_n)^*$ на ограниченную область и воспользуемся теоремой 2,1.

2. Емкость множества L можно определить (см. [18]), как предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_C \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

[23]) Мы положили $|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

[24]) Дополнив на Ω_n функцию $\tilde{u}_n$ функцией, равной тождественно единице, мы получим функцию с обобщенными первыми производными, интегрируемыми с квадратом.

где C — граница области $(E_3 - \overline{\Omega}_n)^*$, n означает внешнюю нормаль. В силу теоремы 2,1 эта производная существует. Однако,

$$\int_C \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial n}\, \mathrm{d}s = \int_{E_3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\right)^2\right) \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 \geqq \int_{K_r}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\right)^2\right) \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\,.$$

Так как L имеет нулевую емкость (в смысле Винера), то выполняется и второе свойство.

3. $\tilde{u}_n(\mathbf{x})$ стремится к нулю равномерно внутри $(E_3 - L)^*$. Далее имеем $|\tilde{u}_n(\mathbf{x})| < 1$. Поэтому достаточно доказать, что L имеет нулевую меру. Из свойств множеств нулевой емкости (см. [18]) следует, что L имеет нулевую меру и, следовательно, лемма доказана.

Дерейдем теперь к доказательству теоремы 4,8.

Доказательство теоремы 4,8. I. Пусть $\overline{L} = L \in \mathfrak{M}(A)$, $\overline{L} \subset K_r \subset E_3$. Докажем, что L имеет нулевую емкость в смысле Винера. Так как L замкнуто и $L \subset K_r$, существует $\psi \in M$ такое, что $\psi = 1$ в некоторой окрестности L. Существует последовательность областей

$$\Omega_n \in \mathfrak{P}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \Omega_n \supset L\,, \quad \overline{\Omega}_n \subset K_r\,, \quad \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n\,, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = L\,.$$

Теперь будет $H^{\Omega_{n+1}} \supset H^{\Omega_n}$ (см. определение 3,2). Обозначим $H_0 = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} H^{\Omega_n}$. Так как $H^L = H$, то M^L плотно в H. Но, очевидно, $M^L \subset H_0$. Так как H_0 замкнуто, то $H_0 = H$. Обозначим теперь через P_n проектор на ${}^*H^{\Omega_n}$. По лемме 4,1 будет $P_n\psi \to 0$, ибо $\operatorname{Lim} {}^*H^{\Omega_n} = 0$. Однако $\psi \in M$. Поэтому по теореме 4,5 будет $P_n\psi = u_n$, где u_n — решение проблемы Дирихле для уравнения Лапласа на $K_r - \overline{\Omega}_n$, принимающее на границе те же значения, как и функция ψ. Так как $u_n \to 0$ в $H(A)$, из теоремы о вложении (см., напр., [6]) следует также, что $u_n \to 0$ в L_2. Поэтому $u_n \to 0$ равномерно внутри $(K_r - L)^*$. [См., напр., [19], стр. 268.] Поэтому по лемме 4,2 L имеет нулевую емкость в смысле Винера.

II. Пусть теперь L имеет нулевую емкость в смысле Винера. Докажем, что $L \in \mathfrak{M}(A)$. Возьмем $\psi \in M$, и пусть $\psi_n = \psi(1 - \tilde{u}_n)$, где $\tilde{u}_n$ — та же функция, как и в лемме 4,3. Ввиду того, что $\psi \in M$, будет $\psi_n \in H(A)$. В окрестности L имеем $\psi_n = 0$, значит, $\psi_n \in H^L$. Докажем, что $\psi_n \to \psi$ в $H(A)$. Действительно,

$$\|\psi_n - \psi\| = \int_{K_r}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\psi\,\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i} + \tilde{u}_n \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right) \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\,.$$

Так как ψ и $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$ — ограниченные функции, то из леммы 4,3 следует, что $\psi_n \to \psi$ и, следовательно, H^L плотно в M, ч. т. д.

Теорема 4,9. *Пусть A есть l-гармонический оператор на $K_r \subset E_m$. Пусть $L \in \mathfrak{M}(A)$, $L = \overline{L} \subset K_r$. Пусть $\Omega \subset K_r$ — область и $\overline{L} \subset \Omega$. Пусть $\psi \in H(A)$ и ψ*

есть l-гармоническая на $\Omega - \bar{L}$ функция. Тогда ψ будет l-гармонической на Ω функцией.

Доказательство. Пусть $\xi \in M_{\Omega-\bar{L}}$; так как ψ есть l-гармоническая функция, то $[\xi, \psi] = 0$. Но так как $L \in \mathfrak{M}(A)$, то $M_{\Omega-\bar{L}}$ плотно в M_Ω. Итак, $[\xi, \psi] = 0$ для любого $\xi \in H_\Omega$ и функция ψ является l-гармонической во всем Ω (см., напр., [5], § 14). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 4,9 в связи с теоремой 4,8 является, в сущности, другой версией теоремы о том, что множества нулевой емкости образуют устранимую особенность в классе ограниченных гармонических функций. Остается, однако, некоторая разница в предположении относительно класса функций, в котором встречается устранимая особенность. У гармонических функций достаточно в классическом смысле предполагать ограниченность. В нашем случае мы предполагаем класс гармонических функций в $H(A)$, который не совпадает с классом ограниченных функций.

Замечание 2. Теорема 4,9 является расширением теоремы об устранимой особенности для гармонических функций на класс функций l-гармонических.

Замечание 3. В теореме 4,9 мы ограничились l-гармоническими операторами. Однако, ясно, что теорема справедлива для всякого регулярного оператора. Равенство $A\psi = 0$ нужно, конечно, понимать вообще в смысле теории обобщенных функций, соотв. в смысле расширенного дифференциального оператора A в $H(A)$. Если оператор A такой, что равенство $A\psi = 0$ влечет за собой выполнение этого уравнения в классическом смысле (так будет, напр., в случае регулярных дифференциальных операторов с достаточно гладкими коэффициентами), то теорему 4,9 можно перенести дословно на эти операторы.

Теорема 4,1. *Пусть A есть l-гармонический оператор на $K_r - E_n$. Пусть, далее, Ω — область, $\bar{\Omega} \subset K_r$, $\bar{L} \subset \Omega$. Пусть, далее, каждая $\psi \in H(A)$, l-гармоническая на $\Omega - \bar{L}$, является также l-гармонической на Ω. Тогда $L \in \mathfrak{M}(A)$.*

Доказательство. Пусть $L \notin \mathfrak{M}(A)$. Тогда $H \neq H^L$, а поэтому и $H_{\Omega-\bar{L}} \neq H_\Omega$. Следовательно, существует $\psi \in H_\Omega$, $\psi \in {}^*H_{\Omega-\bar{L}}$, $\psi \neq 0$. $\psi \in {}^*H_{\Omega-\bar{L}}$ будет l-гармонической на $\Omega - \bar{L}$. Значит, по условию ψ будет l-гармонической на всем Ω. Следовательно, $\psi \in {}^*H_\Omega$. Итак, $\psi \in {}^*H_\Omega \cap H_\Omega = 0$. Поэтому $\psi = 0$. Но это противоречие. Теорема 4,10 доказана.

Замечание 1. По теореме 3,1 при исследовании множеств нулевой емкости достаточно ограничиться полигармоническими операторами. Теоремы 4,9 и 4,10 дают в сущности новое определение множеств нулевой емкости, а в связи с теоремой 3,6 и определение размерности замкнутого множества.

Замечание 2. Теоремы 4,9 и 4,10 в связи с теоремой 3,1 и замечанием 1 утверждают, что множество L образует устранимую особенность для общего регулярного оператора порядка $2l$, если L образует устранимую особенност для l-гармонических уравнений.

Замечание 3. До сих пор мы всегда предполагали, что имеем дело с регулярным оператором в смысле определения 3,1. Однако все теоремы можно применить и в случае операторов, симметрическая часть которых является регулярным оператором, а антисимметрическая имеет некоторые свойства (ср., напр., [10] или [20], [21]).

Замечание 4. Полученные нами до сих пор результаты можно перевести на некоторые системы, вообще говоря, несамосопряженные, сильно эллиптические. (Ср. [22], [23].)

Замечание 5. Мы уже заметили, что замкнутые множества нулевой емкости можно также охарактеризовать как множества, образующие устранимую особенность для соответсвующих дифференциальных уравнений. С физической точки зрения это можно истольковать, напр., так, что опора мембраны, сосредоточенная на множестве нулевой емкости, неэффективна, или предписанная деформация в теле на множестве нулевой емкости не меняет напряженного состояния. С этой точки зрения и введение дальнейших понятий емкости естественно истолковывается, напр., так, что извлечение множества из тепла не меняет состояния напряженности. В случае плоского состояния напряженности определенная таким образом емкость не является равносильной емкости для бигармонической проблемы при $l = 2$, ибо при многосвязных телах краевые условия выполняются вплоть до линейных выражений, которые для всех составляющих границы различны. Поэтому имеет смысл говорить и о некоторого рода емкости, образующей часть тела, устранимую без подслествий для напряженного состояния. Аналогично дело обстоит и в других физических проблемах. Этому вопросу мы уделим внимание позднее.

(*Следует часть вторая*)

Литература

[1] *Л. С. Лейбензон:* Курс теории упругости. Москва 1947.

[2] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo:* Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme. Berlin 1960.

[3] *Ф. Трикоми:* Лекции по уравнениям в частных производных. Москва 1957.

[4] *Н. М. Гюнтер:* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Москва 1953.

[5] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционал ного анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[6] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала. Москва 1952.

[7] *J. Deny, J. L. Lions:* Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. d. l'inst. Fourier *V*, 1953—54, 305—370.

[8] *М. И. Вишик:* Метод ортогональных проекций для общих линейных самосопрятельных эллиптических дифференциальных уравнений. ДАН СССР, *58* (1947), 957—960.

[9] *Pleijel:* On Green's functions. Proc. of the sympos. on spectral theory and differential problem. Stillwater, Okl. 1951, 143—149.

[10] *J. L. Lions:* Sur quelque problèmes aux limites relatifs à des opérateurs diff. elliptiques. Bull. Soc. Math. France *83*, 1955, 225—250.
[11] *H. Cartan:* Sur les fondaments de la théorie du potential. Bull. Soc. Math. de France *69*, 1941, 71—96.
[12] *H. Cartan:* Théorie du potential newtonien. Energie, capacité, suites des potentials. Bull. Soc. Math. de France *73*, 1945, 74—106.
[13] *H. Cartan:* Théorie générale du balayage en potential newtonien. Ann. Univ. Grenoble, *22*, 1946, 221—280.
[14] *J. Deny:* Les potentiels d'energie finie. Acta Mathematice, *82*, 1950, 107—183.
[15] *N. Wiener, H. B. Phillips:* Nets and the Dirichlet Problem. Journal of Math. and Phys. *2*, 1923, 105—124.
[16] *N. Wiener:* The Dirichnet problem. Journal of Math. and. Phys. *3*, 1924, 127—146.
[17] *N. Wiener:* Certain Notious in Potential Theory. Journal of Math. and Phys. *3*, 1924, 24—51.
[18] *M. B. Келдыш:* О розрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук *8* (1941), 171—231.
[19] *O. D. Kellog:* Foundations of Potential Theory. Berlin, 1929.
[20] *L. Garding:* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. Scandinavica *1*, 1953, 55—72.
[21] *L. Garding:* Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivés partiels elliptiques lineaires dans les domaines bornés. Compt. Rend. Acod. Sci. Paris. *233*, 1951, 1954—1956.
[22] *M. И. Вишик:* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. ДАН (1960), 881—884.
[23] *M. И. Вишик:* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Мат. сб. *71* (1951), 615—676.