Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát
О мере Хаусдорфа линейных множеств

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 1, 24–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100441

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

О МЕРЕ ХАУСДОРФА ЛИНЕЙНЫХ МНОЖЕСТВ

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

(Поступило в редакцию 3/IX 1959 г.)

В настоящей статье доказывается несколько общих теорем о хаусдорфовской мере линейных множеств и даются их применения к вычислению хаусдорфской размерности некоторых специиальных линейных множеств.

I. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О МЕРЕ ХАУСДОРФА

Пусть M означает линейное множество, пусть V означает счетную систему открытых конечных интервалов (длину интервала i мы обозначаем в дальнейшем через $|i|$). Множество V называется η-покрытием множества M ($\eta > 0$), если $M \subset \bigcup_{i \in V} i$ и для всякого $i \in V$ имеет место $|i| \leqq \eta$. Обозначим символом $U(\eta, M)$ систему всех η-покрытий множества M. На протяжении всей этой статьи мы предполагаем (см. [2]), что каждому действительному числу α, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $-\infty \leqq \alpha_1 < \alpha_2 \leqq +\infty$, сопоставлена некоторая действительная функция $\mu^{(\alpha)}(t)$. Систему всех этих функций $\mu^{(\alpha)}(t)$ мы обозначим через F. О всех функциях $\mu^{(\alpha)}(t)$ мы предполагаем, что они определены и неотрицательны на некотором интервале

$$\langle 0, t_0(\alpha)) , \quad (\langle 0, t_0(\alpha)\rangle) , \quad t_0(\alpha) > 0 , \quad \mu^{(\alpha)}(0) = 0 , \quad \lim_{t \to 0+} \mu^{(\alpha)}(t) = 0 ,$$

далее, $\mu^{(\alpha)}(t) \neq 0$ для любого $t > 0$ и $\mu^{(\alpha)}(t)$ есть неубывающая функция на интервале $\langle 0, t_0(\alpha))$, $(\langle 0, t_0(\alpha)\rangle)$. Предположим кроме того, что для любых двух чисел $\alpha, \alpha' \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \alpha'$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\mu^{(\alpha')}(t)}{\mu^{(\alpha)}(t)} = 0 .$$

Функции $\mu^{(\alpha)}$ мы называем измеряющими функциями. В частности, функции $\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$, определенные для $\alpha \in (0, 1)$, $t \in \langle 0, +\infty)$ удовлетворяют предыдущим условиям.

Положим для

$$0 < \eta < t_0(\alpha), \quad \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} = \inf_{V \in U(\eta, M)} \sum_{i \in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) ,$$

тогда для $0 < \eta' < \eta < t_0(\alpha)$ будет, очевидно,

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} \leqq \mu_{\eta'}^{(\alpha)}\{M\}$$

и поэтому существует

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \lim_{\eta \to 0+} \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\}\ .$$

Число (неотрицательное) $\mu^{(\alpha)}\{M\}$ называется *α-мерной мерой* множества M по отношению к системе измеряющия функций F.

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть для* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *будет* $\mu^{(\alpha)}\{M\} < +\infty$. *Тогда для всякого* $\alpha' > \alpha$, $\alpha' \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *будет* $\mu^{(\alpha')}\{M\} = 0$.

Следствие. Для каждого множества M существует одно единственное число $\delta \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ так, что

1. Для всякого $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha > \delta$ имеет место $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$.
2. Для всякого $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$ имеет место $\mu^{(\alpha)}\{M\} = +\infty$.

Это число δ мы называем размерностью Хаусдорфа множества M по отношению к системе F измеряющих функций и обозначаем его через $\dim_F M$. Если в качестве функций $\mu^{(\alpha)}(t)$ взять $\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $t \in \langle 0, +\infty)$, то мы будем писать просто $\dim M$.

Замечание. Нетрудно убедиться в том, что $\mu^{(\alpha)}\{M\}$ при фиксированном α удовлетворяет обеим аксиомам внешней меры Каратеодори, то есть

(1) $$\mu^{(\alpha)}\{\emptyset\} = 0.$$

(2) $$\text{Если } M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ то } \mu^{(\alpha)}\{M\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}\{M_n\}.$$

α-мерная мера Хаусдорфа (соответственно размерность Хаусдорфа) позволяет нам сравнивать между собою также и множества, у которых мера Лебега равна 0.

В последующем изложении нам будут нужны следующие вспомогательные теоремы:

Лемма 2. *Пусть B — счетное линейное множество. Тогда для всякого* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *будет* $\mu^{(\alpha)}\{B\} = 0$ (*следовательно,* $\dim_F B = \alpha_1$).

Доказательство. Теорема является простым следствием (2) и того, что для $A = \{a\}$ и для всякого $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет место $\mu^{(\alpha)}\{A\} = 0$.

Лемма 3. *Пусть M, M' — линейные множества, и пусть $M \subset M'$ а $M' - M$ есть счетное множество. Тогда для всякого* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *будет*

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \mu^{(\alpha)}\{M'\} \quad (\textit{следовательно, } \dim_F M = \dim_F M').$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда согласно замечанию за леммой 1 будет $\mu^{(\alpha)}\{M\} \leqq \mu^{(\alpha)}\{M'\}$. С другой стороны, из равенства $M' = M \cup (M' - M)$ мы получим в силу того же замечания

$$\mu^{(\alpha)}\{M'\} \leqq \mu^{(\alpha)}\{M\} + \mu^{(\alpha)}\{M' - M\},$$

а так как по лемме 2 имеет место $\mu^{(\alpha)}\{M' - M\} = 0$, то отсюда уже следует утверждение.

В следующей теореме выясняется связь между размерностью произвольного подмножества счетной суммы множеств и размерностями отдельных слагаемых.

Лемма 4. *Пусть*

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

и пусть F — некоторая система измеряющих функций $\mu^{(\alpha)}$. Тогда

$$\dim_F M \leqq \sup_{n=1,2,\ldots} \dim_F M_n .$$

Доказательство. Теорему докажем от противного. Пусть

$$\dim_F M > \sup_{n=1,2,\ldots} \dim_F M_n .$$

Возьмем число α так, чтобы

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \dim_F M_n < \alpha < \dim_F M .$$

Тогда $\mu^{(\alpha)}\{M_n\} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и согласно второй аксиоме внешней меры Каратеодори будет также $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$, что противоречит выбору числа α $(\alpha < \dim_F M)$.

Следствие. Если $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ и если $\delta = \dim_F M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $\dim_F M = \delta$.

Действительно, по доказанной лемме $\dim_F \leqq \delta$, а, с другой стороны, из $M_1 \subset M$ непосредственно следует $\dim_F M \geqq \delta$.

При определении размерности данного множества по отношению к какой-либо системе F измеряющих функций бывает обычно довольно затруднительно получить нижнюю оценку, то есть доказать, что $\dim_F M \geqq \delta$, в то время как верхнюю оценку $\dim_F M \leqq \delta$, можно часто получить без особых затруднений. Для быстрого получения нижней оценки иногда выгодно использовать следующие теоремы. Первая из них представляет обобщение теоремы 1, доказанной автором в работе [1]. Вторая же была доказана в работе [3] *Х. Г.*

Эггльстоном и с успехом применялась в работах *Б. Фолькмана* для определения размерности различных множеств, заданных g-адическими разложениями действительных чисел. Для полноты мы здесь дадим ее краткое доказательство. Во второй части работы мы дадим применения общих результатов из первой части для определения размерности некоторых специальных линейных множеств.

Теорема 1. *Пусть* $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$,

$$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots, \tag{3}$$

где J_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *состоит из конечного числа* g_n *конечных замкнутых интервалов* i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ *одинаковой длины* $\lambda_n > 0$, *пусть* $\lambda_n \to 0$. *Пусть* i_n^m, $i_n^{m'}$, $m \neq m'$ *не имеют общих внутренних точек. Пусть всякий интервал* i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ *содержит одинаковое количество* $\left(= \frac{g_{n+1}}{g_n} \geqq 1\right)$ *интервалов* $i_{n+1}^m \in J_{n+1}$.[1])

Положим

$$\tau(n) = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \; (n = 0, 1, 2, \ldots), \lambda_0 = A' - A, A = \inf J_1, A' = \sup J_1 ,$$

и пусть

$$l = \liminf_{n \to \infty} \tau(n) > 0 .$$

Предположим далее, что существует $\delta \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ *так, что для всякого* $\alpha \in \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$ *будет*

$$\lim_{n \to \infty} g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = +\infty . \tag{4}$$

Утверждение: $\dim_F M \geqq \delta$.

Доказательство. Если $\delta = \alpha_1$, то утверждение тривиально. Пусть поэтому $\delta \in (\alpha_1, \alpha_2\rangle$. Нужно доказать, что для всякого $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$ будет $\mu^{(\alpha)}\{M\} = = +\infty$. Пусть α выбрано именно так.

В силу условия

$$l = \liminf_{n \to \infty} \tau(n) > 0$$

существует $\delta_2 > 0$ так, что для всех n будет $\tau(n) > \delta_2 > 0$. Положим, далее, $\tau_2 = 1/\delta_2 + 2 > 0$. Пусть K — какое-либо положительное число. Существует k_0 так, что для всех $k \geqq k_0$ будет $\lambda_k < t_0(\alpha)$ и

$$g_k \mu^{(\alpha)}(\lambda_k) > 2K\tau_2 . \tag{5}$$

---

[1]) Для краткости мы пишем $J_n = \bigcup_{m=1}^{g_n} i_n^m$, а также $J_n = \{i_n^1, i_n^2, \ldots, i_n^{g_n}\}$, что не может вызвать недоразумений.

Положим $\eta_0 = \lambda_{k_0} > 0$. По определению $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\}$, $0 < \eta \leqq \eta_0$ существует такое η-покрытие V множества M, что

$$\sum_{i\in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) < \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} + K\,.$$

Так как множество M — компакт, по теореме Бореля существует конечное множество $V' \subset V$ так, что $M \subset \bigcup_{i\in V'} i$ и, кроме того, очевидно

$$\sum_{i\in V'} \mu^{(\alpha)}(|i|) \leqq \sum_{i\in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) < \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} + K\,.$$

Заменив каждый из интервалов i системы V' его замыканием, мы получим какую-то новую систему V''. Далее, заменив каждый интервал $i \in V''$ его пересечением с интервалом $\langle A, A'\rangle$, мы получим таким образом некоторую новую систему V''', состоящую из конечного числа замкнутых интервалов; для каждого из этих интервалов $i \in V'''$ имеет место $i \subset \langle A, A'\rangle$, $|i| \leqq \lambda_{k_0}$ и

$$\sum_{i\in V'''} \mu^{(\alpha)}(|i|) < \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} + K\,. \tag{6}$$

Пусть $i \subset \langle A, A'\rangle$. Тогда существует множество R, состоящее из конечного числа интервалов $i_{n_0}^m$ (n_0 фиксировано, m принимает некоторые из значений $1, 2, \ldots, g_n$) со следующими свойствами:

(a) $i \cap M \subset \bigcup i_{n_0}^m,\ i_{n_0}^m \in R$,

(b) $|i_{n_0}^m| < |i|$ для всякого $i_{n_0}^m \in R$,

(c) $\sum \mu^{(\alpha)}(|i_{n_0}^m|) < \tau_2 \mu^{(\alpha)}(|i|),\ i_{n_0}^m \in R$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно принять во внимание, что $\lambda_n \to 0$, $\lambda_{n+1} \leqq \lambda_n$, следовательно, существует n_0 так, что $\lambda_{n_0} < |i| \leqq \lambda_{n_0-1}$. Пусть R означает множество всех тех $i_{n_0}^m \in J_{n_0}$, для которых $i_{n_0}^m \cap i \neq \emptyset$. Так как $M \subset J_{n_0}$, следует отсюда (a). Далее, число всех $i_{n_0}^m \in R$ будет

$$\leqq \frac{|i|}{\lambda_{n_0}} + 2 \leqq \frac{\lambda_{n_0-1}}{\lambda_{n_0}} + 2 < \tau_2\,.$$

Так как для любого $i_{n_0}^m \in R$ имеем $|i_{n_0}^m| = \lambda_{n_0} < |i|$, то имеет место (b), а так как все интервалы $i_{n_0}^m \in R$ имеют одну и ту же длину, то по предыдущему

$$\sum \mu^{(\alpha)}(|i_{n_0}^m|) \leqq \tau_2 \mu^{(\alpha)}(|i|)\,, \quad i_{n_0}^m \in R\,. \tag{7}$$

Применим теперь это к системе V'''. Таким образом мы получим конечную систему R' интервалов i_n^m; для каждого $i_n^m \in R'$ будет $|i_n^m| \leqq \lambda_{k_0}$ и $M \subset \bigcup i_n^m$, $i_n^m \in R'$, а согласно (6), (7)

$$\sum_{i_n^m \in R'} \mu^{(\alpha)}(|i_n^m|) \leqq \tau_2 \sum_{i\in V'''} \mu^{(\alpha)}(|i|) \leqq \tau_2(\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} + K)\,. \tag{8}$$

Подобно тому, как и в теореме 1 работы [1] мы убедимся, что существует $k^* \geqq k_0$ так, что

$$(9) \qquad \sum \mu^{(\alpha)}(|i_n^m|) \geqq g_{k^*}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{k^*}), \quad i_n^m \in R',$$

что вместе с (5) и (8) дает

$$2K\tau_2 < \tau_2(\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} + K),$$

следовательно, $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} > K$ для $0 < \eta \leqq \eta_0$, то есть

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = +\infty .$$

Убедимся еще в справедливости (9). Положим (в дальнейшем мы пишем для простоты i вместо i_n^m)

$$\max |i| = \lambda_{k'}, \quad i \in R'; \quad \min |i| = \lambda_{k''}, \quad i \in R',$$

следовательно, $k_0 \leqq k' \leqq k''$.

Вычеркивая подходящие интервалы из R', мы получим систему R^*, $M \subset \bigcup i$, $i \in R^*$ такую, что ни одна внутренняя точка какого-либо интервала $i \in R^*$ не будет многократно покрыта интервалами системы R^*. Притом, очевидно,

$$\sum_{i \in R^*} \mu^{(\alpha)}(|i|) \leqq \sum_{i \in R'} \mu^{(\alpha)}(|i|) .$$

Если $k'' = k'$, то $R^* = J_{k'}$ и утверждение (9) справедливо ($k^* = k'$). Итак, пусть $k'' - k' > 0$. Обозначим $R^* = R_0^*$ и построим последовательно дальнейшие множества R_j^*, $0 \leqq j \leqq k'' - k'$. Пусть уже построены множества

$$R_0^*, R_1^*, \ldots, R_j^* \quad (0 \leqq j < k'' - k')$$

так, что каждое из них состоит из конечного числа интервалов i_n^m, $\lambda_{k''} \leqq |i_n^m| \leqq \leqq \lambda_{k'}$, а R_j^* имеет следующие свойства (которые R_0^* имеет тривиально):

(α) $M \subset \bigcup i, \quad i \in R_j^*$.

(β) Ни одна внутренняя точка некоторого из интервалов $i \in R_j^*$ не является многократно покрытой интервалами системы R_j^*.

(γ) $\sum_{i \in R_j^*} \mu^{(\alpha)}(|i|) \leqq \sum_{i \in R^*_{j-1}} \mu^{(\alpha)}(|i|) \leqq \ldots \leqq \sum_{i \in R_0^*} \mu^{(\alpha)}(|i|)$.

(δ) Длины интервалов $i \in R_j^*$ принимают не более чем $k'' - k' - j + 1$ различных значений и притом не более одного (которое мы обозначим через $(\lambda_{v(j)})$ из значений

$$\lambda_{k''}, \lambda_{k''-1}, \ldots, \lambda_{k''-j} \quad (k'' - j \leqq v(j) \leqq k'') .$$

R_{j+1}^* мы теперь введем следующим образом:

Если такое $v(j)$ не существует, то мы положим $R_{j+1}^* = R_j^*$. Сразу видно, что свойства (α), (β), (γ), (δ) выполняются и для R_{j+1}^*. Если такое $v(j)$ существует, то пусть S_j означает систему всех $i_{v(j)} \in R_j^*$. Так как $J_{v(j)} \subset J_{k''-j-1}$, то каждый из этих интервалов (т. е. из интервалов $i_{v(j)}$) содержится в каком-либо интервале $i^m_{k''-j-1}$, который вследствие (β) не принадлежит к R^*_j. Обозначим систему всех этих $i^m_{k''-j-1}$ символом U_j, а их число через C_j. Тогда S_j состоит из всех

$$C_j g_{v(j)}/g_{k''-j-1}$$

интервалов $i_{v(j)}$, входящих в U_j, так как для каждого интервала $i^m_{k''-j-1} \in U_j$ пересечение $i_{k''-j-1} \cap M$ будет ввиду (α) покрыто интервалами системы R^*_j, т. е. в силу (β), (δ) интервалами $i_{v(j)}$.

Итак, имеются две возможности:

(a) Пусть $g_{v(j)}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{v(j)}) \geqq g_{k''-j-1}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{k''-j-1})$. Тогда мы получим R^*_{j+1} из R^*_j так, что интервалы системы S_j заменим интервалами системы U_j. Тогда ввиду того, что интервалы системы I_s имеют одну и ту же длину λ_s, будет

$$\sum_{i\in R^*{}_{j+1}} \mu^{(\alpha)}(|i|) = \sum_{i\in R^*{}_j} \mu^{(\alpha)}(|i|) - C_j \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}} \mu^{(\alpha)}(\lambda_{v(j)}) + C_j\mu^{(\alpha)}(\lambda_{k''-j-1}) \leqq \sum_{i\in R^*{}_j} \mu^{(\alpha)}(|i|)\,.$$

(b) Если $g_{v(j)}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{v(j)}) < g_{k''-j-1}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{k''-j-1})$, то пусть U'_j означает систему всех интервалов $i^m_{k''-j-1} \in R^*_j$, а C'_j — их число ($C'_j \geqq 0$), и пусть S'_j означает систему всех (в числе $C'_j g_{v(j)}/g_{k''-j-1}$) интервалов $i_{v(j)}$, входящих в U'_j. Тогда согласно (β) ни один из интервалов системы S'_j не входит в R^*_j. R^*_{j+1} теперь можно получить из R^*_j так, что интервалы системы U'_j заменим интервалами системы S'_j. Снова имеет место

$$\sum_{i\in R^*{}_{j+1}} \mu^{(\alpha)}(|i|) = \sum_{i\in R^*{}_j} \mu^{(\alpha)}(|i|) - C'_j\mu^{(\alpha)}(\lambda_{k''-j-1}) + C'_j \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}} \mu^{(\alpha)}(\lambda_{v(j)}) \leqq \sum_{i\in R^*{}_j} \mu^{(\alpha)}(|i|)\,.$$

Итак, в обоих случаях имеет место (γ) и, как сразу же видно, имеют место и (α), (β), (δ) для R^*_{j+1}.

Таким образом мы дойдем до $R^*_{k''-k'}$. Интервалы этой системы имеют уже в силу (δ) одинаковую длину, которую мы обозначим через λ_{k^*}, $k' \leqq k^* \leqq k''$, итак, согласно (α), (β) будет $R^*_{k''-k'} = J_{k^*}$, откуда уже непосредственно следует (9).

Теперь мы докажем следующую теорему, восходящую к Х. К. Эггльстону (см. [3]):

Далее мы всюду предполагаем, что аргументы при $\mu^{(\alpha)}$ входят в область определения функции $\mu^{(\alpha)}$.

Теорема 2. *Пусть* $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$

$$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \ldots$$

и пусть каждое из множеств J_n состоит из конечного числа g_n конечных замкнутых интервалов i^m_n одинаковой длины $\lambda_n > 0$, не содержащих по-парно общих внутренних точек. Пусть каждый интервал $i^m_n \in J_n$ содержит одинаковое число (равное g_{n+1}/g_n) интервалов $i^m_{n+1} \in J_{n+1}$. Пусть для данной системы F измеряющих *функций* $\mu^{(\alpha)}(t)$ *существует число* $\delta \in \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ *так, что для всякого* $\alpha < \delta$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *будет*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\gamma_n)} < +\infty \quad (\gamma_0 = 1). \tag{10}$$

Утверждение: $\dim_F M \geqq \delta$.

Доказательство. Если $\delta = \alpha_1$, то утверждение тривиально. Итак, пусть $\delta \in (\alpha_1, \alpha_2\rangle$. Если бы было $\dim_F M < \delta$, то существовало бы $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$ так, что $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$. Так как

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \lim_{\eta \to 0+} \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\},$$

следует отсюда, что для всех достаточно малых η, напр. $0 < \eta \leqq \eta_0$, будет $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} < 1$. По определению числа $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\}$ мы получаем для каждого η, $0 < \eta \leqq \eta_0$ существование такого η-покрытия V множества M, что $\sum_{i \in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) < 1$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно, очевидно, убедиться в справедливости следующего высказывания:

Пусть $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$. Если η — достаточно малое число из интервала $(0, t_0(\alpha))$ и V — счетная система открытых интервалов, удовлетворяющая условиям:

(1) $|i| \leqq \eta$ для всякого $i \in V$,

(2) $\sum_{i \in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) < 1$,

то V не является η-покрытием множества M. Притом ввиду компактности множества M достаточно ограничиться конечными системами V.

Итак, пусть $\alpha < \delta$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Возьмем число R настолько большое, чтобы (ср. (10))

$$\sum_{n=R}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)} < \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{1}{6}. \tag{11}$$

Пусть $\eta > 0$, $\eta \leqq \lambda_R$. Пусть V — конечная система открытых интервалов i, удовлетворяющая условиям:

(1) для всякого $i \in V$ будет $|i| \leqq \eta$,

(2) $\sum_{i \in V} \mu^{(\alpha)}(|i|) < 1$.

Обозначим через V_j систему всех тех $i \in V$, для которых

$$\lambda_{R+j-1} \geqq |i| > \lambda_{R+j}.$$

Обозначим через V'_j (конечную) систему открытых интервалов, которая получается из системы V_j путем замены каждого интервала $i \in V_j$ другим открытым интервалом i' таким, чтобы $|i'| = 3|i|$ и чтобы оба интервала i, i', имели общий центр. Если какой-либо интервал $i \in J_{R+j}$ пересекается с каким-либо интервалом системы V_j, то этот интервал содержится в каком-то интервале системы V'_j. Пусть $N(V_j)$ означает число элементов системы V_j; тогда, очевидно, имеет место

$$1 > \sum_{i \in V_j} \mu^{(\alpha)}(|i|) \geqq N(V_j)\, \mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j}) ;$$

отсюда получаем

$$N(V_j) < \frac{1}{\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} .$$

Пусть $|M'|$ означает в дальнейшем меру Лебега множества M'. Тогда

$$(12) \qquad |V'_j| \leqq N(V_j)\, 3\lambda_{R+j-1} < \frac{3\,\lambda_{R+j-1}}{\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} .$$

Возьмем индекс t настолько большим, чтобы $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t = V$ (в качестве t достаточно взять индекс, удовлетворяющий неравенству

$$\lambda_{R+t-1} \geqq \min_{i \in V} |i| > \lambda_{R+t} .$$

Обозначим символом $B(j)$ систему всех тех $i \in J_{R+j}$, которые пересекаются с какими-либо интервалами из V_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$, следовательно, $B(j) \subset J_{R+j}$. Тогда, если $N(B(j))$ означает число элементов множества $B(j)$, мы получаем согласно (12) и по построению системы V'_j

$$N(B(j))\, \lambda_{R+j} < \frac{3\,\lambda_{R+j-1}}{\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} ,$$

$$(13) \qquad N(B(j)) < 3\, \frac{\lambda_{R+j-1}}{\lambda_{R+j}}\, \frac{1}{\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} .$$

Пусть $D(t)$ – система всех тех интервалов $i^m_{R+t} \in J_{R+t}$, которые не лежат ни в одном из $B(j)$, $1 \leqq j \leqq t$. Очевидно, (в силу (13)), если $N(D(t))$ означает число элементов $D(t)$,

$$N(D(t)) \geqq g_{R+t} - N(B(t)) - N(B(t-1))\, \frac{g_{R+t}}{g_{R+t-1}} - \ldots - N(B(1))\, \frac{g_{R+t}}{g_{R+1}} >$$

$$> g_{R+t} \left[1 - 3 \sum_{j=1}^{t} \frac{\lambda_{R+j-1}}{\lambda_{R+j}}\, \frac{1}{g_{R+j}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} \right] .$$

Итак, согласно (11)

$$N(D(t)) > g_{R+t} \left(1 - 3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{R+j-1}}{\lambda_{R+j}}\, \frac{1}{g_{R+j}\mu^{(\alpha)}(\lambda_{R+j})} \right) > g_{R+t} \left(1 - \frac{3}{6} \right) = \frac{1}{2}\, g_{R+t} .$$

Но последнее неравенство означает, что V не является η-покрытием множества M, что и требовалось доказать.

Замечание. Обе доказанные теоремы облегчают нам нахождение нижней оценки для размерности некоторых линейных множеств (по отношению к какой-либо наперед заданной системе измеряющих функций). Выгодой теоремы 2 является то обстоятельство, что в ней мы не делали никаких предположений о поведении частного $\tau(n) = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$; ее можно следовательно, использовать и в тех случаях, когда $\liminf_{n\to\infty} \tau(n) = 0$ (это имеет, напр., место при канторовских разложениях действительных чисел, как мы покажем позже в дальнейшей статье). Выгодой теоремы 1 по сравнению с теоремой 2 является, с другой стороны, то обстоятельство, что выполнение условия (4) в данном конкретном случае обычно легче доказать, чем выполнение условия (10) из теоремы 2. Кроме того заметим, что если выполняются все условия теоремы 2 и все условия теоремы 1 за исключением условия (4), то, в этом частном случае, теорема 2 является следствием теоремы 1, так как из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)}$$

следует в силу неравенства $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \geqq 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = +\infty\,,$$

далее, так как $\lambda_n \leqq 1$, мы получаем $g_n \to \infty$, а так как g_n интервалов длины λ_n помещается в компактном J_1, должно быть $\lambda_n \to 0$. Таким образом мы видим, что если кроме условий теоремы 2 для множества M выполняется еще следующее условие: $\liminf_{n\to\infty} \tau(n) > 0$, то теорема 2 является следствием теоремы 1.

II. РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами, пусть для всякого $k = 1, 2, 3, \ldots$ будет $a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$. Обозначим через W множество всех тех действительных x, которые имеют вид

$$(14) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,; \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Очевидно, $W \subset \langle -A, A \rangle$, $|W| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n$ (см. [1]).[2]) Строение множества

[2]) $|W|$ означает меру Лебега множества W.

W описано в [1]. Представление (14) числа x однозначно, и мы называем его разложением по знакам числа x по отношению к ряду $\sum_1^\infty a_n$.

Множество W можно записать в виде (см. [1]): $W = \bigcap_{n=1}^\infty J_n$, где J_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) состоит из 2^n интервалов

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n \rangle ,$$

где $\varepsilon_k = 1$ или -1 ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Мы будем коротко говорить, что интервал

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n, \ \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n \rangle$$

принадлежит к последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ и наоборот.

Пусть $x_0 = \sum_1^\infty \varepsilon_n^0 a_n \in W$. В начале этой части работы мы будем изучать множество $\langle x_0 \rangle$ всех тех $x \in W$, $x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n$, для которых $\varepsilon_n \leqq \varepsilon_n^0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) $\langle x_0 \rangle$ имеет следующее значение:

Обозначим через $P(x_0)$ множество всех тех натуральных n, для которых $\varepsilon_n^0 = 1$; аналогично определим $P(x)$ для каждого $x \in W$. Если $x \in \langle x_0 \rangle$, то $P(x) \subset P(x_0)$ и, наоборот, если $B \subset P(x_0)$, образуем ряд

$$x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \ ; \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

в котором $\varepsilon_n = 1$, тогда и только тогда, если $n \in B$, то $x \in \langle x_0 \rangle$ и $B = P(x)$. Итак, множество $\langle x_0 \rangle$ состоит из сумм всех таких рядов, для которых соответствующее множество $P(x)$ является подмножеством множества $P(x_0)$. Отсюда в частности следует, что мощность системы всех подмножеств множества $P(x_0)$ равна мощности множества $\langle x_0 \rangle$.

Обозначим подобно тому, как и в работе [1], символом $f(n, x_0)$ количество чисел 1 в конечной последовательности $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0$, и положим

$$D_1^* = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x_0)}{n} \ , \quad D_2^* = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x_0)}{n} \ ,$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x_0)}{n} \qquad (\underset{i=1,2}{D_i^*} = D_i^*(f, x_0) \ ; \quad D^* = D^*(f, x_0))$$

(если предел в правой части существует). Аналогично, $g(n, x_0)$ означает количество чисел -1 в $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0$.

Для размерности множества W были в работе [1] доказаны следующие соотношения:

$$f(l) \leqq \dim W \leqq f(L) \ , \quad \text{где}$$

$$l = \liminf_{n\to\infty} \tau(n) \ , \quad L = \limsup_{n\to\infty} \tau(n), \ \tau(n) = \frac{R_{n+1}}{R_n} \ .$$

Притом $f(0) = 0$ и $f(t) = \log 2/\log t^{-1}$ для $0 < t \leqq \frac{1}{2}$. Итак, если существует $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$, то $\dim W = f(l^*)$.

Теорема 3. *Для размерности множества* $\langle x_0 \rangle$ *имеет место*

$$D_1^*(f, x_0) f(l) \leqq \dim \langle x_0 \rangle \leqq D_1^*(f, x_0) f(L)\,.$$

Доказательство. Обозначим через K_n множество, состоящее из всех тех интервалов i_n^m, которые принадлежат к таким последовательностям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, что для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ будет $\varepsilon_k \leqq \varepsilon_k^0$. Тогда, очевидно, K_n состоит из $2^{f(n,x_0)}$ интервалов i_n^m и $\langle x_0 \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Сразу видно, что каждый интервал $i_n^m \in K_n$ содержит одинаковое количество (равное 1 или 2) интервалов множества K_{n+1} (см. в [1] построение множества W).

Используем теперь теорему 1,1 из работы [1]. Согласно обозначениям этой теоремы положим

$$l = \liminf_{n\to\infty} \tau(n)\,, \quad L = \limsup_{n\to\infty} \tau(n)\,, \quad \tau(n) = \frac{R_{n+1}}{R_n}\,, \; g_n = 2^{n\mu_n} = 2^{n\, f(n,x_0)/n}\,,$$

$$\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu_n = D_1^*(f, x_0)\,, \quad D_1^*(f, x_0) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x_0)}{n}\,,$$

так что по теореме 1,1 из работы [1] получим

$$D_1^*(f, x_0) f(l) \leqq \dim \langle x_0 \rangle \leqq D_1^*(f, x_0) f(L)\,.$$

Замечание. Если существует $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$, то по доказанной теореме

$$\dim \langle x_0 \rangle = D_1^*(f, x_0) \dim W\,.$$

Итак, если $\dim W > 0$, то

$$D_1^*(f, x_0) = \frac{\dim \langle x_0 \rangle}{\dim W}\,. \tag{15}$$

Это соотношение выражает интересную связь между нижней плотностью чисел 1 в последовательности $\{\varepsilon_n^0\}_1^\infty$ и размерностью множества $\langle x_0 \rangle$.

Далее, если $|W| > 0$, то $\dim W = 1$, и из (15) следует

$$D_1^*(f, x_0) = \dim \langle x_0 \rangle\,.$$

Это – аналог соотношения, выведенного Б. Фолькманом для диадических разложений чисел интервала (0, 1). Соотношение (15) можно рассматривать как распространение результата Фолькмана на некоторые множества W нулевой лебеговской меры.

В работе [2] Б. Фолькман исследует размерность (по отношению к некоторой системе F измеряющих функций) множеств, определенных (в g-адических разложениях) аналогично тому, как мы определили множество $\langle x_0 \rangle$. Мы покажем, что к подобным же результатам можно прийти и в некоторых дисконтинуумах W.

Для любого $\alpha \in (0, +\infty)$ мы определим функцию $\mu^{(\alpha)}(t)$ на интервале $\langle 0, 1)$ следующим образом:

$$\mu^{(\alpha)}(0) = 0\,, \quad \text{а для} \quad t > 0 \;\; \mu^{(\alpha)}(t) = 2^{-\alpha\phi([-\log t)]/\log 2)}$$

где $\phi(\xi)$ — некоторая (для всех α одна и та же фиксированная) функция, непрерывная и неубывающая для $\xi \geqq 0$, которая для любого натурального n удовлетворяет условию

$$\phi(n) = f(n, x_0)\,, \quad x_0 = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n^0 a_n \in W\,. \tag{16}$$

Очевидно, функций такого рода существует несколько; мы выберем из них одну и при помощи ее образуем систему F измеряющих функций $\mu^{(\alpha)}(t)$. $\mu^{(\alpha)}(t)$ удовлетворяют условиям, наложенным на измеряющие функции, если предположить, что в разложении по знакам (16) числа x_0 для бесконечного количества n имеет место $\varepsilon_n^0 = 1$.

Следующая теорема является аналогом и распространением результата Фолькмана на множества W положительной лебеговской меры.

Теорема 4. *Пусть* $x_0 = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n^0 a_n \in W$ *и пусть для бесконечного количества* n *будет* $\varepsilon_n^0 = 1$. *Пусть, далее,* $|W| > 0$. *Утверждение*: $\dim_F \langle x_0 \rangle = 1$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы используем теорему 1, доказанную в первой части настоящей работы (Б. Фолькман использует для доказательства аналогичной теоремы в [2] теорему 2 Эгглстона).

а) Покажем, что $\dim_F \langle x_0 \rangle \leqq 1$. K_n означает то же самое, как и в доказательстве теоремы 3, $\langle x_0 \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, и далее положим $\langle x_0 \rangle' = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^0$, где K_n^0 означает множество всех внутренних точек множества K_n. Тогда, как известно (см. лемму 3),

$$\dim \langle x_0 \rangle = \dim \langle x_0 \rangle'\,.$$

Пусть $\eta > 0$, $\eta < 1$. Тогда существует n_0 так, что для $n \geqq n_0$ будет уже $2R_n \leqq \eta$. Итак, для всех $n \geqq n_0$ и для $\alpha > 1$ будет

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{\langle x_0 \rangle'\} \leqq 2^{\phi(n)} \mu^{(\alpha)}(2R_n)\,. \tag{17}$$

Примем во внимание, что

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) = 2^{-\alpha\phi\,([-\log(2R_n)]/\log 2)}\,.$$

Так как $2^{n+1}R_n \to |W| > 0$, отсюда следует, что для всех $n \geqq n_1 \geqq n_0$ будет

$$2R_n < \frac{|W| + 1}{2^n} = \frac{C_1}{2^n}\,, \quad C_1 = |W| + 1 > 1\,.$$

Ввиду того, что ϕ — неубывающая функция, для любого $n \geqq n_1$ будет

$$2^{-\alpha\phi\,([-\log(2R_n)]/\log 2)} \leqq 2^{-\alpha\phi\,([-\log(c_1 2^{-n})]/\log 2)} = 2^{-\alpha\phi(n-c_2)}\,,$$

где $C_2 = \log c_1/\log 2 > 0$. Подставив это в (17), мы получим

$$(18) \qquad \mu_\eta^{(\alpha)}\{\langle x_0\rangle'\} \leqq 2^{\phi(n)-\alpha\phi(n-c_2)}\,.$$

Можно предположить, что n_1 выбрано настолько большим, что $n - c_2 > 1$. Если теперь положить $[n - c_2] = n'$, то $n - n' < c_2 + 1$ и далее

$$\phi(n - c_2) \geqq \phi(n') = f(n, x_0) - \psi(n', n)\,,$$

где $\psi(n', n)$ означает количество чисел 1 в последовательности

$$\varepsilon_{n'+1}^0, \varepsilon_{n'+2}^0, \ldots, \varepsilon_n^0\,,$$

итак, $\psi(n', n) \leqq n - n' < c_2 + 1 = c_3$, так что

$$\phi(n - c_2) > f(n, x_0) - c_3\,.$$

Подставив это в (18), получим

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{\langle x_0\rangle'\} \leqq c_4 2^{(-\alpha+1)f(n,x_0)}\,, \quad c_4 = 2^{\alpha c_3}\,.$$

Отсюда следует

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{\langle x_0\rangle'\} \leqq \liminf_{n\to\infty} c_4 2^{(-\alpha+1)f(n,x_0)}$$

и ввиду условия теоремы $f(n, x_0) \to +\infty$, правая часть последнего неравенства равна нулю, так что

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{\langle x_0\rangle'\} = 1 = 0 \quad \text{для любого } \eta > 0,\ \eta < 1\,.$$

Итак, $\mu^{(\alpha)}\{\langle x_0\rangle'\} = 0$, $\dim_F \langle x_0\rangle = \dim_F \langle x_0\rangle' \leqq 1$.

b) Покажем, что $\dim_F \langle x_0\rangle \geqq 1$. Для доказательства используем теорему 1. Условия теоремы 1, очевидно, выполнятьются, $\langle x_0\rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n состоит из конечного числа $g_n = 2^{f(n,x_0)}$ непересекающихся замкнутых интервалов одинаковой длины $2R_n$, и каждый интервал системы K_n содержит одно и то же число интервалов системы K_{n+1}. Далее, $\lambda_n = 2R_n \to 0$ и $\tau(n) = \lambda_{n+1}/\lambda_n = R_{n+1}/R_n$. Так как $2^{n+1}R_n \to |W| > 0$, то

$$\tau(n) = \frac{1}{2}\,\frac{2^{n+2}R_{n+1}}{2^{n+1}R_n} \to \frac{1}{2} > 0\,,$$

следовательно,

$$l = \liminf_{n\to\infty} \tau(n) = 1/2 > 0\,.$$

Итак, по теореме 1 достаточно еще доказать, что для всякого α, $0 < \alpha < 1$ будет

$$\lim_{n\to\infty} g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = +\infty\,.$$

Итак, пусть $0 < \alpha < 1$, тогда $g_n = 2^{\phi(n)}$ и для всех $n \geqq n_0$ будет $2R_n < 1$,

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) = 2^{-\alpha\phi([-\log(2R_n)]/\log 2)}.$$

Так как $2^{n+1}R_n \to |W| > 0$, то существует $n_2 \geqq n_0$ так, что для $n \geqq n_2$ будет

$$2R_n > \frac{c_5}{2^n}, \quad c_5 = \frac{|W|}{2} > 0\,.$$

Итак, для всякого $n \geqq n_2$ будет

$$(19) \qquad \mu^{(\alpha)}(2R_n) \geqq 2^{-\alpha\phi([-\log(c_5 2^{-n})]/\log 2)} = 2^{-\alpha\phi(n-c_6)}, \quad c_6 = \frac{\log c_5}{\log 2}\,.$$

Можно предположить, что n_2 выбрано уже настолько большим, чтобы $n - c_6 >$ > 1. Возьмем целое число c_7 так, чтобы $n - c_7 \geqq n - c_6$, откуда с учетом (19) следует

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) \geqq 2^{-\alpha\phi(n-c_7)}\,.$$

Очевидно (как и в а)) $\phi(n - c_7) \leqq \phi(n) + |c_7|$, и следовательно,

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) \geqq c_8 2^{-\alpha\phi(n)}, \quad c_8 = 2^{-\alpha|c_7|} > 0\,.$$

Таким образом мы получаем

$$g_n\mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = 2^{\phi(n)}\mu^{(\alpha)}(2R_n) \geqq c_8 2^{(1-\alpha)\phi(n)}\,.$$

Так как по условию теоремы $\phi(n) \to +\infty$, следует отсюда

$$g_n\mu^{(\alpha)}(\lambda_n) \to +\infty\,.$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. В доказательстве теоремы 1 в работе [2] при использовании теоремы Эггльстона встречается небольшой пробел. Автор здесь исследует множество $\langle\rho\rangle_g$ всех тех чисел $\sigma \in (0, 1\rangle$, $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} f_i/g^i$ (g-адическое разложение, $g \geqq 2$, для бесконечного количества i имеет место $f_i \neq 0$), для которых $f_i \leqq c_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$), причем $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} c_i/g^i$ есть g-адическое разложение фиксированного числа $\rho \in (0, 1\rangle$, для бесконечного количества i будет $c_i \neq 0$.

Размерность множества $\langle\rho\rangle_g$ в работе [2] определена по отношению к системе F измеряющих функций $\mu^{(\alpha)}(t)$, определенных для $0 \leqq t \leqq 1$, следующим образом: $\mu^{(\alpha)}(0) = 0$, а для $t \in (0, 1\rangle$ будет

$$\mu^{(\alpha)}(t) = g^{-\alpha G(-\log t/\log g)}\,,$$

где $G(x)$ — неубывающая и непрерывная функция для $x \geqq 0$ и для всякого натуральнохо n имеет место

$$g^{G(n)} = \prod_{i=1}^{n}(1 + c_i)\,.$$

Автор здесь получает в своих рассуждениях (при использовании теоремы Эггльстона) бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{1-G(n)+\alpha G(n)}\,, \quad 0 < \alpha < 1\,,$$

и утверждает, что из $G(n) \to \infty$ вытекает сходимость этого ряда, и на основании этого получает нижнюю оценку для $\dim_F \langle \rho \rangle_g$. Однако, из $G(n) \to \infty$, вообще говоря, еще не следует сходимость этого ряда (ряд определенно не сходится, если $G(n)$ возрастает достаточно медленно до $+\infty$, напр. если для всех достаточно больших n будет $G(n) \leqq [\log \log n]$). Цель этого замечания — восполнить указанный пробел. Мы сделаем это так, что вместо теоремы Эггльстона воспользуемся теоремой 1 из настоящей работы.

Обозначим через K_n множество, состоящее из всех тех интервалов $\langle k/g^n, (k+1)/g^n \rangle$, которые принадлежат к таким последовательностям цифр $f_1, f_2, \ldots, f_n$, что $f_i \leqq c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(\langle k/g^n, (k+1)/g^n \rangle$ принадлежит к $f_1, f_2, \ldots, \ldots, f_n$, если для всякого $\sigma \in (k/g^n, (k+1)\, g^n)$ будет $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i/g^i$, причем $f'_i = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n))$. Сразу видно, что

$$\langle \rho \rangle_g \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n - \langle \rho \rangle_g$$

есть счетное множество. Поэтому

$$\dim_F \langle \rho \rangle_g = \dim_F \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n .$$

Множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1. Интервалы системы K_n не имеют (по-парно) общих внутренних точек и каждый интервал системы K_n содержит одно и то же (равное $1 + c_{n+1}$) число интервалов системы K_{n+1}, далее,

$\lambda_n = 1/g^n \to 0$ и $\tau(n) = 1/g$, следовательно, $\liminf_{n \to \infty} \tau(n) = 1/g > 0$. Далее, для $\alpha < 1$ будет

$$g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = g^{G(n)} \mu^{(\alpha)}(1/g^n) = g^{(1-\alpha)G(n)} \to +\infty ,$$

так как $1 - \alpha > 0$ и $G(n) \to +\infty$. Из теоремы 1 мы тогда действительно получаем

$$\dim_F \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \dim_F \langle \rho \rangle_g \geqq 1 .$$

Пусть, далее, W имеет указанное ранее значение, относительно меры W мы пока не делаем никаких предположений. Пусть $0 \leqq \eta \leqq 1$. Обозначим символом:

$W_1^*(\eta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $D^*(f, x) = \eta$;
$W_2^*(\eta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $D_1^*(f, x) = \eta$;
$W_3^*(\eta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $D_2^*(f, x) = \eta$;
$W_4^*(\eta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых η является предельной точкой последовательности $\{f(n, x)/n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть в дальнейшем $\tilde{M}$ означает множество, являющееся зеркальным образом множества M относительно точки 0.

Лемма 5. *Для* $\leqq \zeta \leqq 1$ *имеет место*

$$W_4^*(\zeta) = \tilde{W}_4^*(1 - \zeta)\,.$$

Доказательство. Пусть $x \in W_4^*(\zeta)$, тогда $\{f(n, x)/n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку ζ. Рассмотрим число $-x \in W$; очевидно, будет $f(n, -x) = g(n, x)$ и поэтому $\{f(n, -x)/n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку $1 - \zeta$, следовательно, $-x \in \in W_4^*(1 - \zeta)$, $x \in \tilde{W}_4^*(1 - \zeta)$ и наоборот.

Следствие.

$$W_2^*(\zeta) = \tilde{W}_3^*(1 - \zeta)\,, \quad W_3^*(\zeta) = \tilde{W}_2^*(1 - \zeta)\,, \quad W_1^*(\zeta) = \tilde{W}_1^*(1 - \zeta)$$

(см. доказательство предыдущей леммы).

Теорема 5. *Пусть* $|W| > 0$, $0 \leqq \zeta \leqq 1$. *Положим*

$$R(\zeta) = \bigcup W_4^*(\eta)\,, \quad |\tfrac{1}{2} - \eta| \geqq |\tfrac{1}{2} - \zeta|\,.$$

Пусть $Q(\zeta)$ — *какое-либо множество, удовлетворяющее условию* $W_1^*(\zeta) \subset \subset Q(\zeta) \subset R(\zeta)$. *Утверждение*:

$$\dim Q(\zeta) = \mathrm{d}(\zeta) = [\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta)]/\log \tfrac{1}{2}\,, \quad (d(0) = d(1) = 0).$$

Слесдтвие. Для каждого $\zeta \in \langle 0, 1 \rangle$ имеет место

$$\dim W_j^*(\zeta) = \mathrm{d}(\zeta) \quad (j = 1, 2, 3, 4)\,,$$

так как

$$W_1^*(\zeta) \subset W_j^*(\zeta) \subset R(\zeta) \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Доказательство теоремы. Примем во внимание, что $\dim M = \dim \tilde{M}$. Если теорема справедлива для какого-либо ζ, то она справедлива и для $1 - \zeta$, так как

$$W_1^*(1 - \zeta) = \tilde{W}_1^*(\zeta) \subset \tilde{R}(\zeta) = R(1 - \zeta)\,.$$

Если, далее, теорема справедлива для любого ζ, $0 < \zeta \leqq 1$, то для такого ζ будет $R(0) \subset R(\zeta)$ и, следовательно,

$$\dim R(0) \leqq \lim_{\zeta \to 0+} \dim R(\zeta) = \lim_{\zeta \to 0+} \mathrm{d}(\zeta) = 0\,;$$

это значит, что теорема справедлива и для $\zeta = 0$.

Итак, можно уже предполагать, что $0 < \zeta \leqq \frac{1}{2}$. Если $\zeta = \frac{1}{2}$, то так же, как в работе [1] (доказательство теоремы 3,2), можно и теперь показать, что для множества $W(s)$, определенного так же, как и там, имеет место

$$\dim W(s) \geqq f(l)\,, \quad W(s) \subset W_1^*(\tfrac{1}{2})\,.$$

Из условия $|W| > 0$ следует $l = \liminf_{n \to \infty} \tau(n) = \frac{1}{2}$, значит,

$$f(\tfrac{1}{2}) = 1\,, \quad \dim Q(\tfrac{1}{2}) = \dim R(\tfrac{1}{2}) = 1\,.$$

Итак, достаточно ограничиться случаем, когда $\zeta \in (0, \frac{1}{2})$. Согласно доказательству теоремы 3,1 из работы [1] будет

$$\dim W_1^*(\zeta) = d(\zeta), \quad \dim R(\zeta) \geqq \dim Q(\zeta) \geqq \dim W_1^*(\zeta) \geqq d(\zeta).$$

Обозначим, как и в работе [1], через $W(\zeta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых неравенство

$$f(n, x) \leqq n\zeta \quad (0 < \zeta < \tfrac{1}{2})$$

имеет бесконечное количество решений в натуральных n. Положим далее

$$R_1(\zeta) = \bigcup_{\eta \in \langle 0, \zeta \rangle} W_4^*(\eta), \quad R_2(\zeta) = \bigcup_{\eta \in \langle 1-\zeta, 1 \rangle} W_4^*(\eta);$$

тогда $R(\zeta) = R_1(\zeta) \cup R_2(\zeta)$. Из леммы 5 сразу видно, что $\tilde{R}_2(\zeta) = R_1(\zeta)$, поэтому достаточно согласно следствию за леммой 4 показать, что $\dim R_1(\zeta) \leqq d(\zeta)$. Но это не представляет затруднений. Пусть $0 < \zeta < \zeta' < \frac{1}{2}$. Тогда, очевидно, $R_1(\zeta) \subset W(\zeta')$, так как для всякого $x \in R_1(\zeta)$неравенство $f(n, x) \leqq \zeta'$ имеет в смысле определения множества $R_1(\zeta)$ бесконечное количество решений в натуральных n. Итак, $\dim R_1(\zeta) \leqq d(\zeta')$ и отсюда согласно следствию за леммой 4

$$\dim Q(\zeta) \leqq \dim R(\zeta) = \dim R_1(\zeta) \leqq \lim_{\zeta' \to \zeta+} d(\zeta') = d(\zeta).$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Доказанная только-что теорема является аналогом одного результата Б. Фолькмана, доказанного для диадических разложений действительных чисел (см. [4]).

Согласно предыдущему имеем $\dim W_1^*(0) = 0$. Естественно возникает вопрос: Исследовать размерность некоторых подмножеств множества $W_1^*(0)$ по отношению к подходящей системе измеряющих функций. Обозначим при $\zeta > 0$ и $0 < \beta < 1$ через $W_1^*(0, \zeta, \beta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $\lim_{n \to \infty} f(n, x)/n^\beta = \zeta$.

Очевидно, $W_1^*(0, \zeta, \beta) \subset W_1^*(0)$. Для $t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ и для $\alpha > 0$ определим функции $\mu^{(\alpha)}(t)$ следующим образом:

$$\mu^{(\alpha)}(0) = 0 \quad \text{и для} \quad 0 < t \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \mu^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log 2}{-\log t}\right)^{([-\log t]/\log 2)^\alpha}.$$

Сразу видно, что для фиксированного $\alpha \in (0, +\infty)$ функция $\mu^{(\alpha)}(t)$ будет неубывающей и неотрицательной и равной нулю только при $t = 0$. Если $\alpha' > \alpha$ и если обозначить $(-\log t)/\log 2 = T(t) = T$, то $\lim_{t \to 0+} T(t) = +\infty$, и для $t \in (0, \frac{1}{2} \rangle$ будет

$$\mu^{(\alpha')}(t)/\mu^{(\alpha)}(t) = T^{(T^\alpha - T^{\alpha'})}.$$

Так как $T^\alpha - T^{\alpha'} \to -\infty$, если $t \to 0+$, то мы непосредственно получаем

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\mu^{(\alpha')}(t)}{\mu^{(\alpha)}(t)} = 0.$$

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма:

Лемма 6. *Пусть* $0 < \beta < 1$, $\gamma > 0$. *Тогда для каждого* ε, $0 < \varepsilon < \beta$ *существует* $n_0(\varepsilon)$ *так, что для всех* $n \geqq n_0(\varepsilon)$

$$n^{n^{\beta-\varepsilon}} < \binom{n}{[\gamma n^\beta]} < n^{n^{\beta+\varepsilon}}.$$

Доказательство. Смотри [6].

Приступим к вычислению размерности множества $W_1^*(0, \zeta, \beta)$ по отношению к системе F только-что определенных измеряющих функций.

Теорема 6. *Пусть* $|W| > 0$, $\zeta > 0$, $0 < \beta < 1$. *Обозначим через* $W_1^*(0, \zeta, \beta)$ *множество всех тех* $x \in W$, *для которых*

$$\lim_{n\to\infty} f(n, x)/n^\beta = \zeta .$$

Утверждение: $\dim\limits_F W_1^*(0, \zeta, \beta) = \beta$.

Доказательство. а) Покажем, что $\dim\limits_F W_1^*(0, \zeta, \beta) \leqq \beta$. Пусть $\alpha > \beta$, пусть $0 < \varepsilon < \zeta$, $\varepsilon < \beta$, $\beta + \varepsilon < \alpha$. Обозначим при фиксированном n через $T_n(\varepsilon)$ систему всех тех i_n^k $(1 \leqq k \leqq 2^n)$, которые принадлежат к таким последовательностям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, что количество чисел 1 в этих последовательностях является целым числом из интервала $\langle(\zeta - \varepsilon)\, n^\beta, (\zeta + \varepsilon)\, n^\beta\rangle$. Если $N(M)$ означает число элементов конечного множества M, то очевидно

$$N(T_n(\varepsilon)) = \sum_f \binom{n}{f}.$$

Суммирование производится по всем целым f, лежащим в интервале $\langle(\zeta - \varepsilon)\, n^\beta$, $(\zeta + \varepsilon)\, n^\beta\rangle$. Сравним $\binom{n}{f}$ с $\binom{n}{f+1}$. Мы получим

$$\binom{n}{f} : \binom{n}{f+1} = \frac{f+1}{n-f} \leqq \frac{(\zeta+\varepsilon)\, n^\beta + 1}{n - (\zeta+\varepsilon)\, n^\beta} \leqq 1$$

для всех достаточно больших n. Для этих n заменим каждое слагаемое $\binom{n}{f}$, $f < [(\zeta + \varepsilon)\, n^\beta]$ в сумме $\sum_f \binom{n}{f}$ слагаемым $\binom{n}{f+1}$; последовательным применением этой операции мы заменим каждое слагаемое в этой сумме слагаемым $\binom{n}{[(\zeta+\varepsilon)\, n^\beta]}$. Принимая во внимание, что число слагаемых $\leqq 2\varepsilon n^\beta + 1$, мы получим согласно предыдущему для всех достаточно больших n $(n \geqq n_1)$

$$N(T_n(\varepsilon)) \leqq 3\varepsilon n^\beta \binom{n}{[(\zeta+\varepsilon)\, n^\beta]}. \tag{20}$$

Заменив каждый интервал $i \in T_n(\varepsilon)$ можеством всех его внутренних точек, мы получим новую систему $T'_n(\varepsilon)$ вместо $T_n(\varepsilon)$. Очевидно, $\bigcup_{n=k}^{\infty} T'_n(\varepsilon)$ является $2R_k$-покрытием множества $W_1^*(0, \zeta, \beta)$; (действительно, конец интервала i_n^k, $n \geqq 1$, $1 \leqq k \leqq 2^n$, не может быть элементом множества $W_1^*(0, \zeta, \beta)$, так как такая точка имеет или такой вид: $x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n$, или такой $x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n$ и, следовательно, для нее будет или $D^*(f, x) = 1$, или $\{f(k, x)\}_{k=1}^{\infty}$ будет сверху ограничена, значит, не может быть $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n, x)}{n^{\beta}} = \zeta > 0$).

Возьмем теперь k_0 настолько большим, чтобы $2R_{k_0} \leqq \eta \leqq \frac{1}{2}$ и $k_0 \geqq n_1$. Тогда для всякого $k \geqq k_0$ будет

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{W_1^*(0, \zeta, \beta)\} \leqq \sum_{n=k}^{\infty} N(T'_n(\varepsilon))\, \mu^{(\alpha)}(2R_n)\,. \tag{21}$$

Так как $2^{n+1}R_n \to |W| > 0$, то для всех $n \geqq k_1 \geqq k_0$ уже будет $2R_n < K2^{-n}$ $K > 1$. Так как $\mu^{(\alpha)}$ — неубывающея функция, для этих n мы получим

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) \leqq \mu^{(\alpha)}(K2^{-n}) = (n - c)^{-(n-c)^{\alpha}}\,, \tag{22}$$

где

$$c = \frac{\log K}{\log 2} > 0\,.$$

Для $x > 1$ положим $\phi(x) = x^{-x^{\alpha}}$. Сразу видно, что для $x > 1$ — это убавающая функция и $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = 0$. Нетрудно убедиться, что для каждого фиксированного t будет

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\phi(x + t)}{\phi(x)} = 1\,.$$

Действительно,

$$\phi(x + t)/\phi(x) = \exp\left[-\,(x + t)^{\alpha} \log(x + t) + x^{\alpha} \log x\right],$$

и сразу видно, что при $0 < \alpha < 1$ выражение в скобках сходится при $x \to \infty$ к 0. Отсюда непосредственно следует для всех достаточно больших n ($n \geqq k_2 \geqq k_1$)

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) \leqq Dn^{-n^{\alpha}}\,, \quad 0 < D\,.$$

Далее уже достаточно показать только то, что ряд

$$\sum_{n=k_2}^{\infty} N(T'_n(\varepsilon))\, \mu^{(\alpha)}(2R_n) \tag{25}$$

сходится, ибо тогда будет

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{W_1^*(0, \zeta, \beta)\} \leqq \lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} N(T'_n(\varepsilon))\, \mu^{(\alpha)}(2R_n) = 0\,,$$

а так как это имеет место для всякого $\eta > 0$, $\eta \leqq \frac{1}{2}$, то

$$\mu^{(\alpha)}\{W_1^*(0, \zeta, \beta)\} = 0\,, \quad \dim_F W_1^*(0, \zeta, \beta) \leqq \beta\,.$$

Сходимость ряда (25) следует из критерия сравнения. Действительно, мы имеем

$$N(T'_n(\varepsilon))\,\mu^{(\alpha)}(2R_n) \leqq N(T_n(\varepsilon))\,\mu^{(\alpha)}(2R_n) \leqq 3\varepsilon n^\beta n^{n^{\beta+\varepsilon}} D n^{-n^\alpha}$$

согласно (20), (22) и лемме 6. Итак, если положить $t' = \alpha - \beta - \varepsilon > 0$, общий член ряда (25) будет

$$\leqq n^{n^{\beta+\varepsilon}(1-n^{t'})+O(1)} < n^{-2}$$

для всех достаточно больших n

b) Покажем, что $\dim_F W_1^*(0, \zeta, \beta) \geqq \beta$. Обозначим для натуральных n, s, $s > 1$ и для данного $\zeta > 0$ через $W^*(n, s, \zeta)$ множество всех тех интервалов i_{ns}^k, $1 \leqq k \leqq 2^{ns}$, для которых имеет место: i_{ns}^k принадлежит к такой последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}$, что для всякого $i = 1, 2. \ldots, n$ количество чисел 1 в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{is}$ равно числу $[\zeta(is)^\beta]$. Положим

$$W^*(s, \zeta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W^*(n, s, \zeta)\,.$$

Тогда, очевидно, $W^*(s, \zeta) \subset W_1^*(0, \zeta, \beta)$, и нам достаточно показать, что

$$\dim_F W^*(s, \zeta) \geqq \beta\,.$$

Положим

$$[(n+1)^\beta s^\beta \zeta] - [n^\beta s^\beta \zeta] = p(n, s)\,.$$

Сразу видно, что для всех достаточно больших n выражение $p(n, s)$ примет одно из значений 0, 1. Если какой-либо интервал $i \in W^*(n, s, \zeta)$ содержит интервал $j \in W^*(n+1, s, \zeta)$, и если i принадлежит к последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}$, то j принадлежит к последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}, f_1, f_2, \ldots, f_s$, причем количество чисел 1 в последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_s$ равно $p(n, s)$. Отсюда сразу видно, что каждый интервал $i \in W^*(n, s, \zeta)$ содержит одинаковое количество интервалов из $W^*(n+1, s, \zeta)$. Обозначим через $g_{n,s}$ число интервалов системы $W^*(n, s, \zeta)$; тогда каждый интервал системы $W^*(n, s, \zeta)$ содержит

$$\frac{g_{n+1,s}}{g_{n,s}} = \binom{s}{p(n, s)}$$

интервалов системы $W^*(n+1, s, \zeta)$. Притом число $\binom{s}{p(n, s)}$ для всех достаточно больших n $(n \geqq N_0)$ равно или s (если $p(n, s) = 1$), или 1 (если $p(n, s) = 0$).

При фиксированном n $(n > N_0)$ количество тех l, $N_0 \leqq l < n$, для которых $p(l, s) = 1$, равно, очевидно, числу

$$[n^\beta s^\beta \zeta] - [N^\beta s^\beta \zeta] \geqq n^\beta s^\beta \zeta - N_0^\beta s^\beta \zeta - 1 > c_2 s^\beta n^\beta\,, \quad 0 < c_2 < 1\,,$$

причем последнее неравенство справедливо для всех достаточно больших n $(n \geqq N_1 \geqq N_0)$.

Отсюда получаем

$$(26)\qquad g_{n,s} = g_{N_0,s} \prod_{k=N_0}^{n-1} \frac{g_{k+1,s}}{g_{k,s}} \geqq s^{c_2 s^\beta n^\beta} .$$

Применим теперь теорему 1. При обозначениях теоремы 1 имеем $\lambda_n = 2R_{ns}$, $g_n = g_{n,s}$. Далее,

$$l = \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{1}{2^s} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)s+1} R_{(n+1)s}}{2^{ns+1} R_{ns}} = \frac{1}{2^s} > 0 .$$

Согласно теореме 1 достаточно показать, что для каждого α, $0 < \alpha < \beta$ будет

$$\lim_{n\to\infty} g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = +\infty .$$

Но для всех достаточно больших n мы имеем согласно (26) $(0 < \alpha < \beta)$

$$g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) \geqq s^{c_2 s^\beta n^\beta} \mu^{(\alpha)}(2R_{ns}) ,$$

и аналогично для всех достаточно больших n (относительно $2^{n+1}R_n \to |W|$) имеем

$$2R_{ns} \geqq \frac{K_2}{2^{ns}}, \quad K_2 > 0 .$$

Ввиду того, что $\mu^{(\alpha)}$ — неубывающая функция, мы получим для всех достаточно больших n

$$g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) \geqq s^{c_2 s^\beta n^\beta} \mu^{(\alpha)}(K_2 2^{-ns}) = s^{c_2 s^\beta n^\beta} (ns - c_1)^{-(ns-c_1)^\alpha}, \quad c_1 = \frac{\log K_2}{\log 2} .$$

Уже в первой части доказательства мы видели, что функция $\phi(x) = x^{-x^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ является для $x > 1$ убывающей функцией и, как нетрудно убедиться, и как мы уже, впрочем, видели, $\lim_{x\to\infty} \phi(x+t)/\phi(x)] = 1$ при фиксированном t, отсюда следует

$$(ns - c_1)^{-(ns-c_1)^\alpha} > K_3 (ns)^{-(ns)^\alpha}, \quad 0 < K_3 < 1$$

для всех достаточно больших n. Итак, для всех n, начиная с некоторого значения, мы имеем

$$g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) \geqq K_3 s^{c_2 s^\beta n^\beta} (ns)^{-(ns)^\alpha} =$$

$$= \exp\,[c_2 s^\beta n^\beta \log s - s^\alpha n^\alpha \log n - s^\alpha n^\alpha \log s + \log K_3] \geqq$$

$$\geqq \exp\,[c_2 s^\beta n^\beta \log s - 2s^\alpha n^\alpha \log n] \geqq \exp\,(s^\alpha n^\alpha \log n) \quad (\text{так как } 0 < \alpha < \beta).$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Доказанная только-что теорема является аналогом одного результата Фолькмана (см. теорему 2 из работы [6]), полученного при изучении g-адических разложений действительных чисел при помощи теоремы Эгглcстона.

Замечание. *Я. Курцвейль* обратил внимание на то, что мы получили бы тот же результат в теореме 6, взяв следующую более простую систему измеряющих функций:

$$\mu^{(\alpha)}(0) = 0 \text{ и для } 0 < t \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \mu^{(\alpha)}(t) = \exp(|\log t|^{\alpha}).$$

Обозначим, далее, при $0 < \beta < 1$, $\zeta > 0$ символом:

$W_2^*(0, \zeta, \beta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n, x)}{n^{\beta}} = \zeta$;

$W_3^*(0, \zeta, \beta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых $\limsup\limits_{n\to\infty} f(n, x)/n^{\beta} = \zeta$;

$W_4^*(0, \zeta, \beta)$ множество всех тех $x \in W$, для которых ζ является предельной точкой последовательности $\{f(n, x)/n^{\beta}\}_{n=1}^{\infty}$ (в определении $W_4^*(0, \zeta, \beta)$ мы допускаем и значение $\zeta = 0$). Положим далее для $\zeta \geqq 0$

$$R(\zeta, \beta) = \bigcup_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} W_4^*(0, \eta, \beta).$$

Теорема 7. *Пусть* $\zeta > 0$, $0 < \beta < 1$, $|W| > 0$. *Пусть* $Q(\zeta, \beta)$ *удовлетворяет условиям*

$$W_1^*(0, \zeta, \beta) \subset Q(\zeta, \beta) \subset R(\zeta, \beta).$$

Утверждение: $\dim\limits_F Q(\zeta, \beta) = \beta$.

Следствие. Так как, очевидно,

$$W_1^*(0, \zeta, \beta) \subset W_j^*(0, \zeta, \beta) \subset R(\zeta, \beta) \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

то

$$\dim_F W_j^*(0, \zeta, \beta) = \beta \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Доказательство теоремы. Из условия теоремы непосредственно следует

$$\dim_F R(\zeta, \beta) \geqq \dim_F Q(\zeta, \beta) \geqq \dim_F W_1^*(0, \zeta, \beta) = \beta.$$

Достаточно еще показать, что $\dim\limits_F R(\zeta, \beta) \leqq \beta$.

Пуст $\vartheta > \zeta$. Обозначим через $T_n(\vartheta)$ множество всех тех интервалов i_n^k, $1 \leqq k \leqq n$, которые принадлежат к таким последовательностям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ в которых количество чисел 1 меньше или равно числу $[\vartheta n^{\beta}]$. Если снова $N(M)$ означает число элементов множества M, то получим

$$N(T_n(\vartheta)) = \sum_{i=0}^{[\vartheta n^{\beta}]} \binom{n}{i}.$$

Заменив каждый интервал $i \in T(\vartheta)$ множеством всех его внутренних точек, мы получим новую систему $T_n'(\vartheta)$ и, очевидно, $\bigcup\limits_{i=l}^{\infty} T(\vartheta)$ будет $2R_l$ – покрытием множества $R(\zeta, \beta)$ (см. часть а) доказательства предыдушей теоремы). Пусть

$\frac{1}{2} \geqq \eta > 0$, тогда мы придем быстрее к цели. Достаточно показать (см. доказательство предыдущей теоремы), что ряд

$$\sum_{n=l}^{\infty} N(T'_n(\vartheta))\, \mu^{(\alpha)}(2R_n)\,, \quad 2R_l \leqq \eta\,, \quad \alpha > \beta$$

сходится. Для доказательства его сходимости мы используем следующий результат Б. Фолькмана (см. [6], лемма 2):

Если $\chi(n)$ – положительная функция натурального аргумента n, принимающая только целые значения, и $\chi(n) = o(n)$, то

$$\sum_{i=0}^{\chi(n)} \binom{n}{i} < c_1 \binom{n}{\chi(n)}, \quad c_1 > 0$$

не зависит от n. Если положить $\chi(n) = [\vartheta n^\beta]$, то $\chi(n) = o(n)$, так что

$$\sum_{i=0}^{[\vartheta n^\beta]} \binom{n}{i} < c_1 \binom{n}{[\vartheta n^\beta]}.$$

Пусть теперь $\alpha > \beta$, возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\alpha - \varepsilon > \beta$; согласно лемме 6 тогда получим

$$N(T'_n(\vartheta)) = N(T_n(\vartheta)) < c_1 n^{n^{\beta+\varepsilon}}$$

для всех достаточно больших n. При доказательстве предыдущей теоремы мы уже видели, что для всех достаточно больших n будет также

$$\mu^{(\alpha)}(2R_n) < Dn^{-n^\alpha}\,, \quad 0 < D\,,$$

так что для всех достаточно больших n будет

$$N(T'_n(\vartheta))\, \mu^{(\alpha)}(2R_n) < Dc_1 n^{n^{\beta+\varepsilon}(1-n^{\alpha-\beta-\varepsilon})} < Dc_1 n^{-2}\,.$$

Отсюда уже следует утверждение теоремы.

Теперь мы перейдем к изучению нулевых дисконтинуумов (т. е. множеств W, для которых $|W| = 0$). Прежде всего покажем, что и в случае $|W| = 0$ можно часто вычислить размерность множества всех тех $x \in W$, для которых неравенство $f(n, x) \leqq n\zeta$ $(0 < \zeta < \frac{1}{2})$ имеет бесконечное количество решений в натуральных n. В этом отношении следующая теорема является расширением одной *теоремы Вл. Книхала* из работы [5] на нулевые дисконтинуумы W (см. также [1]).

Теорема 8. *Пусть* $|W| = 0$, $l = \liminf_{n\to\infty} \tau(n)$, $L = \limsup_{n\to\infty} \tau(n)$, $\tau(n) = R_{n+1}/R_n$, $0 < \zeta < \frac{1}{2}$. *Пусть* $W(\zeta)$ $(0 < \zeta < \frac{1}{2})$ *означает множество всех тех* $x \in W$, *для которых неравенство* $f(n, x) \leqq n\zeta$ *имеет бесконечное количество решений в натуральных* n. *Утверждение*: $d(\zeta) f(l) \leqq \dim W(\zeta) \leqq \mathrm{d}(\zeta) f(L)$, *где*

$$d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta)}{\log \frac{1}{2}} \quad (d(0) = d(1) = 0)\,,$$

$$f(0) = 0 \text{ и } f(t) = \log 2/\log t^{-1} \text{ для } 0 < t \leqq \tfrac{1}{2}\,.$$

Следствие. Если существует $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$, то

$$\dim W(\zeta) = d(\zeta) f(l^*) = d(\zeta) \dim W .$$

Доказательство теоремы. а) Покажем, что $\dim W(\zeta) \leqq d(\zeta) f(L)$. Очевидно, можно ограничиться случаем $L > 0$ (для $L = 0$ будет $\dim W = 0$). Пусть $\alpha > d(\zeta) f(L)$. Для фиксированного n рассмотрим множество U_n всех тех $i_n^k \in J_n$, каждый из которых принадлежит к такой последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \ldots, \varepsilon_n$, что количество чисел 1 в $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ будет $\leqq [\zeta n]$. Количество g_n интервалов системы U_n равно

$$g_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{[\zeta n]} .$$

Согласно теореме 53 из работы [4] имеем $g_n = 2^{n d_n(\zeta)}$, где $d_n(\zeta) \to d(\zeta)$.

Пусть $\eta > 0$, Тогда для $n \geqq n_0$, где n_0 выбрано надлежащим образом, будет $2R_n \leqq \eta$. Пусть $W_1(\zeta)$ означает множество всех тех $x \in W(\zeta)$, которые входят в $\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_0}^{\infty} U_k^0$ (U_n^0 — множество всех внутренних точек множества U_n); тогда $W_1(\zeta) \subset W(\zeta)$ и $W(\zeta) - W_1(\zeta)$ является счетным множеством, следовательно, $\dim W_1(\zeta) = \dim W(\zeta)$. $\bigcup_{k=n_0}^{\infty} U_k^0$ является η-покрытием множества $W_1(\zeta)$. Как известно (см. доказательство теоремы 3,1 в [1]), достаточно показать, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} g_{n+1}(2R_{n+1})^\alpha < +\infty .$$

Примем во внимание, что

$$2R_{n+1} = 2R_1 \tau(1)\, \tau(2) \ldots \tau(n) ,$$
$$(2R_{n+1})^\alpha = c_1 [\tau(1)\, \tau(2) \ldots \tau(n)]^\alpha , \quad c_1 = (2R_1)^\alpha .$$

Для числа $\alpha > d(\zeta) f(L) = d(\zeta)\, [\log 2/\log L^{-1}]$ подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\alpha > d(\zeta)\, [\log 2/\log (L + \varepsilon)^{-1}] , \quad L + \varepsilon < 1 .$$

Ввиду непрерывности (в L) правой части это возможно. Тогда

$$d(\zeta) \log 2 + \alpha \log (L + \varepsilon) < 0 .$$

Для всех $n \geqq n_1 \geqq n_0$ уже по определению числа L будет $\tau(n) < L + \varepsilon$. Поэтому

$$(2R_{n+1})^\alpha < c_1 c_2 (L + \varepsilon)^{n\alpha} , \quad \text{где}$$
$$c_1 = (2R_1)^\alpha , \quad c_2 = [\tau(1) \ldots \tau(n_1)]^\alpha (L + \varepsilon)^{-\alpha n_1} ,$$

так что, если положить $c_3 = c_1 c_2$, будет

$$g_{n+1}(2R_{n+1})^\alpha < c_3 2^{(n+1) d_{n+1}(\zeta)} (L + \varepsilon)^{n\alpha} = c_3 \exp [n d_{n+1}(\zeta) \log 2 +$$
$$+ n\alpha \log (L + \varepsilon) + O(1)] .$$

Положим $d_{n+1}(\zeta) = d(\zeta) + \omega(n)$, $\omega(n) \to 0$, тогда

$$g_{n+1}(2R_{n+1})^\alpha < c_3 \exp [n(d(\zeta) \log 2 + \alpha \log (L + \varepsilon) + \omega^*(n)) + O(1)] .$$

Так как $\omega^*(n) \to 0$, $\omega^*(n) = \omega(n) \log 2$, то для всех достаточно больших n будет на основании выбора числа ε

$$d(\zeta) \log 2 + \alpha \log (L + \varepsilon) + \omega(n) < -\delta\,, \quad \delta > 0\,;$$

отсюда уже следует утверждение.

b) Покажем, что $\dim W(\zeta) \geqq d(\zeta) f(l)$.

Если $l = 0$, то это очевидно ($f(0) = 0$).

Пусть поэтому $l > 0$. При натуральном s обозначим через $W(n, s, \zeta)$ множество всех тех $i^k_{n,s,\zeta}$ ($i^k_{n,s,\zeta} = i^l_{ns} \in J_{ns}$ для подходящего l), которые принадлежат к таким последовательностям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}$, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ количество чисел 1 в $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{is}$ равно числу $[\zeta is]$. Пусть $g_{n,s,\zeta}$ означает число интервалов системы $W(n, s, \zeta)$.

$$\text{Если } i^m_{n+1,s,\zeta} \subset i^k_{n,s,\zeta} \text{ и если } i^k_{n,s,\zeta}$$

принадлежит последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}$, то $i^m_{n+1,s,\zeta}$ принадлежит последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}, f_1, f_2, \ldots, f_s\,,$$

причем количество чисел 1 в $f_1, f_2, \ldots, f_s$ равно

$$[(n + 1)\, s\zeta] - [ns\zeta] = s\zeta_{n,s}\,.$$

Очевидно, $s\zeta - 1 < s\zeta_{n,s} < s\zeta + 1$. Из предыдущего ясно, что каждый интервал системы $W(n, s, \zeta)$ содержит одинаковое число (равное $g_{n+1,s,\zeta}/g_{n,s,\zeta}$) интервалов системы $W(n + 1, s, \zeta)$, $W(n + 1, s, \zeta) \subset W(n, s, \zeta)$. Положим далее

$$W(s, \zeta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W(n, s, \zeta)\,, \quad \text{имеем} \quad W(s, \zeta) \subset W(\zeta)\,. \tag{27}$$

Для всех s уже будет (см. доказательство теоремы 3,1 в [1])

$$g_{n+1,s,\zeta} \geqq 2^{nsd_s(\zeta)}\,, \tag{28}$$

где $d_s(\zeta)$ — снова такая функция, что $\lim_{s \to \infty} d_s(\zeta) = d(s)$. Пусть $0 < \alpha < d(\zeta) f(l)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < l$ и чтобы

$$\alpha < d(\zeta)[\log 2/\log (l - \varepsilon)^{-1}]\,.$$

Из этого выбора числа ε следует

$$d(\zeta) \log 2 + \alpha \log (l - \varepsilon) > 0\,.$$

Согласно теореме 1 достаточно показать, что для подходящего s будет

$$\lim_{n \to \infty} g_{n+1,s,\zeta}(2R_{(n+1)s})^\alpha = +\infty\,.$$

Мы имеем (см. (28))

$$g_{n+1,s,\zeta}(2R_{(n+1)s})^\alpha \geqq c_1 2^{nsd_s(\zeta)}[\tau(1)\, \tau(2) \ldots \tau((n + 1)\, s - 1)]^\alpha\,, \quad c_1 = (2R_1)^\alpha\,.$$

По определению числа l существует n_0 так, что для всякого $j \geqq n_0$ будет $\tau(i) > > l - \varepsilon$. Тогда, положив $c_1[\tau(1) \dots \tau(n_0 - 1)]^\alpha = c_2$, мы получим

$$g_{n+1,s,\zeta}(2R_{(n+1)s})^\alpha \geqq c_3 2^{nsd_s(\zeta)}(l - \varepsilon)^{(n+1)s\alpha}, \quad c_3 = c_2(l - \varepsilon)^{-n_0\alpha} > 0 ;$$

c_3 не зависит ни от n, ни от s. Отсюда следует

$$g_{n+1,s,\zeta}(2R_{(n+1)s})^\alpha \geqq c_3 \exp\left[ns\left(d(\zeta)\log 2 + \alpha \log(l - \varepsilon) + \omega(s)\right) + O(s)\right],$$

где $\omega(s) = (d_s(\zeta) - d(\zeta))\log 2 \to 0$, если $s \to \infty$. Теперь мы наложим на s еще условие

$$d(\zeta)\log 2 + \alpha\log(l - \varepsilon) + \omega(s) > 0 ;$$

тогда, при выбранном таким образом, фиксированном s будет, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1,s,\zeta}(2R_{(n+1)s})^\alpha = +\infty .$$

Доказательство теоремы закончено.

Следующая теорема является распространением теоремы 5 на некоторые нулевые дисконтинуумы W.

Теорема 9. *Пусть* $|W| = 0$ *и пусть существует* $l^* = \lim\limits_{n\to\infty} \tau(n) > 0$. *Для* $0 \leqq \zeta \leqq 1$ *положим*

$$R(\zeta) = \bigcup_{|\frac{1}{2}-\eta| \geqq |\frac{1}{2}-\zeta|} W_4^*(\eta) .$$

Пусть $Q(\zeta)$ *— множество, удовлетворяющее соотношениям* $W_1^*(\zeta) \subset Q(\zeta) \subset R(\zeta)$. *Утверждение*: $\dim Q(\zeta) = d(\zeta) \dim W$.

Следствие. Для всякого $\zeta \in \langle 0, 1 \rangle$ будет

$$\dim W_j^*(\zeta) = d(\zeta) \dim W \quad (j = 1, 2, 3, 4) .$$

Доказательство теоремы. Как и при доказательстве теоремы 5 убедимся, что можно ограничиться случаем $0 < \zeta \leqq \frac{1}{2}$. Если $\zeta = \frac{1}{2}$, то примем во внимание, что в работе [1] (теорема 3,2) было доказано, что $\dim W_1^*(\frac{1}{2}) = \dim W$; итак, теорема справедлива для $\zeta = \frac{1}{2}(d(\frac{1}{2}) = 1)$. Следовательно можно ограничиться даже интервалом $0 < \zeta < \frac{1}{2}$.

(a) Если $W(s, \zeta)$ — множество из предыдущей теоремы, то из доказательства предыдущей теоремы (теорема 8, часть b) доказательства), обсуждающей $W(\zeta)$, следует, что для подходящего s

$$\dim W(s, \zeta) \geqq d(\zeta) \dim W ,$$

причем $W(s, \zeta) \subset W_1^*(\zeta)$.

(b) Пусть $0 < \zeta < \zeta' < \frac{1}{2}$; так же, как и при доказательстве теоремы 5 ($R_1(\zeta)$ имеет то же значение, как и в теореме 5), убедимся, что

$$R_1(\zeta) \subset W(\zeta') , \quad \dim R(\zeta) = \dim R_1(\zeta) ,$$

$$\dim Q(\zeta) \leqq \dim R(\zeta) \leqq \lim_{\zeta' \to \zeta+} d(\zeta') \dim W = d(\zeta) \dim W .$$

Доказательство теоремы закончено.

Далее докажем справедливотсь теоремы, которая с точки зрения теории меры говорит о превосходстве тех чисел $x \in W$, которые содержат в своих разложениях по знакам „приблизительно одинаковое“ количество факторов 1, -1. Эта теорема является аналогом известной теоремы Бореля о диадических разложениях действительных чисел и дает (по крайней мере в случае некоторого широкого класса нулевых дисконтинуумов W) положительный ответ на вопрос, который поставил в свое время *В. Ярник*.

Теорема 10. *Пусть* $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *и для всякого* $k = 1, 2, \ldots, a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$. *Пусть* W *означает множество всех* x, $x = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = 1$ *или* -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Предположим далее, что существует* $l^* = \lim_{n \to \infty} \tau(n)$, $0 < l^* < \frac{1}{2}$, *и что для всех достаточно больших* n $(n \geqq N)$ *имеет место* $\tau(n) \geqq l^*$. *Утверждение*:

$$\mu^{(\alpha)}\{W_1^*(\tfrac{1}{2})\} > 0\,, \quad \mu^{(\alpha)}\{W - W_1^*(\tfrac{1}{2})\} = 0\,, \quad \text{где} \quad \alpha = \dim W\,.$$

Замечание (a). Так как $l^* < \frac{1}{2}$, то $\dim W < 1$ и, следовательно, $|W| = 0$.

(b) Согласно сформулированной теореме существует α-мерная мера Хаусдорфа, принимающая положительное значение на множестве $W_1^*(\frac{1}{2})$ и нулевое на множестве $W - W_1^*(\frac{1}{2})$; итак, в смысле этой меры почти для всех $x \in W$ будет $D^*(f, x) = \frac{1}{2}$. В упомянутой теореме Бореля, однако, роль меры $\mu^{(\alpha)}$ играет мера Лебега.

(c) Примером множества, удовлетворяющего условиям указанной теоремы 10, является множество W, соответствующее геометрическому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} K^{-n}$, $K > 2$.

Доказательтсво теоремы. Обозначим

$$R'(\zeta) = \bigcup_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} W_4^*(\eta) \quad \text{для} \quad 0 \leqq \zeta \leqq \tfrac{1}{2}\,,$$

$$R''(\zeta) = \bigcup_{\zeta \leqq \eta \leqq 1} W_4^*(\eta) \quad \text{для} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \zeta \leqq 1\,.$$

Тогда по теореме 9 будет (так как всегда $R'(\zeta) \subset R(\zeta)$, $R''(\zeta) \subset R(\zeta)$)

$$\dim R'(\zeta) = \dim R''(\zeta) = d(\zeta) \dim W\,.$$

Нетрудно убедиться, что функция $d(\zeta)$ достигает в интервале $\langle 0, 1 \rangle$ острого максимума в точке $\frac{1}{2}$, $d(\frac{1}{2}) = 1$. Положим далее

$$M' = \bigcup_{k=2}^{\infty} R'(\tfrac{1}{2} - 1/k)\,, \quad M'' = \bigcup_{k=2}^{\infty} R''(\tfrac{1}{2} + 1/k)\,.$$

Покажем, что $W - W_1^*(\frac{1}{2}) \subset M' \cup M''$. Действительно, если $x \in W - W_1^*(\frac{1}{2})$, то $\{f(n, x)/n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет некоторую предельную точку $\eta \neq \frac{1}{2}$. Если $\eta < \frac{1}{2}$, то существует k' так, что $\eta \leqq \frac{1}{2} - 1/k'$; если же $\eta > \frac{1}{2}$, то существует k'' так, что

$\eta \geqq \frac{1}{2} + 1/k''$. В обоих случаях $x \in M' \cup M''$. Обратное включение очевидно, так что имеет место даже

$$W - W_1^*(\tfrac{1}{2}) = M' \cup M''.$$

Согласно второй аксиоме внешней меры Каратеодори имеем

$$\mu^{(\alpha)}\{M'\} \leqq \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{(\alpha)}\{R'(\tfrac{1}{2} - 1/k)\}, \quad \alpha = \dim W,$$

и каждое слагаемое в правой части равно 0, так как для всякого $k = 2, 3, \ldots$ имеет место

$$\dim R'(\tfrac{1}{2} - 1/k) = d(\tfrac{1}{2} - 1/k)\,\alpha < \alpha,$$

следовательно, $\mu^{(\alpha)}\{M'\} = 0$; аналогично покажем, что $\mu^{(\alpha)}\{M''\} = 0$. Следовательно, и $\mu^{(\alpha)}\{W - W_1^*(\frac{1}{2})\} = 0$, что доказывает первую часть утверждения теоремы.

Что касается второй части утверждения, то, очевидно, достаточно показать, что $\mu^{(\alpha)}\{W\} > 0$ (действительно, если бы тогда $\mu^{(\alpha)}\{W_1^*(\frac{1}{2})\} = 0$, мы получили бы и $\mu^{(\alpha)}\{W\} = 0$).

По условию теоремы существует $\delta > 0$ так, что для всех n будет $\tau(n) > \delta > 0$. Положим $\tau_2 = 2 + 1/\delta > 0$. Пусть η — какое-либо число из интервала $(0, 2R_N)$ Очевидно, достаточно показать, что для всякого η — покрытия V множества W будет

$$\sum_{i \in V} |i|^\alpha \geqq c, \quad c > 0,$$

c не зависит ни от η, ни от V.

Пусть V — какое-либо η-покрытие множества W. Так как W — компакт, то существует конечное подмножество $V' \subset V$, которое уже является η-покрытием множества W. Очевидно,

$$\sum_{i \in V} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V'} |i|^\alpha.$$

Заменим каждый из интервалов $i \in V'$ его замыканием. Таким образом мы получим новую систему V''. Каждый интервал $i \in V''$ заменим его пересечением с интервалом $\langle -A, A \rangle$ ($A = \sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty a_n$ — ряд, принадлежащий W). Таким образом мы получим какую-то новую систему V_1, которая покрывает множество W и состоит из конечного числа замкнутых интервалов длины $\leqq \eta$, далее для всякого $i \in V_1$ будет $i \subset \langle -A, A \rangle$. Очевидно, получим

$$\sum_{i \in V} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_1} |i|^\alpha.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1 убедимся, что существует конечное множество R', состоящее из интервалов i_n^m, R' покрывает W и для всякого $i_n^m \in R'$ будет $|i_n^m| \leqq \eta$ (значит, $n > N$) и

$$\sum_{i \in V_1} |i|^\alpha \geqq 1/\tau_2 \sum_{i_n^m \in R'} |i_n^m|^\alpha.$$

Дословно также, как и в теореме 1, можно убедиться, что существует такое $k > N$, что

$$\sum_{i_n^m \in R_l} |i_n^m|^\alpha \geqq 2^k (2R_k)^\alpha ,$$

и в конечном счете

$$\sum_{i \in V} |i|^\alpha \geqq 2^k (2R_k)^\alpha / \tau_2 . \tag{29}$$

Отсюда видно, что для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\liminf_{n \to \infty} 2^n (2R_n)^\alpha > 0 . \tag{30}$$

Действительно, если это докажем, то будет существовать $c_2 > 0$ так, что для всякого $n = 1, 2, 3, \ldots$ будет $2^n (2R_n)^\alpha \geqq c_2$ и из (29) получим

$$\sum_{i \in V} |i|^\alpha \geqq c_2/\tau_2 = c > 0 ,$$

c не зависит от η (так как c_2 и τ_2 не зависят от η).

Докажем справедливость (30). Для $n > N$ имеем

$$2^{n+1}(2R_{n+1})^\alpha = 2^{n+1}[\tau(1)\,\tau(2) \ldots \tau(n)]^\alpha (2R_1)^\alpha \geqq$$
$$\geqq c_1 2^n (l^*)^{(n-N)\alpha} , \quad c_1 = 2(2R_1)^\alpha [\tau(1) \ldots \tau(N)]^\alpha ,$$

c_1 не зависит от η. Если положить $c_1' = c_1 (l^*)^{-N\alpha}$, то c_1' не зависит от η, $c_1' > 0$, и получим $2^{n+1}(2R_{n+1})^\alpha \geqq c_1' \exp(n \log 2 + n\alpha \log l^*)$; выражение в скобках равно, однако, в силу выбора числа α $(= \log 2/\log (l^*)^{-1})$ нулю, поэтому $2^{n+1}(2R_{n+1})^\alpha \geqq c_1'$ для $n > N$, следовательно,

$$\liminf_{n \to \infty} 2^n (2R_n)^\alpha \geqq c_1' > 0 .$$

Доказательство теоремы закончено.

Литература

[1] *T. Šalát:* Absolut konvergente Reihen und das Hausdorffsche Mass, Чехосл. мат. ж. *9* (*84*), (1959), 372—389.

[2] *B. Volkmann:* Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind I. Math. Z., *58* (1953), 284—287.

[3] *H. G. Eggleston:* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory. Proc. Lond. Math. Soc., *54* (1951), 42—93.

[4] *B. Volkmann:* Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math., *190* (1952), 199—230.

[5] *Vl. Knichal:* Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass. Věst. král. čes. spol. nauk., *14* (1933), 1—18.

[6] *B. Volkmann:* Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind II. Math. Z., *59* (1953), 247—254.

Zusammenfassung

ÜBER DAS HAUSDORFFSCHE MASS DER LINEAREN PUNKTMENGEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Im ersten Teil dieser Arbeit beweist man einen allgemeinen Satz für die unteren Abschätzungen der Dimensionen von linearen Punktmengen einer gewissen Art (Satz 1). Dabei handelt es sich um die Hausdorffsche Dimension in Bezug auf das gewählte System F von Massfunktionen $\mu^{(\alpha)}(t)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. (Bezeichnung: $\dim_F M$, siehe [2]). Wenn speziell $\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $t \in \langle 0, \infty)$ gilt, dann schreiben wir $\dim M$.

Satz 1. *Es sei* $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, *wobei* $I_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ *aus einer endlichen Anzahl* g_n *von endlichen, abgeschlossenen Intervallen* $i_n^m\,(m = 1, 2, \ldots \ldots, g_n)$ *der gleichen Länge* $\lambda_n > 0$ *besteht, es sei* $\lambda_n \to 0$. *Es haben* $i_n^m, i_n^{m'}$, $m \neq m'$, *keine gemeinsamen inneren Punkte. Wir setzen voraus, dass jedes Intervall* $i_n^m\,(1 \leqq \leqq m \leqq g_n)$ *dieselbe Anzahl* $\left(= \dfrac{g_{n+1}}{g_n} \geqq 1\right)$ *der Intervalle* $i_{n+1}^m \in I_{n+1}$ *enthält.*) Setzen wir* $\tau(n) = \lambda_{n+1}/\lambda_n\,(n = 0, 1, \ldots)$, $\lambda_0 = A' - A$, $A' = \sup I_1$, $A = \inf I_1$. *Es sei* $\liminf_{n\to\infty} \tau(n) > 0$. *Es existiere ein* $\delta \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ *so, dass für jedes* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha < \delta$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n) = +\infty$$

ist. Behauptung: $\dim_F M \geqq \delta$.

Man vergleicht diesen Satz mit dem bekannten Satz von H. G. EGGLESTON (Satz 2), der in den Arbeiten [2], [6] von B. VOLKMANN benutz wurde.

Mit Hilfe von Satz 1 präzisieren wir den Beweis eines Ergebnisses von B. Volkmann (siehe Bemerkung nach Satz 4).

Im zweiten Teil der Arbeit untersuchen wir die Hausdorffschen Dimensionen einiger spezieller linearer Punktmengen. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $a_n > 0$, $a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}\,(n = 1, 2, \ldots)$. Bezeichnen wir mit W die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die die Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,\ \varepsilon_n = 1 \text{ oder } -1\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

haben. Es wurde gezeigt (siehe [1]), dass $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ist, wo I_n aus 2^n Intervallen

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n,\ \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n \rangle$$

$(\varepsilon_i = 1$ oder $-1, i = 1, 2, \ldots, n)$ besteht.

---

*) Wir schreiben $I_n = \bigcup_{m=1}^{g_n} i_n^m$ und auch $I_n = \{i_n^1, \ldots, i_n^{g_n}\}$.

Bezeichnen wir mit $|W|$ das Lebesguesche Mass von W, es ist $|W| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n$ (siehe [1]).

In der Arbeit [1] untersucht man die Hausdorffschen Dimensionen der Mengen W.

Es sei $x_0 \in W$, $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^0 a_n$. Bezeichnen wir mit $\langle x_0 \rangle$ die Menge aller derjenigen $x \in W$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, für die $\varepsilon_n \leqq \varepsilon_n^0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt.

Es bedeute $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen 1 in der (endlichen) Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $(x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n)$.

Wir setzen:

$$D_1^*(f, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad D_2^*(f, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$$

und $D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$ (wenn der rechtseitige Grenzwert existiert).

Wir definieren die Funktion f auf dem Intervall $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ so: $f(0) = 0$ und für $0 < t \leqq \frac{1}{2}$ ist $f(t) = (\log 2)/(\log t^{-1})$.

Satz 3. *Bei den früheren Bezeichnungen gilt*

$$D_1^*(f, x_0) f(l) \leqq \dim \langle x_0 \rangle \leqq D_1^*(f, x) f(L),$$

wo $l = \liminf_{n\to\infty} R_{n+1}/R_n$, $L = \limsup_{n\to\infty} R_{n+1}/R_n$.

Folgerung. Wenn $l^* = \lim_{n\to\infty} R_{n+1}/R_n$ existiert, dann ist

$$\dim \langle x_0 \rangle = D_1^*(f, x_0) \,.\, f(l^*).$$

Dieser Satz ist analog mit einem Ergebnisse von B. Volkmann (siehe [2]).

Es habe W die frühere Bedeutung. Über $|W|$ machen wir keine Voraussetzungen. Es sei $0 \leqq \eta \leqq 1$. Bezeichnen wir

$$W_1^*(\eta) = \underset{x \in W}{E}\ D^*(f, x) = \eta$$

und $W_4^*(\eta)$ bedeutet die Menge aller derjenigen $x \in W$, für die η ein Häufungswert von $\{f(n, x)/n\}_{n=1}^{\infty}$ ist.

Satz 5. *Es sei* $|W| > 0$, $0 \leqq \zeta \leqq 1$. *Setzen wir*

$$R(\zeta) = \bigcup W_4^*(\eta), \ |\tfrac{1}{2} - \eta| \geqq |\tfrac{1}{2} - \zeta|.$$

Es sei $Q(\zeta)$ *eine Menge, für die* $W_1^*(\zeta) \subset Q(\zeta) \subset R(\zeta)$ *gilt. Behauptung:*

$$\dim Q(\zeta) = \mathrm{d}(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta)}{\log \frac{1}{2}} \quad (d(0) = d(1) = 0).$$

Dies ist auch ein mit einem Ergebnis von B. Volkmann analoger Satz (siehe [4]).

Nach Satz 5 ist dim $W_1^*(0) = 0$. Wir untersuchen die Hausdorffschen Dimensionen (in Bezug auf das geeignete System F von Massfunktionen) einiger Untermengen $W_1^*(0, \zeta, \beta)$ von $W_1^*(0)$; dabei ist

$$W_1^*(0, \zeta, \beta) = \mathop{E}_{x \in W_1^*(0)} \lim_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n^\beta} = \zeta \; (0 < \beta < 1) \,. \text{(Satz 6.)}$$

Satz 7 ist ein analoger Satz zu Satz 5. Satz 8 ist eine Erweiterung eines früheren Ergebnisses des Verfassers (siehe [1]) und eines Ergebnisses von Vl. Knichal (siehe [5]).

Satz 8. *Es sei* $|W| = 0$,

$$l = \liminf_{n \to \infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad L = \limsup_{n \to \infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}.$$

Bei $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ *bezeichnen wir mit* $W(\zeta)$ *die Menge aller derjenigen* $x \in W$, *für welche die Ungleichheit* $f(n, x) \leqq n\zeta$ *eine unendliche Anzahl von Lösungen in den natürlichen* n *hat.*

Behauptung: $d(\zeta) f(l) \leqq \dim W(\zeta) \leqq d(\zeta) f(L)$, *wo* $d(\zeta)$ *dieselbe Funktion, wie in Satz 5, und die Funktion* $f(t)$ *dieselbe wie in Satz 3 ist.*

Folgerung. Wenn $l^* = \lim_{n \to \infty} R_{n+1}/R_n$ existiert, dann gilt

$$\dim W(\zeta) = d(\zeta) \dim W.$$

Satz 10 gibt (im Falle einer genug breiten Klasse von Diskontinuen W) die positive Antwort auf diese Frage, die von V. Jarník gestellt wurde: Ob nähmlich ein analoger Satz zum klassischen Satz von Borel (über die Verteilung von Ziffern 0, 1 in dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen) gilt, wenn wir im Falle $|W| = 0$ die Verteilung der Faktoren 1, -1 in den Entwicklungen ($x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$) der Zahlen der Menge W untersuchen.

Satz 10. *Es habe* W, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *die frühere Bedeutung. Es existiere*

$$l^* = \lim_{n \to \infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad 0 < l^* < \frac{1}{2}$$

und es sei für alle genug grossen $n (n \geqq N)$ $R_{n+1}/R_n \geqq l^*$. *Behauptung:*

$$\mu^{(\alpha)} \{W_1^*(\tfrac{1}{2})\} > 0 \,, \; \mu^{(\alpha)} \{W - W_1^*(\tfrac{1}{2})\} = 0, \text{ wo } \alpha = \dim W > 0.$$

Also (unter den Voraussetzungen des Satzes 10) existert ein α-dimensionales Hausdorffsches Mass derart, dass im Sinne dieses Masses für fast alle $x \in W$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$$

gilt.