Movlud Kerimovich Kerimov

Sur la théorie des problèmes variationnels discontinus aux extrémités variables dans l'espace

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 1, 1–23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100440`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *11* (*86*) ПРАГА 15. III. 1961 г., No 1

SUR LA THÉORIE DES PROBLÈMES VARIATIONNELS DISCONTINUS AUX EXTRÉMITÉS VARIABLES DANS L'ESPACE

M. K. KÉRIMOV, Moscou

(Reçu le 18 février 1959)

En hommage à M. L. A. Lusternik,
à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Dans le présent travail, on étudie les problèmes variationnels discontinus aux extrémités variables dans l'espace multidimensionnel (cas non-paramétrique).
On démontre les conditions nécessaires du minimum, qui se basent sur la théorie de la variation première et partiellement sur celle de la seconde (conditions d'Euler, Legendre, Weierstrass, conditions de transversalité, condition de discontinuité et celle de Jacobi en interprétation géométrique et à l'aide du signe de la variation seconde).

Introduction. C'est au cours des recherches dans le domaine de la physique, qu'on se heurte aux problèmes discontinus du calcul des variations, en étudiant, notamment, les phénomènes de la propagation de la lumière dans les milieux dont les propriétés changent d'une façon brusque (Voir [1], pp. 222–223; [2], pp. 58–59).

C'est le mémoire [3] qui inaugure les recherches systématiques des problèmes discontinus. Les conclusions principales de cet ouvrage sont souvent mentionnées par tous les traités détaillés sur le calcul des variations (voir, par exemple, [1], pp. 219–223; [4], pp. 389–392). Le mémoire [3] est consacré à la solution du problème régulier discontinu variationnel plan aux extrémités fixes sous forme paramétrique; on y a déterminé les conditions nécessaires et suffisantes du minimum. Il est à noter que dans ce mémoire la condition de Jacobi est établie à l'aide du théorème de l'enveloppe.

Dans l'ouvrage [5], on généralise les résultats obtenus pour le cas de l'espace à trois dimensions.

Le mémoire [6] est consacré aux études du problème discontinu de la forme paramétrique aux extrémités fixes dans l'espace n-dimensionnel où quelques conclusions concernant la théorie de la variation seconde sont aussi données. On affirme, dans le travail [7], que grâce à un certain changement des variables, les problèmes susmentionnés peuvent être transformés en problème généralisé de O. BOLZA.

Enfin, on doit signaler le mémoire [8] consacré au problème du cas plan non paramétrique aux extrémités fixes avec une discontinuité spéciale de la fonction sous le signe de l'intégrale (discontinuité par rapport à une seule variable).

La théorie du problème généralisé de Bolza étant assez compliquée, nous avons fait une tentative d'appliquer directement la théorie concernant les problèmes plans classiques du calcul des variations sous forme non paramétrique à la formulation la plus génerale (cas non régulier avec la discontinuité de la fonction sous le signe $\int$ par rapport à tous les arguments aux extrémités variables; voir [9], [10], [11], [12]).

Aux cours de nos études nous avons découvert que pour le problème discontinu sous une forme aussi générale, on peut obtenir toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour le minimum, en généralisant les résultats correspondants pour le problème continu classique le plus simple.

Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier le problème variationnel discontinu non régulier aux extrémités variables sous forme non paramétrique dans l'espace à $n + 1$ dimensions, et, en nous basant sur la théorie de la variation première, partiellement sur celle de la seconde, nous voulons démontrer les conditions nécessaires pour le minimum.

Au paragraphe 1 on donnera la formulation exacte du problème. Le paragraphe 2 sera consacré à la démonstration de la condition nécessaire d'Euler. Au paragraphe 3 on traitera les conditions de tranversalité et de discontinuité. Au paragraphe 4 on développera les conditions de Weierstrass et de Legendre. Au paragraphe 5 on s'occuppera de la construction de la famille d'extrémales angulaires, contenant l'extrémale angulaire donnée. On y donnera aussi la définition du foyer conjugué à l'aide de la famille d'extrémales angulaires construite. Le paragraphe 6 sera consacré à la condition de Jacobi: on y démontrera le théorème de l'enveloppe pour les problèmes discontinus à l'aide duquel (naturellement, en respectant certaines restrictions connues) on établira la condition nécessaire de Jacobi en utilisant les foyers conjugués.

Le paragraphe 7 traite quelques questions de la théorie de la variation seconde. On calcule la variation seconde pour la fonctionnelle discontinue et on démontre la condition de Jacobi à l'aide du signe de la variation seconde.

Dans le courant de notre exposé nous suivrons de près l'exposé du livre de G. A. Bliss [13], et celles des affirmations concernants les problèmes variationnels discontinus qui peuvent facilement être déduites des affirmations correspondantes pour les problèmes continus, seront données sans démonstration. Nous supprimerons de plus le signe de la somme dans les formules aux indices répétés, par exemple, au lieu de $\sum_{i=1}^{n} y_i z_i$ nous écrivons $y_i z_i$.

1. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES. FORMULATION DU PROBLÈME

Soient $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv (x, y)$ les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace euclidien à $n + 1$ dimension E^{n+1}, R un domaine simplement connexe fini et ouvert dans E^{n+1}, E_{102} une courbe angulaire composée de deux arcs réguliers E_{10} et E_{02}, se trouvant entièrement à l'intérieur de R, et représentée par les équations

$$y_i = y_i(x) \begin{cases} y_i^-(x), & x^1 \leqq x \leqq x^0, \\ y_i^+(x), & x^0 \leqq x \leqq x^2 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les fonctions $y_i(x)$ sont univoques et continues et possèdent une dérivée continue dans l'intervalle $x^1 \leqq x \leqq x^2$, sauf au point $x = x^0$ qui est pour $y_i'(x)$ un point de discontinuité de première espèce.

Admettons que la courbe E_{102} coupe successivement les variétés n-dimensionnelles M^1, M^0, M^2 aux points *1, 0, 2* sans que ces variétés soient tangentes aux arcs E_{10} et E_{02}. Supposons que les variétés M^1, M^0, M^2 soient représentées par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} M^1 &: x = x^1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv x^1(\alpha), \quad y_i = y_i^1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv y_i^1(\alpha); \\ M^0 &: x = x^0(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \equiv x^0(\beta), \quad y_i = y_i^0(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \equiv y_i^0(\beta); \\ M^2 &: x = x^2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \equiv x^2(\gamma), \quad y_i = y_i^2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \equiv y_i^2(\gamma) \end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les paramètres α, β, γ appartiennent aux ensembles limites et fermés T_α, T_β, T_γ; les fonctions $x^1(\alpha)$, $y_i^1(\alpha)$, $x^0(\beta)$, $y_i^0(\beta)$, $x^2(\gamma)$, $y_i^2(\gamma)$ appartiennent à la classe C^3 pour $\alpha \in T_\alpha$, $\beta \in T_\beta$, $\gamma \in T_\gamma$ et les valeurs $\alpha_h = 0$, $\beta_h = 0$, $\gamma_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ correspondent respectivement aux points *1, 0, 2* de la courbe E_{102}. Nous supposerons:

a) Les variétés M^1, M^0, M^2 sont des variétés régulières, c'est-à-dire les matrices

$$\left[\frac{\partial x^1}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial y_i^1}{\partial \alpha_k}\right], \quad \left[\frac{\partial x^0}{\partial \beta_k}, \frac{\partial y_i^0}{\partial \beta_k}\right], \quad \left[\frac{\partial x^2}{\partial \gamma_k}, \frac{\partial y_i^2}{\partial \gamma_k}\right] \quad (k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

ont le rang n en chacun de leurs points.

b) La variété M^0 coupe le domaine R en deux parties R^- et R^+.

c) Pour chaque $\alpha \in T_\alpha$, $\beta \in T_\beta$, $\gamma \in T_\gamma$, on a $x^1(\alpha) < x^0(\beta) < x^2(\gamma)$.

Indiquons respectivement par S, S^-, S^+ les frontières des domaines R, R^-, R^+; les frontières S^- et S^+ possèdent alors la partie commune le long de M^0.

Considérons les fonctions

$$F^1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1^-, p_2^-, \ldots, p_n^-) \equiv F^1(x, y, p^-),$$
$$F^2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1^+, p_2^+, \ldots, p_n^+) \equiv F^2(x, y, p^+),$$

où F^1 appartient à la classe C^4 pour $(x, y) \in R^- + S^-$, $-\infty < p_i^- < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tandis que F^2 appartient à la classe C^4 pour $(x, y) \in R^+ + S^+$, $-\infty < p_i^+ < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. On peut supposer que la fonction $F(x, y, p)$ appartienne à la classe C^4 pour tous les points $(x, y) \in R + S$, $-\infty < p_i < +\infty$, sauf pour les points de la variété M^0 où F varie brusquement, lorsqu' on passe d'un côté à l'autre. Dans le courant du présent travail les points (x, y, p) seront appelés points admissibles. Indiquons par $\mathfrak{G}$ l'ensemble des fonctions $y_i(x)$, satisfaisant aux conditions suivantes: 1. les fonctions $y_i(x)$ sont continues partout où elles sont déterminées; 2. les courbes C_{102} correspondant à ces fonctions sont constituées par un nombre fini d'arcs réguliers dont les éléments (x, y, y') sont admissibles; 3. chaque courbe C_{102} coupe une fois les variétés M^1, M^0, M^2 et son point angulaire se trouve sur M^0.

Appelons l'ensemble $\mathfrak{G}$ ensemble de *courbes admissibles.* Le problème que nous nous proposons d'étudier est le suivant:

Formulation du problème variationnel primaire. *Étant donnée la courbe angulaire $E_{102} \in \mathfrak{G}$ ayant un point angulaire 0, quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire E_{102} pour que l'intégrale*

(1,1) $$J(y) \equiv \int_{x^1(\alpha)}^{x^0(\beta)} F^1(x, y, y')\,dx + \int_{x^0(\beta)}^{x^2(\gamma)} F^2(x, y, y')\,dx$$

prise le long de E_{102} ait la plus petite valeur par rapport aux valeurs de cette intégrale prise le long de toutes les courbes admissibles, situées dans un certain voisinage de la courbe E_{102}.

2. CONDITION NÉCESSAIRE D'EULER

En supposant que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ rende minimum l'intégrale (1,1), il est facile de démontrer le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Pour que la courbe E_{102} rende minimum la fonctionnelle* (1,1) *il est nécessaire que l'arc E_{10} vérifie les équations*

(2,1) $$F^1_{y'_i}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x^1}^{x} F^1_{y_i}(x, y(x), y'(x))\,dx + C^1_i$$

où C^1_i sont des constantes et que l'arc E_{02} vérifie les équations

(2,2) $$F^2_{y'_i}(x, y(x), y'(x) = \int_{x^0}^{x} F^2_{y_i}(x, y(x), y'(x))\,dx + C^2_i$$

où les C^2_i sont de même des constantes.

Condition nécessaire I. *Nous dirons que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ satisfait à la condition* I, *s'il existe des constantes C^1_i par lesquelles* (2,1) *se transforme en identités le long de l'arc E_{10}, et des constantes C^2_i par lesquelles* (2,2) *se transforme en identités le long de l'arc E_{02}.*

Ainsi chaque courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ rendant minimum la fonctionelle (1,1) doit satisfaire à la condition I.

Entre les points angulaires de la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ qui vérifie la condition I les fonctions $F^1_{y'_i}$ et $F^2_{y'_i}$ ont des dérivées et les équations d'Euler

(2,3) $$\frac{d}{dx} F^1_{y'_i} - F^1_{y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont satisfaites le long de l'arc E_{10}, et

(2,4) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F^2_{y'_i} - F^2_{y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

le long de l'arc E_{02}.

En chaque point angulaire $x \neq x^0$ de la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition I les conditions de Weierstrass-Erdmann

$$\begin{aligned} F^{1-}_{y'_i} &= F^{1+}_{y'_i}\,, \quad x^1 < x < x^0\,, \\ F^{2-}_{y'_i} &= F^{2+}_{y'_i}\,, \quad x^0 < x < x^2 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

doivent être satisfaites.

Les signes $-$ et $+$ indiquent les limites gauche et droite de la fonction susindiquée.

Dans le voisinage de chaque élément (x, y, y') qui ne correspond pas au point angulaire de la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$, laquelle satisfait à la condition I, les fonctions $y_i^-(x)$ et $y_i^+(x)$ admettent autant de dérivées continues que les fonctions F^1 et F^2, pourvu que soit réalisée la condition

(2,5) $$|F^1_{y'_i y'_j}| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

dans le cas de l'élément se rapportant à l'arc E_{10} et la condition

(2,5') $$|F^2_{y'_i y'_j}| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

dans le cas de l'élément se rapportant à l'arc E_{02} (Cf. G. A. Bliss [13], pp. 13–14).

La dernière affirmation montre que, le long de la partie régulière de l'arc E_{10} ou de l'arc E_{02}, le long de laquelle s'accomplit (2,5) ou (2,5'), les équations d'Euler sous forme développée sont vérifiées:

(2,6) $$F^1_{xy'_i} + F^1_{y'_i y_j} y'_j + F^1_{y'_i y'_j} y''_j - F^1_{y_i} = 0$$

ou

(2,6') $$F^2_{xy'_i} + F^2_{y'_i y_j} y'_j + F^2_{y'_i y'_j} y''_j - F^2_{y_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

La partie régulière de l'arc E_{10} [E_{02}] sur laquelle s'accomplit la condition (2,5) [(2,5')] sera nommée partie non singulière. Pour cette partie les fonctions $y_i(x)$ appartiennent à la classe C^2. La courbe angulaire $E_{102} \in \mathfrak{S}$ dont les arcs E_{10} et E_{02} sont non singuliers, s'appelle courbe angulaire non singulière.

Pour l'arc extrémal E_{10} ou E_{02} le théorème d'inclusion est également vérifié.

Théorème 2.2. *Chaque arc extrémal non singulier E_{10} est contenu dans la famille d'extrémales à 2n paramètres*

(2,7) $$y_i = y_i^-(x, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) \equiv y_i^-(x, a, b) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $x^1 \leqq x \leqq x^0$ et pour certaines valeurs des paramètres $a_i = a_{i0}, b_i = b_{i0}$; les *fonctions y_i^-, y_{ix}^- ont des dérivées partielles jusqu'au second ordre y compris, au voisinage des points (x, a, b) appartenant à l'arc E_{10}; et de même le déterminant*

$$\begin{vmatrix} y^-_{ia_k}, & y^-_{ib_k} \\ y^-_{ixa_k}, & y^-_{ixb_k} \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2,8}$$

est différent de zéro le long de E_{10}.

Une affirmation analogue est également vraie pour l'arc non singulier E_{02} si l'on remplace (2,7) et (2,8) par

$$y_i = y_i^+(x, c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n) \equiv y_i^+(x, c, d) \tag{2,8'}$$

et

$$\begin{vmatrix} y^+_{ic_k}, & y^+_{id_k} \\ y^+_{ixc_k}, & y^+_{ixd_k} \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

En particulier, si l'on prend l'élément initial $[x^1(\alpha), y^1(\alpha), p^1(\alpha)]$ où $[x^1(\alpha), y^1(\alpha)]$ est le point de la variété M^1 se trouvant au voisinage immédiat du point *1* et $p_i^1(\alpha)$ indique la direction suffisamment proche de la direction de l'arc E_{10} au point *1*, il y passe la courbe intégrale unique des équations d'Euler (2,6)

$$y_i = \phi_i[x, x^1(\alpha), y^1(\alpha), p^1(\alpha)] = y_i^-(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Ainsi, nous obtenons la famille d'extrémales à n paramètres

$$y_i = y_i^-(x, \alpha)\,, \quad x^1(\alpha) \leqq x \leqq x^0(\beta)$$

contenant E_{10} pour $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ où les fonctions $y_i^-(x, \alpha)$ possèdent les mêmes propriétés différentielles que les fonctions $y_i^-(x, a, b)$. De même, si l'on prend l'élément initial $[x^0(\beta), y^0(\beta), p^0(\beta)]$, où $[x^0(\beta), y^0(\beta)]$ est le point de la variété M^0 se trouvant au voisinage immédiat du point *0*, et $p_i^0(\beta)$ indique la direction suffisamment proche de la direction de l'arc E_{02} au point *0*, il y passe la courbe intégrale unique des équations d'Euler (2,6')

$$y_i = \psi_i[x, x^0(\beta), y^0(\beta), p^0(\beta)] = y_i^+(x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,.$$

Ainsi, nous obtenons la famille d'extrémales à n paramètres

$$y_i = y_i^+(x, \beta)\,, \quad x^0(\beta) \leqq x \leqq x^2(\gamma)\,,$$

contenant E_{02} pour $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et les fonctions $y_i^+(x, \beta)$ possèdent les mêmes propriétés différentielles que les fonctions $y_i^+(x, c, d)$.

3. CONDITION DE TRANSVERSALITÉ ET CONDITION DE DISCONTINUITÉ

Admettons que nous ayons la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ à l'équation

$$y_i = y_i(x) \left\langle \begin{array}{ll} y_i^-(x)\,, & x^1 \leqq x \leqq x^0\,, \\ y_i^+(x)\,, & x^0 \leqq x \leqq x^2\,. \end{array} \right. \tag{3,1}$$

Supposons les fonctions y_i^- et y_i^+ prolongées respectivement dans les intervalles contenant entièrement en leur intérieur les intervalles des relations (3,1).

Soient $\alpha_i(a)$, $\beta_i(a)$, $\gamma_i(a)$ les fonctions de la classe C^1 pour les valeurs de a proches de 0; soient

$$\alpha_i(0) = 0\,, \quad \beta_i(0) = 0\,, \quad \gamma_i(0) = 0\,.$$

Introduisons les notations suivantes:

$$x^1(a) \equiv x^1[\alpha(a)]\,, \quad x^0(a) \equiv x^0[\beta(a)]\,, \quad x^2(a) \equiv x^2[\gamma(a)]\,.$$

Alors les équations $\alpha_i = \alpha_i(a)$, $\beta_i = \beta_i(a)$, $\gamma_i = \gamma_i(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ déterminent respectivement les courbes L^1, L^0, L^2 sur les variétés M^1, M^0, M^2.

Considérons la famille de courbes à un paramètre

$$y_i = y_i(x, a) \begin{cases} y_i^-(x, a)\,, & x^1(a) \leqq x \leqq x^0(a)\,, \\ y_i^+(x, a)\,, & x^0(a) \leqq x \leqq x^2(a) \end{cases} \tag{3,2}$$

où

$$y_i^-(x, a) = y_i^-(x) + \{y_i^1[\alpha(a)] - y_i^-[x^1(a)]\}\, \frac{x^0(a) - x}{x^0(a) - x^1(a)} +$$
$$+ \{y_i^0[\beta(a)] - y_i^-[x^0(a)]\}\, \frac{x - x^1(a)}{x^0(a) - x^1(a)}\,,$$

$$y_i^+(x, a) = y_i^+(x) + \{y_i^0[\beta(a)] - y_i^+[x^0(a)]\}\, \frac{x^2(a) - x}{x^2(a) - x^0(a)} +$$
$$+ \{y_i^2(a) - y_i^+[x^2(a)]\}\, \frac{x - x^0(a)}{x^2(a) - x^0(a)}\,.$$

Les courbes de la famille (3,2) sont admissibles; elles coupent les courbes L^1, L^0, L^2 une fois, ce qu'on peut écrire analytiquement de la manière suivante:

$$\begin{aligned} x &= x^1(a)\,, \quad y_i^-[x^1(a), a] \equiv y_i^1[\alpha(a)]\,; \\ x &= x^0(a)\,, \quad y_i^-[x^0(a), a] \equiv y_i^0[\beta(a)] \equiv y_i^+[x^0(a), a]\,; \\ x &= x^2(a)\,, \quad y_i^+[x^2(a), a] \equiv y_i^2[\gamma(a)]\,. \end{aligned} \tag{3,3}$$

Nous appellerons les conditions (3,3) conditions primaires pour les extrémités.

On voit facilement que la courbe E_{102} se trouve dans la famille (3,2) pour $a = 0$.

La fonctionnelle J prise le long des courbes de la famille (3,2) se transforme en fonction de la variable a:

$$J(a) = \int_{x^1(a)}^{x^0(a)} F^1[x, y(x, a), y'(x, a)]\,\mathrm{d}x + \int_{x^0(a)}^{x^2(a)} F^2[x, y(x, a)\,, y'(x, a)]\,\mathrm{d}x\,. \tag{3,4}$$

Supposons que les arcs C_{10} et C_{02} de la courbe admissible C_{102} de la famille (3,2), correspondant à la valeur a, vérifient les équations d'Euler (2,3) et (2,4). Alors, le long de C_{102} nous avons

$$J'(a) = \left[F^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} + F^1_{y'_i} y_{ia}\right]_1^0 + \left[F^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} + F^2_{y'_i} y_{ia}\right]_0^2\,. \tag{3,5}$$

D'après les identités (3,3) nous avons

$$\mathrm{d}x^k = x_a^k\,\mathrm{d}a\,, \quad \mathrm{d}y_i^k = y_{ix}\,\mathrm{d}x^k + y_{ia}\,\mathrm{d}a \quad (k = 1 \text{ ou } 0 \text{ ou } 2)\,.$$

En plaçant les valeurs $y_{ia}(x^1, a)$, $y_{ia}(x^0, a)$, $y_{ia}(x^2, a)$ dans (3,5), nous aurons

(3,6) $\quad \mathrm{d}J = [F^1 \,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}y_i - y_{ix}\,\mathrm{d}x)\, F^1_{y'_i}]_1^0 + [F^2 \,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}y_i - y_{ix}\,\mathrm{d}x)\, F^2_{y'_i}]_0^2 .$

Or, si la courbe E_{102} est celle qui rend minimum la fonctionelle J, alors, le long de E_{102}, nous aurons

$$\mathrm{d}J = 0 .$$

Condition nécessaire I′. *Nous dirons que la courbe admissible E_{102} vérifie les conditions primaires de transversalité aux points 1 et 2 et la condition primaire de discontinuité au point 0 si les relations*

$$(F^1 - y_{ix}F^1_{y'_i})\,\mathrm{d}x^1 + F^1_{y_i}\,\mathrm{d}y_i^1 = 0 , \tag{3,7}$$

$$(F^2 - y_{ix}F^2_{y'_i})\,\mathrm{d}x^2 + F^2_{y_i}\,\mathrm{d}y_i^2 = 0 , \tag{3,8}$$

$$[(F^1 - y^-_{ix}F^1_{y'_i}) - (F^2 - y^+_{ix}F^2_{y'_i})]\,\mathrm{d}x^0 + (F^1_{y'_i} - F^2_{y'_i})\,\mathrm{d}y_i^0 = 0 \tag{3,9}$$

sont identiquement vérifieés par rapport à $\mathrm{d}\alpha_k$, $\mathrm{d}\beta_k$, $\mathrm{d}\gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, où les arguments des fonctions F^1, F^2 et de leurs dérivées sont les éléments de la courbe E_{102} aux points 1, 2, 0.

Nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Afin que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ rende minimum l'intégrale J, il est nécessaire qu'elle vérifie la conditon* I′.

4. CONDITIONS NÉCESSAIRES DE WEIERSTRASS ET DE LEGENDRE

Admettons que les arcs E_{10} et E_{02} de la courbe E_{102} appartiennent à la classe C^1. Alors, comme dans le cas des problèmes variationnels continus, on peut écrire pour chacun des arcs E_{10} et E_{02} les fonctions de Weierstrass

$$\mathcal{E}^1(x, y, y', Y') \equiv F^1(x, y, Y') - F^1(x, y, y') - (Y'_i - y'_i)\, F^1_{y'_i}(x, y, y') , \tag{4,1}$$

$$\mathcal{E}^2(x, y, y', Y') \equiv F^2(x, y, Y') - F^2(x, y, y') - (Y'_i - y'_i)\, F^2_{y'_i}(x, y, y') \tag{4,2}$$

où Y'_i sont des valeurs arbitraires, différentes de y'_i, et les éléments (x, y_i, Y'_i) sont admissibles.

Condition nécessaire II. *Nous dirons que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ satisfait à la condition nécessaire de Weierstrass si, pour tous les éléments admissibles (x, y, Y') différents de (x, y, y'), l'inégalité*

$$\mathcal{E}^1(x, y, y', Y') \geqq 0 \tag{4,3}$$

est satisfaite le long de l'arc E_{10}, et l'inégalité

$$\mathcal{E}^2(x, y, y', Y') \geqq 0 \tag{4,4}$$

est satisfaite le long de l'arc E_{02}.

Il n'est pas difficile de démontrer l'affirmation suivante:

Théorème 4.1. *Pour que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ rende minimum l'intégrale J, il faut qu'elle vérifie la condition* II.

Condition nécessaire III. *Nous dirons que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ satisfait à la condition nécessaire de Legendre si pour un élément quelconque (x, y, y') et pour toutes les valeurs des constantes $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ remplissant la condition $\pi_i \pi_i = 1$ l'inégalité*

$$F^1_{y'_i y'_j}(x, y, y')\, \pi_i \pi_j \geqq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4,5}$$

est satisfaite le long de l'arc E_{01} et l'inégalité

$$F^2_{y'_i y'_j}(x, y, y')\, \pi_i \pi_j \geqq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4,6}$$

est satisfaite le long de l'arc E_{02}.

Théorème 4.2. *Pour que la courbe $E_{102} \in \mathfrak{S}$ rende minimum l'intégrale J il faut qu'elle satisfasse à la condition* III.

5. FAMILLE D'EXTRÉMALES ANGULAIRES

Définition. *La courbe admissible E_{102}, dont les arcs E_{10} et E_{02} appartiennent à la classe C^2 et satisfont aux équations d'Euler* (2,6) et (2,6′) *et dont le point 0 vérifie la condition primaire de discontinuité, s'appelle extrémale angulaire de la fonctionnelle J.*

Il est évident que la courbe E_{102} qui rend minimum la fontionnelle J est une extrémale angulaire.

Nous nous proposons de démontrer l'affirmation importante qui suit.

Théorème 5.1. *Admettons que les conditions suivantes soient satisfaites:* 1. *la condition de transversalité* (3,7) *pour le point ordinaire 1 de la varieté M^1, où elle coupe l'extrémale non singulière;* 2. *la courbe E_{102} n'est pas tangente à la variété M^1 au point 1 et à la variété M^0 au point 0. Ainsi, nous avons la famille d'extrémales angulaires à n paramètres*

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = y_i(x, \alpha) \begin{cases} y_i^-(x, \alpha)\,, & x^1(\alpha) \leqq x \leqq x^0(\beta)\,, \\ y_i^+(x, \alpha)\,, & x^0(\beta) \leqq x \leqq x^2(\gamma) \end{cases} \tag{5,1}$$

qui coupent transversalement la variété M^1 au voisinage du point 1 et qui possèdent les propriétés suivantes:

a) *la famille* (5,1) *contient E_{102} pour $\alpha_i = 0$* $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

b) *les fonctions $y_i^-(x, \alpha)$, $y_i^+(x, \alpha)$ et leurs dérivées premières et secondes par rapport à x ont des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre pour les valeurs (x, α) voisines des valeurs correspondantes à E_{10} et E_{02};*

c) *le déterminant*

$$\Delta(x, \alpha) = \begin{cases} \Delta^-(x, \alpha) = |y^-_{i\alpha_k}(x, \alpha)|\,, & x^1(\alpha) \leqq x \leqq x^0(\beta)\,, \\ \Delta^+(x, \alpha) = |y^+_{i\alpha_k}(x, \alpha)|\,, & x^0(\beta) \leqq x \leqq x^2(\gamma) \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5,2}$$

pris le long de E_{102} n'est pas identiquement nul.

Pour démontrer notre affirmation, prenons le système d'équations

$$(F^1 - y_{ix}F^1_{y'_i})\, x^1_h + F^1_{y'_i} y^1_{ih} = 0 \quad (i, h = 1, 2, \ldots, n) \tag{3,7'}$$

où les arguments de la fonction F^1 et de ses dérivées sont $x^1(\alpha)$, $y^1_i(\alpha)$, $p^1_i(\alpha)$.

Le système d'équations (3,7′) admet la solution

$$(\alpha, p^1_i(\alpha))|_{\alpha=0} = (0, y'_i(x^1))$$

où le déterminant des premiers membres des équations (3,7′) par rapport aux variables $p^1_i(\alpha)$ est différent de zéro parce qu'il est égal au produit des déterminants

$$|F^1_{y'_i y'_l}| \cdot |y^1_{l\alpha_k} - p^1_l x^1_{\alpha_k}| \quad (i, l, k = 1, 2, \ldots, n)$$

où aucun déterminant n'est nul. De ces déterminants le premier n'est pas nul, car E_{102} est l'extrémale angulaire non singulière, et le second n'est pas nul car au point *1* s'accomplit la condition de non tangence (voir [13], p. 90). En vertu du théorème sur les fonctions implicites, le système (3,7′) admet la solution unique $p^1_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) pour laquelle $p^1_i(\alpha)|_{\alpha=0} = y'_i(x^1)$. Comme le déterminant $|F^1_{y'_i y'_l}|$ n'est pas nul non seulement au point *1*, mais aussi dans son voisinage, conformément au théorème d'inclusion, par chaque élément $[x^1(\alpha), y^1_i(\alpha), p^1_i(\alpha)]$ il passe une seule courbe intégrale de l'équation d'Euler (2,3) satisfaisant à la condition b) de notre théorème.

Ainsi, nous avons construit la famille d'extrémales

$$y_i = y_i^-(x, \alpha)\,, \quad x^1(\alpha) \leqq x \leqq x^0(\beta) \tag{5,3}$$

qui contient l'arc E_{10} de l'extrémale angulaire E_{102} pour $\alpha = 0$. Pour obtenir une famille de la forme (5,1) il faut prolonger la famille (5,3) à l'intervalle $x^0(\beta) \leqq x \leqq x^2(\gamma)$. Pour cela, nous utilisons la condition de non tangence et la condition de discontinuité au point *0* de l'extrémale E_{102}.

Le système d'équations

$$y_i^-[x^0(\beta), \alpha] = y^0_i(\beta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{*}$$

admet une seule solution

$$[x^0(\beta), \alpha]|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = (x^0, 0)\,.$$

Introduisons la notation

$$\Phi_i(\alpha, \beta) \equiv y^0_i(\beta) - y_i^-[x^0(\beta), \alpha]\,.$$

Le déterminant

$$|\Phi_{i\beta_k}| = |y^0_{i\beta_k} - \bar{y}'_i x^0_{\beta_k}| = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y}'_i \\ x^0_{\beta_k} & y_{i\beta_k} \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

n'est pas égal à zéro pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$ car au point *0* l'arc de l'extrémale E_{10} n'est pas tangent à la variété M^0. Ainsi le système (*) possède une seule solution $\beta_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) appartenant à la classe C^2 au voisinage des valeurs $\alpha_i = 0$, lorsque $\beta_i(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$.

Maintenant prenons le système d'équations suivant:

$$[(F^1 - y_{ix}^- F^1_{y'_i}) - (F^2 - p^0_i F^2_{y'_i})]\, x^0_h + (F^1_{y'_i} - F^2_{y'_i})\, y^0_{ih} = 0 \tag{3,9'}$$

où les arguments de F^1 et de ses dérivées sont

$$x^0(\alpha) \equiv x^0(\beta(\alpha)) , \; y_i^0(\alpha) \equiv y_i^0(\beta(\alpha)) , \; y_{ix}^-(\alpha) \equiv y_{ix}^-[x^0(\alpha), \alpha] ,$$

tandis que ceux de F^2 sont $x^0(\alpha)$, $y_i^0(\alpha)$, $p_i^0(\alpha)$.

Le système d'équations (3,9′) relatif aux variables p_i^0 admet la solution $(\alpha, p_i^0)|_{\alpha=0} = (0, y_{ix}^+(x^0))$; le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations (3,9′) par rapport aux variables p_i^0 pour la solution initiale susmentionnée est différent de zéro, car il est égal au produit des déterminants, qui ne sont pas nuls:

$$|F^2_{y'_i y'_l}| \cdot |y^0_{l\alpha_k} - p_i^0 x^0_{\alpha_k}| \quad (k, i, l = 1, 2, \ldots, n) .$$

Le premier déterminant n'est pas nul, car l'arc de l'extrémale E_{02} est non singulier et le second déterminant n'est pas nul car l'arc E_{02} n'est pas tangent à la variété M^0 au point 0.

Dès lors, le système d'équations (3,9′) admet la solution unique $p_i^0(\alpha)$ où

$$p_i^0(\alpha)|_{\alpha=0} = y_{ix}^+(x^0) .$$

Donc, nous avons démontré que pour toute direction admissible $y_{ix}^-(x, \alpha)$ il existe une seule direction $p_i^0(\alpha)$ vérifiant l'équation (3,9′). L'extrémale qui passe par l'élément admissible $[x^0(\alpha), y_i^0(\alpha), p_i^0(\alpha)]$ est le prolongement de l'extrémale de la famille (5,3) dont la direction au point (α) de la variété M^0 est $y_{ix}^-(x, \alpha)$. En attribuant à α différentes valeurs, nous obtenons la famille unique d'extrémales

(5,4) $$y_i = y_i^+(x, \alpha) , \quad x^0(\alpha) \leqq x \leqq x^2(\gamma) ,$$

contenant l'arc E_{02} de l'extrémale E_{102} pour $\alpha = 0$, et qui est le prologement de la famille (5,3) dans l'intervalle $x^0(\alpha) \leqq x \leqq x^2(\gamma)$.

Nous appellerons la famille (5,4) famille complémentaire de la famille (5,3). Il ne reste qu' à démontrer la propriété c) de notre théorème.

Remarquons que le déterminant (5,2) est différent de zéro au point 1 car le système d'identités $y_i^1(\alpha) \equiv y_i^-[x^1(\alpha), \alpha]$ montre que le déterminant

$$\Delta^-(x, \alpha) = |y^-_{i\alpha_k}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

est égal au déterminant

$$|y^1_{i\alpha_k} - y_i'^- x^1_{\alpha_k}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) ,$$

car

$$y^-_{i\alpha_k} = y^1_{i\alpha_k} - y_i'^- x^1_{\alpha_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Mais le dernier déterminant n'est pas nul au point 1, car l'arc E_{10} n'y est pas tangent à la variété M^1.

De même, d'après le système d'identités $y_i^0(\alpha) \equiv y_i^+[x^0(\alpha), \alpha]$, nous trouvons

$$y^+_{i\alpha_k} = y^0_{i\alpha_k} - y_i'^+ \cdot x^0_{a_k} .$$

Le déterminant

$$\Delta^+(x, \alpha) = |y^+_{i\alpha_k}|$$

n'est pas nul au point 0, car l'arc E_{02} n'y est pas tangent à la variété M^0. Le théorème est complètement démontré.

En suivant le même raisonnement on peut construire une famille d'extrémales angulaires

$$(5,1') \qquad y_i = y_i(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = y_i(x, \gamma)\,, \; x^1(\alpha) \leqq x \leqq x^2(\gamma)$$

transversale à la variété M^2 qui contient E_{102} pour $\gamma = 0$, et qui possède les mêmes propriétés que la famille (5,1).

Maintenant, nous pouvons donner la définition du foyer conjugué des variétés M^1 et M^2.

Définition du foyer conjugué. *Nous appellerons foyers conjugués de la variété M^1 les points de l'extrémale angulaire E_{102} dont les abscisses annulent le déterminant* (5,2).

D'une manière adéquate on peut définir à l'aide de la famille d'extrémales (5,1′) les foyers conjugués de la variété M^2. Nous appellerons le déterminant $\Delta(x, \alpha)$ déterminant du foyer conjugué.

Il n'est pas difficile de démontrer que les foyers conjugués des variétés M^1 et M^2 ne dépendent pas du choix des paramètres de M^1 et de M^2 (cf. [13], p. 150).

6. EXPOSÉ DE LA CONDITION NÉCESSAIRE DE JACOBI À L'AIDE DES FOYERS CONJUGUÉS

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer la condition de Jacobi à l'aide du théorème de l'enveloppe. Pour cela, nous devons démontrer d'abord le théorème de l'enveloppe pour le problème discontinu variationnel aux extrémités variables.

Prenons la famille (5,1) et introduisons au lieu des paramètres α_k de nouvelles fonctions $\alpha_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ pour lesquelles $\alpha_k(0) = 0$; ainsi nous obtiendrons la famille d'extrémales angulaires à un seul paramètre

$$(6,1) \qquad y_i = y_i[x, \alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)] = \begin{cases} y_i^-[x, \alpha(t)], & x^1(t) \leqq x \leqq x^0(t)\,, \\ y_i^+[x, \alpha(t)], & x^0(t) \leqq x \leqq x^2(t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Cette famille contient E_{102} pour $t = 0$ et coupe transversalement la variété M^1.

La famille (6,1) aura une enveloppe D située dans le domaine R^- ou R^+ et tangente aux courbes de la famille (6,1) aux points $x = x(t)$ si les équations ci-dessous sont identiquement vérifiées par rapport a t:

$$(6,2) \qquad x'(t) = \lambda(t)\,, \quad y_{ix}x'(t) + y_{i\alpha_k}\alpha_k'(t) = \lambda(t)\, y_{ix}$$

où $\lambda(t)$ est le facteur de proportionnalité; les arguments de y_{ix} et $y_{i\alpha_k}$ sont $x(t)$ et $\alpha(t)$. Cette enveloppe sera représentée par les équations

$$(6,3) \qquad D : x = x(t)\,, \; y_i[x(t)\,, \alpha(t)] = Y_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Les équations (6,2) expriment la condition d'identité de la direction de la tangente en un point quelconque de l'enveloppe avec la direction de la tangente à l'extrémale passant par ce même point.

Afin que les équations (6,2) soient vérifiées, il est nécessaire et suffisant que les équations

$$(**) \qquad y_{i\alpha_k}[x(t), \alpha(t)] \,.\, \alpha_k'(t) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

soient vérifiées identiquement par rapport à t.

Si toutes les dérivées $\alpha_k'(t)$ ne sont pas nulles, alors le déterminant correspondant au système (**)

$$\Delta(x, \alpha) = |y_{i\alpha_k}(x, \alpha)| \quad (i, k = 1,2, \ldots, n)$$

où x et α_k sont remplacés par $x(t)$ et $\alpha(t)$, doit être identiquement nul par rapport à t. Ainsi nous avons démontré que le point de contact de l'enveloppe avec l'extrémale angulaire E_{102} est le foyer conjugué de la variété M^1.

Au contraire, supposons que le point *3* se trouvant sur E_{102} et dont l'abscisse est $x = x^3$, $x^3 \neq x^1$, $x^3 \neq x^0$ soit le foyer conjugué de la variété M^1. Admettons, pour être précis, que $x^0 < x^3 < x^2$. Construisons la famille d'extrémales angulaires à n paramètres (5,1) contenant E_{102} pour $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. D'après la définition du foyer conjugué nous avons $\Delta(x^3, 0) = 0$. Supposons, de plus, que la dérivée Δ_x n'est pas nulle au point *3*. Dans ce cas au point *3* au moins un des mineurs de l'ordre $n - 1$ du déterminant Δ sera différent de zéro et un des déterminants de l'ordre n de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \Delta_x, & \Delta_{\alpha_k} \\ 0, & y_{i\alpha_k} \end{matrix} \right\| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ne sera pas nul, car il est égal au produit de Δ_x par le mineur différent de zéro du déterminant Δ. Supposons que le mineur de l'ordre $n - 1$ se trouvant en haut et au coin gauche du déterminant n'est pas nul. Dans ce cas, on peut résoudre les n premières équations du système

$$(6,4) \qquad \begin{aligned} \Delta_x(x, \alpha)\,\mathrm{d}x + \Delta_{\alpha_k}(x, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha_k &= 0\,, \\ y_{i\alpha_k}(x, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha_k &= 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

par rapport à $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha_n$, $\mathrm{d}\alpha_1/\mathrm{d}\alpha_n, \ldots, \mathrm{d}\alpha_{n-1}/\mathrm{d}\alpha_n$ d'où l'on peut tirer les fonctions $x(\alpha_n)$, $\alpha_1(\alpha_n), \ldots, \alpha_{n-1}(\alpha_n)$, qui prennent au point $(x^3, 0)$ les valeurs initiales $x(0) = x^3$, $\alpha_k(0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Si dans le déterminant ce n'est pas le mineur susmentionné, mais un autre mineur de l'ordre $n - 1$ qui n'est pas nul, alors, on peut prendre la première équation du système (6,4) et les équations correspondant au mineur différent de zéro. Dans ce cas, nous obtiendrons x et α_k comme fonctions de t; ici t indique l'une des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il est évident que pour $t = 0$ toutes les dérivées $x'(t)$, $\alpha_1'(t)$, $\alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t)$ ne sont pas nulles, et, comme au point *3* la dérivée $\Delta_3 \neq 0$, la première équation du système (6,4) montre que pour $t = 0$ toutes les $\alpha_k'(t)$ ne sont pas nulles non plus. Pour les valeurs $x(t)$, $\alpha(t)$ le déterminant Δ est identiquement nul, car il est nul au point $(x^3, 0)$, et, de même comme le montre la première équation du système (6,4) sa derivée totale par rapport à t est identiquement nulle. Il s'ensuit que les fonctions obtenues vérifient aussi la dernière équation du système (6,4). En plaçant les fonctions $x(t)$, $\alpha_k(t)$ dans la famille (5,1) nous obtenons la famille à un paramètre de la forme de (6,1) qui contient E_{102} pour $t = 0$.

Pour cette famille les équations (6,3) donneront la courbe D. Les équations (6,2) sont identiquement vérifiées par rapport à t, car toutes les $\alpha_k'(t)$ ne sont pas nulles. Ainsi le long de la courbe D le déterminant Δ est identiquement nul; ce qui signifie que D est l'enveloppe de la famille (6,1) et qui est tangente à l'extrémale angulaire E_{102} au foyer conjugué *3*.

Nous avons démontré le théorème suivant qui est la généralisation du théorème analogue des problèmes variationnels continus (Voir Bliss, [13]), p. 35).

Théorème 6.1. *Si le point 3 d'abscisse* $x = x^3$, $x^3 \neq x^1$, $x^3 \neq x^0$ *est le foyer conjugué situé sur l'extrémale angulaire non singulière* E_{102} *de la variété* M^1, *et si, en ce point, la dérivée* Δ_x *du déterminant* Δ *est différente de zéro; alors il existe une famille d'extrémales angulaires à un paramètre, de la forme* (6,1), *coupant transversalement la variété* M^1, *contenant pour* $t = 0$ *l'extrémale angulaire* E_{102} *et ayant une enveloppe D tangente à* E_{102} *au point 3; les fonctions* y_i, y_{ix} *et la fonction* $x(t)$ *qui détermine l'enveloppe D possèdent des dérivées continues aux points* (x, t) *voisins aux arcs* E_{10} *et* E_{02}.

La justesse de la dernière affirmation du théorème provient de ce que, d'après le théorème 5.1, les fonctions y_i et y_{ix} possèdent des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre partout, sauf aux points angulaires des extrémales y_i. Par conséquent, les fonctions $x(t)$, $\alpha(t)$, obtenues d'après les équations (6,4), ont au mois des dérivées continues du premier ordre.

Démontrons encore le théorème préliminaire suivant:

Théorème 6.2. *Supposons que les courbes de la famille* (3,2), *à l'aide de laquelle nous avons obtenu la formule* (3,6), *soient des extrémales angulaires. Admettons que* E_{30_14} *et* E_{50_26} *soient les extrémales angulaires de la famille* (3,2) (voir fig. 1) *et qui coupent les variétés* M^1, M^0, M^2 *respectivement aux points 3,* 0_1, *4 (pour* E_{30_14}*)* et *5,* 0_2, *6 (pour* E_{50_26}*). Alors les valeurs* $J(E_{30_14})$ et $J(E_{50_26})$ *de l'intégrale J le long des extrémales angulaires* E_{30_14} *et* E_{50_26} *de la famille* (3,2), *correspondant respectivement aux valeurs* a_1 et a_2 *du paramètre a,* $a_1 < a_2$, *sont liées par la relation*

$$J(E_{50_26}) - J(E_{30_14}) = J_2^*(L_{46}^2) - J_1^*(L_{35}^1) \tag{6,5}$$

où le second membre est formé par les intégrales

$$J_1^* = \int\{F^1\,dx + (dy_i - y_i'\,dx)\,F^1_{y'_i}\}, \tag{6,6}$$

$$J_2^* = \int\{F^2\,dx + (dy_i - y_i'\,dx)\,F^2_{y'_i}\} \tag{6,7}$$

prises le long des courbes L_{35}^1 *et* L_{46}^2 *situées respectivement sur les variétés* M^1 *et* M^2 *et déterminées au* § 3.

Nous appellerons les intégrales (6,6) et (6,7) intégrales d'Hilbert pour le problème variationnel discontinu.

Pour démontrer le théorème 6.2 nous nous servons de la formule

$$(3,6) \qquad \mathrm{d}J = [F^1\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}y_i - y^-_{ix}\,\mathrm{d}x)\,F_{y'_i}]^0_1 + [F^2\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}y_i - y^+_{ix}\,\mathrm{d}x)\,F^2_{y'_i}]^2_0$$

qui a été obtenue au § 3 et qui exprime la différentielle de la fonctionelle J le long de la courbe C_{102} dont les arcs C_{10} et C_{02} satisfont respectivement aux équations d'Euler (2,3) et (2,4). Le second membre de la formule (3,6) est le produit d'une fonction de a par da. En effet, les fonctions y_i, y_{ix} qui entrent dans la formule (3,6) sont des fonctions de x et de a, et les différentielles dx et dy_i sont les produits d'une fonction de a par da. Comme nous supposons ici que toutes les courbes de la famille (3,2) soient des extrémales angulaires, ainsi au point 0 de chaque extrémale la condition primaire de discontinuité doit être satisfaite.

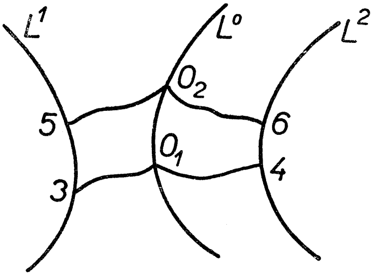

Fig. 1.

Chaque valeur du paramètre a détermine en même temps trois points situés respectivement sur les variétés M^1, M^0, M^2 et l'extrémale angulaire correspondante de la famille (3,2). Prenons les valeurs a_1 et a_2 du paramètre a et posons $a_1 < a_2$. Admettons que a_1 et a_2 correspondent respectivement aux extrémales angulaires E_{30_14} et E_{50_26}.

En intégrant tous les deux membres de l'égalité (3,6) dans les limites a_1 et a_2 nous obtenons

$$(6,8) \qquad \begin{aligned} J(a_2) - J(a_1) = &\int_{a_1}^{a_2} \{[F^1 - y^-_{ix}F^1_{y'_i}) - (F^2 - y^+_{ix}F^2_{y'_i})]\,x^0_a + \\ &+ (F^1_{y'_i} - F^2_{y'_i})\,y^0_{ia}\}\,\mathrm{d}a + \int_{a_1}^{a_2} [(F^2 - y^+_{ix}F^2_{y'_i})\,x^2_a + F^2_{y'_i}y^2_{ia}]\,\mathrm{d}a - \\ &- \int_{a_1}^{a_2} [(F^1 - y^-_{ix}F^1_{y'_i})\,x^1_a + F^1_{y_i}y^1_{ia}]\,\mathrm{d}a\,. \end{aligned}$$

Remarquons que les arguments des fonctions F^1 et F^2 et de leurs dérivées partielles, rentrant dans la relation (6,8), sont les éléments (x, y_i, y'_i) de l'extrémale qui correspondent aux points d'intersection de cette extrémale avec les variétés M^1, M^0, M^2. Comme la condition primaire de discontinuité est satisfaite pour toutes les valeurs de a, la première intégrale du second membre de l'égalité (6,8) devient nulle, et la deuxième et la troisième intégrales sont des intégrales d'Hilbert calculées le long des arcs L^2_{46} et L^1_{35} des courbes L^2 et L^1. Comme l'extrémale E_{50_26} correspond à la valeur a_2 et l'extrémale E_{30_14} correspond à la valeur a_1, les expressions $J(a_2)$ et $J(a_1)$ représentent les valeurs de la fonctionnelle J le long de ces extrémales angulaires. En indiquant ces valeurs par $J(E_{50_26})$ et $J(E_{30_14})$ nous obtenons tout de suite la formule (6,5). Le théorème est démontré.

Maintenant, il n'est pas difficile de démontrer le théorème de l'enveloppe pour le problème variationnel *discontinu*.

Théorème de l'enveloppe. *Si l'enveloppe D de la famille d'extrémales* (6,1) *à un seul paramètre a une branche dirigée du point 3* (*où le point 3 est le point de contact de l'enveloppe avec l'extrémale angulaire*) *au point 1* (voir fig. 2), *alors pour tout point 6 se trouvant sur D avant le point 3 et à son voisinage, la courbe* $E_{50_26} + D_{63} + E_{32}$ *est admissible et la formule*

$$J(E_{50_26} + D_{63} + E_{32}) = J(E_{102}) \tag{6,9}$$

est vérifiée.

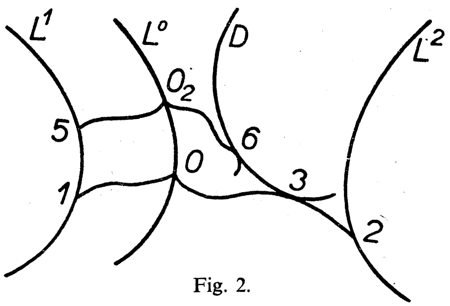

Fig. 2.

En effet, nous utilisons la formule (6,5), en remplaçant l'extrémale angulaire E_{30_14} par E_{103} et la courbe L^2 par D_{63}. Ainsi nous avons

$$J(E_{50_26}) - J(E_{103}) = J_2^*(D_{36}) - J_1^*(L_{15}).$$

Comme la famille (6,1) est coupée transversalement par la variété M^1, alors $J_1^*(L_{15}^1) = 0$.

De plus, nous avons $J_2^*(D_{36}) = J(D_{36})$, parce que la direction $dx : dy_1 : dy_2 : \ldots$ $\ldots : dy_n$ de la courbe D et celle $1 : y_1' : y_2' : \ldots : y_n'$ de l'extrémale coïncident au point de leur intersection. Le théorème est démontré.

Maintenant, il n'est pas difficile de démontrer l'affirmation principale du présent paragraphe.

Condition nécessaire IV. *Nous dirons que l'extrémale non singulière* E_{102}, *ayant un seul point angulaire 0, satisfait à la condition nécessaire de Jacobi si entre les points 1 et 2 de* E_{102} *il n'existe pas de foyers conjugués des variétés* M^1 *et* M^2.

Théorème 6.3. *Pour que la courbe admissible non singulière* E_{102} (*à un seul point angulaire 0*) *rende minimum la fonctionelle J il faut qu'elle satisfasse à la condition* IV.

Nous avons démontré au § 2 que les arcs E_{10} et E_{02} de la courbe admissible non singulière E_{102}, qui rend minimum la fonctionnelle J, sont extrémaux. Plus loin, au § 3, il a été démontré qu' aux points *1, 2, 0* de la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$, qui rend minimum la fonctionnelle J, les conditions primaires de transversalité et de discontinuité doivent être satisfaites. Ainsi la courbe $E_{102} \in \mathfrak{G}$ qui rend minimum la fonctionnelle J doit être une extrémale angulaire coupant transversalement les variétés M^1 et M^2 aux points *1* at *2*. Alors, on peut construire la famille des extrémales angulaires (5,1) et, par conséquent (6,1) qui contiennent l'extrémale angulaire E_{102}.

Admettons que le foyer conjugué *3* de la variété M^1 se trouve sur la courbe E_{102}. Le point *3* doit appartenir à l'enveloppe de la famille à un seul paramètre (6,1). Alors, d'après le théorème de l'enveloppe la valeur de l'intégrale $J(E_{50_26} + D_{63} + E_{32})$ doit être égale à celle de l'intégrale $J(E_{102})$ c'est-à-dire que la courbe $E_{50_26} + D_{63} + E_{32}$ doit rendre l'intégrale J minimum.

Mais, la dernière courbe est non singulière au voisinage du point *6*, car la courbe E_{102} est non singulière elle-même. Par conséquent, l'arc D_{63} de la courbe D doit être l'arc de l'extrémale, ce qui est impossible, car par le point *3* dans une direction donnée ne peut passer qu'une seule extrémale. Ce qui signifie qu'il doit exister une courbe différente de $E_{5026} + D_{63} + E_{32}$ laquelle rend minimum la fonctionelle J, ce qui est contradictoire aux conditions du théorème.

Il s'en ensuit que la variété M^1 ne peut pas avoir de foyers conjugués sur la courbe E_{102}. D'une manière analogue on peut démontrer que la variété M^2 ne peut avoir non plus de foyers conjugués sur l'extrémale E_{102}. Le théorème est démontré.

Si la famille (6,1) a une enveloppe de la forme présentée ci-dessus, on peut démontrer de même une affirmation plus générale.

Conditions nécessaires IV′. *Nous dirons que l'extrémale non singulière ayant un seul point angulaire 0 satisfait à la condition de Jacobi au sens strict si les variétés M^1 et M^2 n'ont de foyers conjugués sur E_{102} ni entre les points 1 et 2 ni en ces points.*

Nous voyons que la condition de Jacobi est démontrée d'une façon géométrique avec les restrictions suivantes:

La dérivée Δ_x du déterminant Δ est différente de zéro au foyer conjugué et l'enveloppe possède une branche dirigée du foyer conjugué *3* au point initial *1*. Ces restrictions sont importantes. Si l'enveloppe a un point de retour au point *3* et ses deux branches s'éloignent du point *1*, alors, pour démontrer la condition de Jacobi, il faut se rapporter à d'autres procédés. (Pour le cas plan voir, par exemple, [4], pp. 358–364, [1], p. 320.)

Notons que le théorème 6.3 pourra être démontré sans restrictions énumérées ci-dessus si l'on applique la theorie de la variation seconde de la fonctionnelle J (pour le cas plan, voir [9], [10], [12]).

7. EXPOSÉ DE LA CONDITION DE JACOBI À L'AIDE DU SIGNE DE LA VARIATION SECONDE

Tout d'abord, nous devons calculer la variation seconde de la fonctionnelle discontinue J. Pour cela rapportons-nous à la méthode, proposée par M. Morse (voir [14], p. 21) pour le calcul de la variation seconde de la fonctionelle continue.

Soient les fonctions $\alpha_h(a)$, $\beta_h(a)$, $\gamma_h(a)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ de la classe C^2 pour toutes les valeurs de a proches de 0. Prenons la famille à un paramètre de courbes admissibles de la forme (3,2) où les fonctions $y_i^-(x, a)$ et $y_i^+(x, a)$ sont de la classe C^2 pour les valeurs de a proches de 0. Supposons que E_{102} soit l'extrémale angulaire contenue dans la famille (3,2) pour $a = 0$ et satisfaisant à la condition de transversalité aux points *1* et *2*.

Les identités (3,3) dérivées par rapport à a étant nulles, on obtient

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\eta_i^1 \equiv \eta_i(x^1) = C_{ih}^1\tau_h^1\,, \quad \eta_i^2 \equiv \eta_i(x^2) = C_{ih}^2\tau_h^2\,, \\ &\eta_i^{0-} \equiv \eta_i^-(x^0) = C_{ih}^{0-}\tau_h^0\,, \quad \eta_i^{0+} \equiv \eta_i^{0+}(x^0) = C_{ih}^{0+}\tau_h^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

où

$$\eta_i(x) = y_a(x, 0)\,, \quad \tau_h^1 = \alpha_h'(0)\,, \quad \tau_h^2 = \gamma_h'(0)\,, \quad \tau_h^0 = \beta_h'(0)\,,$$
$$C_{ih}^k = y_{ih}^k(0) - y_{ix}(x^k)\, x_h^k(0) \quad (h = 1, 2, \ldots, n;\, k = 1 \text{ ou } 2)\,,$$
$$C_{ih}^{0-} = y_{ih}^0(0) - y_{ix}^-(x^0)\, x_h^0(0)\,, \quad C_{ih}^{0+} = y_{ih}^0(0) - y_{ix}^+(x^0)\, x_h^0(0)\,.$$

Nous appellerons les conditions (A) *conditions secondaires pour les extrémités*, et les fonctions $\eta_i(x)$ et les constantes τ_h^1, τ_h^0, τ_h^2 variations de la famille (3,2) le long de la courbe E_{102}.

Désignons par δ la dérivée par rapport à a et par d celle par rapport à a lorsqu' on tient compte de la dépendance de x de a. Alors, le long de la famille (3,2) on a

$$\text{(7,1)} \qquad \mathrm{d}J = J'(a)\,\mathrm{d}a = F^1\,\mathrm{d}x|_1^0 + F^2\,\mathrm{d}x|_0^2 + \int_{x^1(a)}^{x^0(a)} (F_{y_i}^1 \delta y_i + F_{y'_i}^1 \delta y_{ix})\,\mathrm{d}x + \\ + \int_{x^0(a)}^{x^2(a)} (F_{y_i}^2 \delta y_i + F_{y'_i}^2 \delta y_{ix})\,\mathrm{d}x\,.$$

Comme E_{102} vérifie la condition I', nous avons

$$\text{(7,2)} \qquad J'(0) = 0\,.$$

La différentielle seconde de la fonction $J(a)$ pour $a = 0$ est de la forme

$$\text{(7,3)} \qquad \mathrm{d}^2J = J''(0)\,\mathrm{d}a^2 = [F^1\,\mathrm{d}^2x + F_x^1\,\mathrm{d}x^2 + F_{y_i}^1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y_i + \\ + F_{y'_i}^1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y_{ix} + 2F_{y_i}^1\delta y_i\,\mathrm{d}x + 2F_{y'_i}^1\delta y_{ix}\,\mathrm{d}x]_1^0 + \\ + [F^2\,\mathrm{d}^2x + F_x^2\,\mathrm{d}x^2 + F_{y_i}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y_i + F_{y'_i}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y_{ix} + \\ + 2F_{y_i}^2\delta y_i\,\mathrm{d}x + 2F_{y'_i}^2\delta y_{ix}\,\mathrm{d}x]_0^2 + \int_{x^1}^{x^0} [F_{y_i}^1\delta^2 y_i + \\ + F_{y'_i}^1\delta^2 y_{ix} + 2\omega^1(x, \delta y, \delta y_x)]\,\mathrm{d}x + \int_{x^0}^{x^2} [F_{y_i}^2\delta^2 y_i + \\ + F_{y'_i}^2\delta^2 y_{ix} + 2\omega^2(x, \delta y, \delta y_x)]\,\mathrm{d}x$$

où

$$2\omega^k(x, \eta, \eta') = F_{y_iy_j}^k\eta_i\eta_j + 2F_{y_iy'_j}^k\eta_i\eta'_j + F_{y'_iy'_j}^k\eta'_i\eta'_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\, k = 1 \text{ ou } 2)\,.$$

En intégrant par parties les deux premiers termes des expressions sous l'intégrale en remplaçant les différentielles par leurs valeurs obtenues de (3,2), nous avons

$$\text{(7,4)} \qquad \mathrm{d}^2J = [F^1\,\mathrm{d}^2x + (\mathrm{d}^2y_i - y_{ix}\,\mathrm{d}^2x)\,F_{y'_i}^1]_1^0 + [(F_x^1 - y_{ix}F_{y_i}^1)\,\mathrm{d}x^2 + \\ + 2F_{y_i}^1\,\mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}x]_1^0 + [F^2\,\mathrm{d}^2x + (\mathrm{d}^2y_i - y_{ix}\,\mathrm{d}^2x)\,F_{y'_i}^2]_0^2 + \\ + [(F_x^2 - y_{ix}F_{y_i}^2)\,\mathrm{d}x^2 + 2F_{y_i}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y_i]_0^2 + \\ + \int_{x^1}^{x^0} 2\omega^1(x, \eta, \eta')\,\mathrm{d}x + \int_{x^0}^{x^2} 2\omega^2(x, \eta, \eta')\,\mathrm{d}x\,.$$

En différentiant les identités (3,3) par rapport à a et en posant $a = 0$, on obtient les différentielles $\mathrm{d}x^k$, $\mathrm{d}y^k$, d^2x^k, $\mathrm{d}^2y^k (k = 1$ ou 0 ou $2)$. Introduisons ces valeurs dans l'expression (7,4); étant donné que E_{102} vérifie la condition I' nous obtiendrons

$$\text{(7,5)} \qquad J_2(\eta, \tau) \equiv J''(0) = b_{hl}^1\tau_h^1\tau_l^1 + (b_{hl}^{0-} + b_{hl}^{0+})\,\tau_h^0\tau_l^0 + b_{hl}^2\tau_h^2\tau_l^2 + \\ + \int_{x^1}^{x^0} 2\omega^1(x, \eta, \eta')\,\mathrm{d}x + \int_{x^0}^{x^2} 2\omega^2(x, \eta, \eta')\,\mathrm{d}x$$

où

$$b_{hl}^1 = -\,[(F^1 - y_i'F_{y'_i}^1)\,x_h^1x_l^1 + F_{y'_i}^1 y_{ihl}^1 + \\ + (F_x^1 - y_i'F_{y_i}^1)\,x_h^1x_l^1 + F_{y_i}^1(y_{ih}^1x_l^1 + y_{il}^1x_h^1)]_{x=x^1}\,,$$

$$b_{hl}^{0-} = [(F^1 - y_i'^-F_{y'_i}^1)\,x_h^0x_l^0 + F_{y'_i}^1 y_{ihl}^0 + \\ + (F_x^1 - y_i'^-F_{y_i}^1)\,x_h^0x_l^0 + F_{y_i}^1(y_{ih}^0x_l^0 + y_{il}^0x_h^0)]_{x=x^0-0}\,,$$

$$b_{hl}^{0+} = -\left[(F^2 - y_i'^{+}F_{y'_i}^2)\, x_h^0 x_l^0 + F_{y'_i}^2 y_{ihl}^0 + \right.$$
$$\left. + (F_x^2 - y_i'^{+}F_{y_i}^2)\, x_h^0 x_l^0 + F_{y_i}^2(y_{ih}^0 x_l^0 + y_{il}^0 x_h^0)\right]_{x=x^0+0},$$
$$b_{hl}^2 = \left[(F^2 - y_i'F_{y'_i}^2)\, x_h^2 x_l^2 + F_{y'_i}^2 y_{ihl}^2 + \right.$$
$$\left. + (F_x^2 - y_i'F_{y_i}^2)\, x_h^2 x_l^2 + F_{y_i}^2(y_{ih}^2 x_l^2 + y_{il}^2 x_h^2)\right]_{x=x^2}.$$

Il est évident que

$$b_{hl}^1 = b_{lh}^1,\ b_{hl}^{0-} = b_{lh}^{0-},\ b_{hl}^{0+} = b_{lh}^{0+},\ b_{hl}^2 = b_{lh}^2.$$

Nous appellerons l'expression $J_2(\eta, \tau)$ *variation seconde de la fonctionelle discontinue* J le long de l'extrémale angulaire E_{102}.

Nous appellerons l'ensemble $\eta_i(x)$, τ_h^1, τ_h^0, τ_h^2, $(x^1 \leqq x \leqq x^2)$ ensemble des variations admissibles dans le cas où les valeurs τ_h^1, τ_h^0, τ_h^2 sont constantes et les fonctions $\eta_i(x)$ appartiennent à la classe D^1 pour tous les points du segment $x^1 \leqq x \leqq x^2$ sauf au point $x = x^0$, où elles ont un point de discontinuité de première espèce, et cette discontinuité remplit la condition

$$(7,6) \qquad \eta_i^{0-} = C_{ih}^{0-}\tau_h^0, \quad \eta_i^{0+} = C_{ih}^{0+}\tau_h^0 \quad (i, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Maintenant, nous passerons à la démonstration de la condition de Jacobi à l'aide de la variation seconde:

Condition nécessaire IV. *Nous dirons que l'extrémale angulaire E_{102}, coupée par les variétés M^1, M^0, M^2 aux points 1, 0, 2 (où sont satisfaites les conditions primaires de transversalité et de discontinuité) satisfait à la condition nécessaire de Jacobi (à la condition necessaire* IV) *si la variation seconde $J_2(\eta, \tau)$ le long de E_{102} n'est pas négative pour un ensemble de variations arbitraires satisfaisant aux conditions secondaires pour les extrémités.*

Théorème 7.1. *Pour que l'extrémale angulaire E_{102} rende minimum la fonctionelle J, il est nécessaire qu'elle satisfasse à la condition* IV.

La démonstration est basée sur le *lemme* suivant:

Lemme 7.1. *Pour un ensemble quelconque de variations admissibles $\eta_i(x)$, τ_h^1, τ_h^0, τ_h^2 le long de E_{102} et vérifiant la condition* (A), *il existe la famille de courbes admissibles à un paramètre*

$$(7,7) \qquad y_i = y_i(x, a) \begin{cases} y_i^-(x, a), & x^1[\alpha(a)] \leqq x \leqq x^0[\beta(a)], \\ y_i^+(x, a), & x^0[\beta(a)] \leqq x \leqq x^2[\gamma(a)] \end{cases}$$

qui contient E_{102} pour $a = 0$, l'ensemble des variations $\eta_i(x)$, τ_h^1, τ_h^0, τ_h^2 étant l'ensemble qui correspond à la famille (7,7) *le long de E_{102}; les fonctions $y_i^-(x, a)$ et $y_i^+(x, a)$ possèdent toutes les propriétés de continuité et de dérivabilité, qui sont nécessaires pour calculer la variation seconde de la fonctionnele J le long de E_{102}.*

Pour démontrer le lemme 7.1 prenons un autre ensemble de variations pour lequel les fonctions $\eta^-(x)$, $x^1 \leqq x \leqq x^0$, $\eta^+(x)$, $x^0 \leqq x \leqq x^2$ sont prolongées, en conservant toutes leurs propriétés differentielles, pour quelques segments contenant entièrement dans leur intérieur respectivement les segments $x^1 \leqq x \leqq x^0$ et $x^0 \leqq$

$\leqq x \leqq x^2$. Nous garderons pour cet ensemble les notations que nous avons déjà utilisées. Il est facile de voir que la famille (7.7) où

$$(7,8)\quad \alpha_h(a) = a\tau_h^1\,,\ \beta_h(a) = a\tau_h^0\,,\ \gamma_h(a) = a\tau_h^2\,,\ y_i^-(x,a) = y_i^-(x) + a\eta_i^-(x) -$$
$$- \{y_i^-[x^0(\beta(a))] - y_i^0[\beta(a)] + a\eta_i^-[x^0(\beta(a))]\ \frac{x - x^1[\alpha(a)]}{x^0[\beta(a)] - x^1[\alpha(a)]} -$$
$$- \{y_i^-[x^1(\alpha(a))] - y_i^1[\alpha(a)] + a\eta^-[x^1(\alpha(a))]\}\ \frac{x - x^0[\beta(a)]}{x^1[\alpha(a)] - x^0[\beta(a)]}\,;$$

$$(7,9)\quad y_i^+(x,a) = y_i^+(x) + a\eta_i^+(x) - \{y_i^+[x^2(\gamma(a))] - y_i^2[\gamma(a)] +$$
$$+ a\eta_i^+[x^2(\gamma(a))]\}\ \frac{x - x^0[\beta(a)]}{x^2[\gamma(a)] - x^0[\beta(a)]} - \{y_i^+[x^0(\beta(a)) - y_i[\beta(a)] +$$
$$+ a\eta^+[x^0(\beta(a)]\}\ \frac{x - x^2[\gamma(a)]}{x^0[\beta(a)] - x^2[\gamma(a)]}$$

est la famille cherchée. En effet, elle contient E_{102} pour $a = 0$ et vérifie les conditions primaires pour les extrémités.

Démontrons que

$$(7,10)\qquad y_a^-(x,0) \equiv \eta^-(x)\,,\quad x^1 \leqq x \leqq x^0\,,$$

$$(7,11)\qquad y_a^+(x,0) \equiv \eta^+(x)\,,\quad x^0 \leqq x \leqq x^2\,.$$

Désignons, respectivement, par $B_0^-(a)$, $B_1(a)$, $B_0^+(a)$, $B_2(a)$ les expressions qui sont entre parenthèses dans les seconds membres des égalités (7,8) et (7,9). Nous voyons que $B_0^-(a)$, $B_1(a)$, $B^+(a)$, $B_2(a)$ sont nuls pour $a = 0$. En utilisant les égalités (A), il facile de démontrer que les dérivées $B_0'^-$,B_1', $B_0'^+$, B_2' sont aussi nulles pour $a = 0$. La justesse des identités (7,10) et (7,11) est démontrée.

La dernière affirmation du lemme est aussi vraie, parce que les fonctions $y_i(x, a)$ possèdent les dérivées $\delta y_i(x, a)$, $\delta^2 y_i(x, 0)$ et conséquemment, dans le cas où les fonctions

$$(*)\qquad \begin{aligned} &F^1\{x^1(\alpha(a))\,,\ y_i[x^1(\alpha(a))\,,\ a]\,,\ y_{ix}[x^1(\alpha(a))\,,\ a]\}\,,\\ &F^1\{x^0(\beta(a))\,,\ y_i[x^0(\beta(a))\,,\ a]\,,\ y_{ix}[x^0(\beta(a))\,,\ a]\}\,;\end{aligned}$$

$$(**)\qquad \begin{aligned} &F^2\{x^0(\beta(a))\,,\ y_i[x^0(\beta(a))\,,\ a]\,,\ y_{ix}[x^0(\beta(a))\,,\ a]\}\,,\\ &F^2\{x^2(\gamma(a))\,,\ y_i[x^2(\gamma(a))\,,\ a]\,,\ y_{ix}[x^2(\gamma(a))\,,\ a]\}\end{aligned}$$

ont aussi des dérivées pour $a = 0$, nous pouvons écrire $\mathrm{d}J = J'(a)\,\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}^2J = J''(0)\,\mathrm{d}a^2$. L'existence des dérivées des expressions (*), (**) suit de ce fait que les deux premiers arguments des fonctions F^1 et F^2 ont des dérivées pour $a = 0$, tandis que la dérivée du troisième argument est égale à

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\, y_{ix}^-\,[x^1(\alpha(a))\,,\ a]\right)_{a=0} = y_{ixx}^-(x^1)\,.\,x_h^1(0)\,\tau_h^1 + \eta_i^-(x^1)\,.$$

On peut démontrer, par voie identique, que les fonctions

$$y_i^-[x^0(\beta(a)), a], \; y_i^+[x^0(\beta(a))], a], \; y_i^+[x^2(\gamma(a)), a]$$

possèdent des dérivées par rapport à a pour $a = 0$. Le lemme est démontré entièrement.

Maintenant revenons à la démonstration du théorème 7.1. Nous remarquons que la fonctionnelle J prise le long de la famille (7,7) se transforme en une fonction $J(a)$ de a ayant pour $a = 0$ des dérivées première et seconde. Si E_{102} rend minimum la fonctionnelle J, il est nécessaire que les relations suivantes soient vérifiées:

$$J'(0) = 0, \quad J''(0) = J_2(\eta, \tau) \geqq 0 .$$

Ainsi, le théorème est démontré.

8. CAS PARTICULIER DU PROBLÈME VARIATIONNEL DISCONTINU

Si la variété M^0, sur laquelle s'effectue la discontinuité de la fonctionnelle J, dégénère en une variété linéaire n-dimensionnelle, la théorie du problème discontinu se simplifie considérablement.

Dans ce cas, les conditions primaires pour les extrémités, au point de la discontinuité, peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$x = x^0, \; y_i = y_i^0 = \beta_i \quad (i = 1, 2, ..., n) .$$

Alors, la condition primaire de la discontinuité sera

$$F^1_{y'_i}[x^0, y(x^0), y'^-(x^0)] = F^2_{y'_i}[x^0, y(x^0), y'^+(x^0)] . \tag{8,1}$$

De l'égalité (7,4), il vient

$$b_{hl}^{0-} + b_{hl}^{0+} = 0 . \tag{8,2}$$

Alors, la variation seconde s'écrit de la façon suivante:

$$J_2(\eta, \tau) = b^1_{hl}\tau^1_h\tau^1_l + b^2_{hl}\tau^2_h\tau^2_l + \int_{x^1}^{x^0} 2\omega^1(x, \eta, \eta')\,dx + \int_{x^0}^{x^2} 2\omega^2(x, \eta, \eta')\,dx . \tag{8,3}$$

Les conditions secondaires pour les extrémités aux points *1* et *2* étant restées les mêmes, nous obtenons au point $x = x^0$

$$\eta_i^{0-} = \tau_i^0, \; \eta_i^{0+} = \tau_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8,4}$$

c'est-à-dire les fonctions $\eta_i(x)$ sont continues, et leurs dérivées peuvent avoir des discontinuités de première espèce (en particulier pour $x = x^0$); tandis que dans le cas de la formulation générale du problème, les fonctions $\eta_i(x)$ elles-mêmes ont des discontinuités de première espèce pour $x = x^0$ (cf. [9], [10], [11], [12]).

Le cas particulier du problème ressemble beaucoup au cas paramétrique du problème discontinu (voir [6]), où les variations $\eta_i(x)$ sont aussi des fonctions continues et leurs dérivées présentent des discontinuités de première espèce pour $x = x^0$. Dans ce cas, la condition primaire de discontinuité est analogue à celle exprimée par (8,1).

En conclusion, je voudrais exprimer ma vive reconnaissance au Professeur L. A. LUSTERNIK, dont la solicitude incessante a largement contribué à la naissance de ce travail et présenter nos remerciements au Professeur F. NOŽIČKA qui a bien voulu lire le monuscrit et qui a fait une série de remarques précieuses dont j'ai pris compte pendant la rédaction finale de mon travail.

Bibliographie

[1] *М. А. Лаврентьев* и *Л. А. Люстерник:* Основы вариационного исчисления, т. *I*, часть 2, ОНТИ, Москва-Ленинград, 1935
[2] *Н. М. Гюнтер:* Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, Ленинград-Москва, 1941.
[3] *G. A. Bliss* and *M. Mason:* A problem of the calculus of variations in which the integrand is discontinuous. Transactions of the American Mathematical Society, vol. *7* (1906), pp. 325—336.
[4] *O. Bolza:* Vorlesungen über Variationsrechnung. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.
[5] *E. J. Miles:* Some properties of space curves minimizing a definite integral with discontinuous integrand. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. *20* (1913), pp. 11—19.
[6] *N. Cole:* The Index Theorem for a calculus of variations problem in which the integrand is discontinuous. American Journal of Mathematics, vol. *62* (1940), pp. 249—276.
[7] *C. H. Denbow:* A Generalized form of the problem of Bolza. Contributions to the Calculus of Variations 1933—1937, University of Chicago Press, Chicago, 1938, pp. (449)—(484).
[8] *К. С. Ермилин:* Об экстремуме интегралов в случае разрывной подинтегральной функции. Известия Академии Наук СССР, серия математическая, т. *5* (1941), стр. 269—276.
[9] *М. К. Керимов:* О необходимых условиях экстремума в разрывных вариационных задачах с подвижными концами. Доклады Академии Наук СССР, т. *79*, № 4 (1951), стр. 565—568.
[10] *М. К. Керимов:* Об условии Якоби для разрывных вариационных задач с подвижными концами. Доклады Академии Наук СССР, т. *79*, № 5 (1951), стр. 719—722.
[11] *М. К. Керимов:* О достаточных условиях экстремума в разрывных вариационных задачах с подвижными концами. Доклады Академии Наук СССР, т. *84*, № 2 (1952), стр. 213—216.
[12] *М. К. Керимов:* Об условии Блисса для разрывных вариационных задач с подвижными концами. Учёные записки Азербайджанского государственного университета № *5* (1958), стр. 17—23.
[13] *G. A. Bliss:* Lectures on the Calculus of Variations. University of Chicago Press, Chicago, 1946.
[14] *Marston Morse:* The Calculus of Variations in the Large. American Mathematical Society Colloquium publications, vol. *18*, New York, 1934.

Резюме

К ТЕОРИИ РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

М. К. КЕРИМОВ, Москва

В этой статье исследуется вариационная задача о нахождении минимума разрывного функционала (1,1) в классе допустимых кривых, соединяющих

точки многообразий M^1 и M^2 и имеющих точки перелома, расположенные на многообразии M^0. Выводятся необходимые условия минимума, базирующиеся на теории первой и, частично, второй вариаций. Именно, доказываются необходимые условия Эйлера, Вейерштрасса, Лежандра, условия трансверсальности, условие разрыва; строится семейство ломаных экстремалей, содержащее данную ломаную экстремаль, дается определение фокальной точки и доказывается условие Якоби с помощью теоремы об огибающей.

Далее вычисляется вторая вариация для разрывного функционала и доказывается условие Якоби в терминах знака второй вариации.